

R. RIVET

Fonctions pseudo-concaves et anneaux henséliens

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4

« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 2, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__4_A2_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS PSEUDO-CONCAVES ET

ANNEAUX HENSELIENS

R. RIVET

§ I - Fonctions pseudo-concaves

On désignera par \mathbb{Z}_∞ le monoïde commutatif totalement ordonné habituel : $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. [2]

Définition I.I : Une fonction φ de \mathbb{N} dans \mathbb{Z}_∞ est pseudo-concave, si elle vérifie, quels que soient les entiers p et q :

$$\varphi(p) + \varphi(q) \geq \varphi(p+q) + \varphi(0).$$

Remarquons que si φ est pseudo-concave et si $\varphi(0) = +\infty$ alors φ est la fonction infinie.

D'autre part, si $\varphi(k) = +\infty$ alors pour tout n vérifiant $0 < n \leq k$, $\varphi(n) = +\infty$.

Exemples de fonctions pseudo-concaves.

La fonction ω_k définie par

$$\omega_k(n) = \begin{cases} +\infty & 0 < n \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est pseudo-concave.

La fonction ω_∞ définie par

$$\omega_\infty(n) = +\infty \quad n > 0$$

$$\omega_\infty(0) = 0$$

est pseudo-concave.

La fonction infinie est pseudo-concave.

Définition I.2 : Une fonction θ de \mathbb{N} dans \mathbb{Z}_∞ est concave, si elle vérifie, quel que soit $n > 0$

$$2\theta(n+1) \geq \theta(n) + \theta(n+2).$$

On peut remarquer que si $\theta(k) = +\infty$, alors θ est la fonction infinie

Proposition I.3 : Une fonction concave est pseudo-concave.

Puisque ϕ est concave, on peut supposer que ϕ est finie. Alors on peut écrire :

$$\phi(k+1) - \phi(k) \leq \phi(k) - \phi(k-1) \quad k \geq 1$$

d'où, en supposant $1 \leq p \leq q$:

$$\sum_{k=p}^q [\phi(k+1) - \phi(k)] \leq \sum_{k=p}^q [\phi(k) - \phi(k-1)]$$

soit

$$\phi(q+1) - \phi(p) \leq \phi(q) - \phi(p-1)$$

ou

$$\phi(q+1) - \phi(q) \leq \phi(p) - \phi(p-1)$$

En particulier, pour tout $0 \leq i \leq p-1$

$$\phi(q+i+1) - \phi(q+i) \leq \phi(p-i) - \phi(p-i-1) \quad \text{car } p-i \leq q+i$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{p-1} [\phi(q+i+1) - \phi(q+i)] \leq \sum_{i=0}^{p-1} [\phi(p-i) - \phi(p-i-1)]$$

soit

$$\phi(p+q) - \phi(q) \leq \phi(p) - \phi(0)$$

c.q.f.d.

Remarque I.4 : Les exemples précédents montrent qu'il existe des fonctions pseudo-concaves qui ne sont pas concaves. Ceci justifie la dénomination pseudo-concave.

Exemple : La fonction définie par :

$$\begin{cases} \phi(n) = 0 & n \text{ pair} \\ \phi(n) = 1 & n \text{ impair} \end{cases}$$

est pseudo-concave, mais n'est pas concave, et ne prend aucune valeur infinie.

Quelques inégalités et propriétés :

Proposition I.5 : Si ϕ est pseudo-concave, on a : pour $p \geq 1$

$$\phi(n_1) + \dots + \phi(n_p) \geq \phi(n_1 + \dots + n_p) + (p-1) \phi(0).$$

La propriété se montre facilement par récurrence.

Corollaire I.6 : Pour tous entiers positifs p et k , on a :

$$p\phi(k) \geq \phi(pk) + (p-1) \phi(0).$$

Proposition I.7 : Si ϕ_1, \dots, ϕ_p sont des fonctions pseudo-concaves et si c_1, \dots, c_p sont des entiers positifs, alors

$$\phi = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i$$

est pseudo-concave.

Cela résulte aussitôt de la définition en multipliant les deux membres de l'inégalité relative à ϕ_i par c_i , et en ajoutant membre à membre.

Corollaire I.8 : Si ϕ est pseudo-concave non infinie, alors ϕ est majorée par une fonction affine pour $n \geq n_0$.

Soit n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $\phi(n) < +\infty$
 pour $n \geq n_0$, on a : $n = kn_0 + h$ $0 \leq h < n_0$ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \phi(0) + \phi(n) &\leq \phi(kn_0) + \phi(h) \\ &\leq k \phi(n_0) - (k-1) \phi(0) + \phi(h) \\ \phi(n) &\leq k \phi(n_0) - \phi(0) + \phi(h) \end{aligned}$$

Si $\phi(n_0) < \phi(0)$, alors est majorée

Si $\phi(n_0) > \phi(0)$, alors $k \leq n$ et $\phi(h)$ majoré par a .

Soit pour tout n $\phi(n) \leq n [\phi(n_0) - \phi(0)] + a$.

Dans la suite, les fonctions pseudo-concaves qui nous intéressent seront celles qui prennent des valeurs négatives. Pour des propriétés générales des fonctions pseudo-concaves, on pourra consulter [5].

Puisque la fonction constante est concave, on pourra supposer que $\psi(0) = 0$.

§ 2 - Relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}_\infty^{\mathbb{N}}$:

Dans ce paragraphe, ℓ désignera une fonction affine de \mathbb{N} dans \mathbb{Z} :
 $n \mapsto \lambda n + \mu$, λ et μ appartenant à \mathbb{Z} .

Soient ϕ et ψ deux fonctions de \mathbb{N} dans \mathbb{Z}_∞ , alors la relation :
 il existe ℓ et ℓ' telles que

$$\psi + \ell \leq \phi \leq \psi + \ell'$$

est une relation d'équivalence. On notera $\bar{\phi}$ la classe de ϕ suivant cette relation d'équivalence notée (R).

Proposition 2.I : L'ensemble quotient $\mathbb{Z}_\infty^{\mathbb{N}} / (R)$ est un monoïde commutatif ordonné.

Il est clair que $\overline{\phi + \psi}$ est indépendante des représentants de $\bar{\phi}$ et $\bar{\psi}$, d'où $\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi}$. D'autre part, si 0 désigne la fonction nulle $\bar{\phi} + \bar{0} = \bar{\phi}$

la commutativité et l'associativité sont évidentes. De la même manière, on vérifie que la relation d'ordre passe au quotient.

Désignons par $P \subset \mathbb{Z}_\infty^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des fonctions pseudo-concaves. La restriction de la relation d'équivalence précédente à P sera notée (R) par abus de la langue.

Proposition 2.2 : L'ensemble $P/(R)$ est un monoïde commutatif ordonné.

Ceci résulte de la proposition I, et du fait que P est stable pour l'addition et que $0 \in P$.

Proposition 2.3 : Soit une fonction pseudo-concave, alors

- i) si $\theta(n) < +\infty$ pour tout n $\bar{\theta} \geq \bar{0}$
- ii) si $\theta(n) = +\infty$ $1 \leq n \leq k$ $\bar{\theta} \geq \bar{\omega}_k$ (cf I^{ère} partie)

Cela résulte du fait qu'une fonction pseudo-concave est majorée par une fonction affine.

§ 3 - Sous-anneaux de $\text{Cf}(A)[[X]]$ associés à une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{Z}_∞ .

Lemme 3.1 : Soit θ une application de \mathbb{N} dans \mathbb{Z}_∞ . Les séries formelles S de $\text{Cf}(A)[[X]]$ vérifiant $\phi_S \geq \theta$ forment un groupe.

Cela résulte de $\phi_{S-T} \geq \inf(\phi_S, \phi_T)$ et de $\phi_{-T} = \phi_T \geq \theta$

Proposition 3.2 : Si θ est une fonction pseudo-concave, vérifiant $\theta(0) \leq 0$, alors l'ensemble des séries formelles S vérifiant $\phi_S \geq \theta$ est un sous-anneau unitaire de $\text{Cf}(A)[[X]]$.

Soient $S = \sum_{n \geq 0} s_n X^n$, $T = \sum_{n \geq 0} t_n X^n$ deux séries formelles vérifiant

$\phi_S \geq \theta$, $\phi_T \geq \theta$ et soit $V = ST = \sum_{n \geq 0} v_n X^n$. On a :

$$v_n = \sum_{k=0}^n t_k s_{n-k}$$

il existe i tel que $v(v_n) \geq v(t_i) s_{n-i} = v(t_i) + v(s_{n-i}) \geq \theta(i) + \theta(n-i)$

$$v(v_n) \geq \theta(n) + \theta(0) \geq \theta(n)$$

d'où $\phi_{ST} \geq \theta$

Si D désigne la série formelle unité

$$\phi_D(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ +\infty & n \geq 1 \end{cases}$$

alors $\phi_D \geq \theta$, d'où le résultat.

§ 4 - Sous-anneaux locaux henséliens dominés par $\text{Cf}(A)[[X]]$.

Dans ce paragraphe, A désignera un anneau de valuation discrète.

$\text{Cf}(A)$ désignant son corps des fractions et v sa valuation.

A toute série formelle $S \in \text{Cf}(A)[[X]]$ $S = \sum_{n \geq 0} u_n X^n$, on associe la fonction φ_S de \mathbb{N} dans \mathbb{Z}_∞ définie par :

$$\varphi_S(n) = v(u_n).$$

Lemme 4.1 : Soient S une série formelle inversible de $\text{Cf}(A)[[X]]$ et θ une fonction pseudo-concave. Si $\phi_S \geq \theta$ alors :

$$\phi_{S^{-1}}(n) \geq \theta(n) - k\phi_S(0) + n [\theta(0) - \phi_S(0)] \text{ avec } k = 1 \text{ si } \phi_S(0) < 0$$

et $k = 0$ pour $\phi_S(0) \geq 0$.

Soit $S = u_0 + u_1 X + \dots + u_n X^n + \dots$

$$S^{-I} = v_0 + v_I X + \dots + v_n X^n + \dots$$

$$u_0 v_0 = I \quad \text{d'où} \quad \phi_{S^{-I}}(0) = -\phi_S(0)$$

$$\text{et} \quad u_0 v_n = u_I v_{n-I} + \dots + u_n v_0$$

d'où il existe $i \quad 0 \leq i \leq n-I$

$$\phi_{S^{-I}}(n) + \phi_S(0) \geq \phi_S(n-i) + \phi_{S^{-I}}(i)$$

Supposons $\phi_S(0) < 0$.

Montrons par récurrence que

$$\phi_{S^{-I}}(n) \geq \theta(n) - \phi_S(0) + n [\theta(0) - \phi_S(0)]$$

Puisque

$$\phi_{S^{-I}}(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad \theta(0) - \phi_S(0) \leq 0$$

la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons la vérifiée jusqu'à l'ordre $n - I$

$$\phi_{S^{-I}}(n) + \phi_S(0) \geq \theta(n-i) + \theta(i) - \phi_S(0) + i [\theta(0) - \phi_S(0)]$$

$$\phi_{S^{-I}}(n) \geq \theta(n) - \phi_S(0) + [\theta(0) - \phi_S(0)] \quad (i+I)$$

$$\text{d'où} \quad \phi_{S^{-I}}(n) \geq \theta(n) - \phi_S(0) + n [\theta(0) - \phi_S(0)]$$

Puisque le crochet est négatif.

Si $\phi_S(0) \geq 0$, on a :

$$S = u_0 T \quad \text{avec} \quad \phi_T(0) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_T = \phi_S - \phi_S(0)$$

$$\phi_T \geq \theta - \phi_S(0) = \theta_I, \quad \theta_I \text{ est pseudo-concave.}$$

Appliquons le résultat précédent à ϕ_T

$$\phi_{T^{-I}} \geq \theta - \phi_S(0) + n [\theta(0) - \phi_S(0)]$$

$$\text{or} \quad \phi_{S^{-I}} = \phi_{T^{-I}} - \phi_S(0)$$

d'où $\phi_{S^{-1}}(n) \geq \theta(n) - 2\phi_S(0) + n[\theta(0) - \phi_S(0)]$.

Définition 4.2 : Soit θ une fonction pseudo-concave. On notera $H_{\bar{\theta}}$ le sous-ensemble de $\text{Cf}(A)[[X]]$ formé des séries formelles S vérifiant $\bar{\phi}_S \geq \bar{\theta}$.

Théorème 4.3 : Pour toute fonction pseudo-concave θ , $H_{\bar{\theta}}$ vérifie les conditions suivantes :

- 1) $H_{\bar{\theta}}$ est un anneau local dominé par $\text{Cf}(A)[[X]]$
- 2) Si $\bar{\phi} < \bar{\psi}$ alors $H_{\bar{\phi}}$ domine $H_{\bar{\psi}}$
- 3) $H_{\bar{\theta}}$ est hensélien
- 4) $H_{\bar{\theta}}$ est séparé.

Le fait que $H_{\bar{\theta}}$ est un anneau unitaire résulte du paragraphe précédent et que si $S \neq 0$, alors $\phi_{\underline{I}} \geq \phi_S$. On note \underline{I} la série formelle unitée.

D'après le lemme précédent, si $\phi_S(0) \neq 0$, alors S est inversible dans $H_{\bar{\theta}}$, car si $\phi_S \geq 0$, alors $\phi_{S^{-1}} \geq \theta + \varepsilon$ soit $\bar{\phi}_S \geq \bar{\theta}$ implique $\bar{\phi}_{S^{-1}} \geq 0$, ce qui montre le 1).

Si $\bar{\phi} < \bar{\psi}$ alors $H_{\bar{\psi}} \subset H_{\bar{\phi}}$. Désignons par $\underline{m}(\bar{\theta})$ l'idéal maximal de $H_{\bar{\theta}}$. Remarquons que $\underline{m}(\bar{\psi}) \subset \underline{m}(\bar{\phi})$, ce qui montre 2) [2] (Chapitre 6, § I, proposition I).

Remarquons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underline{m}(\bar{\phi})^n = 0$ d'où le 4), mais l'idéal $\underline{m}(\bar{\phi})$ n'est pas principal en général. Pour cela, prenons $\phi(n) = -n^3$ et la série formelle

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-n^3} X^n, \quad S \in \underline{m}(\bar{-n^3}),$$

on peut écrire $S = XT$ avec $T = \sum_{n \geq 0} \pi^{-(n+1)^3} X^n$

$$\phi_T(n) = -n^3 - 3n^2 - 3n - 1 \quad \text{et} \quad \bar{\phi}_T < \bar{\phi}_S$$

Pour montrer 3), considérons un polynôme unitaire f de $H_{\theta}[\bar{Y}]$

$$f(Y) = Y^p + S_{-1}(D) Y^{p-1} + \dots + S_i(X) Y^{p-i} + \dots + S_p(Y)$$

Nous pourrions supposer $\theta(0) \leq 0$ et $S_i(X) = \sum_{k \geq 0} a_{ik} X^k$ $\phi_{S_i} \geq \theta$ sans rien changer à la généralité.

Supposons que $\bar{f}(Y) = Y^p + S_{-1}(0) Y^{p-1} + \dots + S_i(0) Y^{p-i} + \dots + S_p(0)$ admette une racine simple u_0 . Alors d'après le lemme de Hensel [6], il existe une série formelle

$$Y(X) = u_0 + u_1 X + \dots + u_n X^n + \dots$$

appartenant à $Cf(A)[[X]]$ telle que $f(Y(X)) = 0$

Montrons que $Y(X) \in H_{\theta}$, on en déduira alors 3) [4].

Nous suivrons les calculs classiques de la démonstration du lemme de Hensel.

$$\text{Posons } Y_n = u_0 + \dots + u_n X^n$$

$$\text{On a donc } Y_{n+1} = Y_n + u_{n+1} X^{n+1}$$

$f(Y_{n+1}) = f(Y_n) + u_{n+1} X^{n+1} f'(Y_n) + \dots$ d'après la formule de Mac-Laurin.

$$\text{Soit : } f(Y_{n+1}) \equiv f(Y_n) + u_{n+1} X^{n+1} f'(Y_n) \pmod{X^{n+2}}$$

$$\text{or } X^{n+1} f'(Y_n) \equiv X^{n+1} \bar{f}'(u_0) \pmod{X^{n+2}}$$

$$\text{et } f(Y_{n+1}) \equiv 0 \pmod{X^{n+2}}$$

$$\text{finalement } f(Y_n) \equiv -u_{n+1} X^{n+1} \bar{f}'(u_0) \pmod{X^{n+2}}$$

$$\text{d'où } f(Y_n) = X^{n+1} (\alpha_n + \alpha_{n+1} X + \dots)$$

$$\text{avec IV-4-3 } \alpha_n = -u_{n+1} \bar{f}'(u_0)$$

Remarquons que $\bar{f}'(u_0) \neq 0$ car u_0 est racine simple de f .

Lemme 4.4 : On a $v(f'(u_0)) \geq (p-1) \theta(0)$.

En effet $\bar{f}'(u_0) = p u_0^{p-I} + (p-I) S_I(0) u_0^{p-2} + \dots + S_I(0)$

$$\begin{aligned} \text{et } v[(p-i) S_i(0) u_0^{p-i-I}] &= v(S_i(0) + (p-i-I) v(u_0)) \quad \text{avec } I \leq i \leq p-I \\ &\geq \theta(0) + (p-i-I) \theta(0) \end{aligned}$$

Puisque $\theta(0) \leq 0$

$$v(\bar{f}'(u_0)) \geq (p-I) \theta(0) \quad \text{d'où le résultat}$$

Dans la suite, nous poserons $\ell = v(\bar{f}'(u_0))$.

Lemme 4.5 : La valuation du terme constant u_0 vérifie :

$$v(u_0) \geq \theta(0).$$

Posons $\theta(0) = -k$, $k \geq 0$.

En multipliant par π^{pk} , on en déduit (π uniformisante locale).

$$\pi^{pk} u_0^p + \pi^{pk} [S_I(0) u_0^{p-I} + \dots + S_p(0)] = 0$$

$$(\pi^k u_0)^p + \pi^k S_I(0) (\pi^k u_0)^{p-I} + \dots + \pi^{ki} S_i(0) (\pi^k u_0)^{p-i} + \dots + \pi^{pk} S_p(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{or } v[\pi^{ki} S_i(0)] &\geq ki + v(S_i(0)) \quad I \leq i \leq p \\ &\geq ki - k = k(i-I) \geq 0 \end{aligned}$$

Puisque A est intégralement clos et que $\pi^k u_0 \in \text{Cf}(A)$ alors $\pi^k u_0 \in A$

d'où $v(u_0) + k \geq 0$

c'est-à-dire $v(u_0) \geq -k = \theta(0)$ d'où le résultat.

Proposition 4.6 : Le coefficient u_n de X^n dans $Y(X)$ satisfait à :

$$v(u_n) \geq \theta(n) + (2n-I) [(p-I) \theta(0) - \ell] \quad \text{pour } n \geq I.$$

Remarquons que cette intégralité n'est pas vraie pour $n = 0$.

Nous allons montrer le résultat par récurrence sur n .

Cas n = I : D'après IV-4-3, il faut calculer α_0 , c'est-à-dire le coefficient de X dans

$$u_0^p + S_I(X) u_0^{p-I} + \dots + S_i(X) u_0^{p-i} + \dots + S_p(X)$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0 = a_{1I} u_0^{p-I} + a_{2I} u_0^{p-2} + \dots + a_{pI}$$

Il existe i tel que $v(\alpha_0) \geq v(a_{iI} u_0^{p-i})$

$$\geq \theta(I) + (p-I) \theta(0)$$

finalement $v(u_I) \geq \theta(I) + (p-I) \theta(0) - \ell$

Calcul de α_n : Rappelons que α_n est le coefficient de X^{n+I} dans $f(Y_n)$

$$f(Y_n) = (u_0 + u_I X + \dots + u_n X^n)^p + \dots + S_i(X) (u_0 + u_I X + \dots + u_n X^n)^{p-i} + \dots + S_p(X)$$

Nous emploierons la notation des muti-indices en posant

$$|i| = i_I + \dots + i_p.$$

Lemme 4.7 : La valuation du coefficient de X^{n+I} dans $(u_0 + u_I X + \dots + u_n X^n)^p$ est minorée par $\theta(n+I) + (2n+I) [(p-I)\theta(0) - \ell]$.

En effet, le coefficient de X^{n+I} est égal à :

$$\sum_{|i|=n+I} u_{i_I} \dots u_{i_p} \quad 0 \leq i_j \leq n.$$

D'après la remarque suivant la proposition IV-4-6, nous devons isoler u_0 ; chaque terme de la somme s'écrit alors $u_0^k u_{i_I} \dots u_{i_{p-k}}$.

On en déduit, en posant $r = (p-I) \theta(0) - \ell$ ($r \leq 0$) et en remarquant que $0 \leq k \leq n-2$:

$$v(u_0^k u_{i_I} \dots u_{i_{p-k}}) \geq k \theta(0) + \sum_{j=I}^{p-k} [\theta(i_j) + (2i_j - I)r]$$

$$\geq k \theta(0) + \sum_{j=I}^{p-I} \theta(i_j) + (2n+2(p-k)) r$$

Puisque θ est pseudo-concave, et d'après le paragraphe I

$$\begin{aligned} &\geq k \theta(0) + \theta(n+I) + (p-k-I) \theta(0) + [2n+2-(p-k)] r \\ &\geq \theta(n+I) + (p-I) \theta(0) + [2n+I+(k+I-p)] r \end{aligned}$$

soit

$$v(u_0^k u_{i_1} \dots u_{i_{p-k}}) - \ell \geq \theta(n+I) + (2n+I) r + (k+2-p) r$$

Or $r \leq 0$ et $k+2-p \leq 0$.

Donc le second membre est supérieur à $\theta(n+I) + (2n+I) r$.

D'où le résultat (d'après les propriétés élémentaires des valuations).

Lemme 4.8 : La valuation du coefficient de X^{n+I} dans

$$S_k(X) (u_0 + u_1 X + \dots + u_n X^n)^{p-k}$$

est minorée par

$$\theta(n+I) + (2n+I) [(p-I) \theta(0) - \ell] .$$

En effet, le coefficient de X^{n+I} s'écrit

$$\sum_{|i|=n+I} a_{ki} u_{i_1} \dots u_{i_{p-k}} .$$

Comme précédemment, on met u_0 en évidence et chaque terme s'écrit

$$a_{ki} u_{i_1} \dots u_{i_{p-k-n-I}} u_0^m$$

avec $i_1 + i_2 + \dots + i_{p-k-m-I} = n + I$

$$0 \leq i_1 \leq n+I$$

$$I \leq i_j \leq n \quad \text{pour } j \geq 2$$

On en déduit :

$$\text{si } i_1 = 0 \text{ alors } p-k-m-I \geq 3$$

$$\text{si } i_1 \geq I \text{ alors } p-k-m-I \geq 2$$

Posons $\lambda = a_{ki}, u_{i_2} \dots u_{i_{p-k-m-I}} u_0^m$

d'où $v(\lambda) = v(a_{ki_I}) + v(u_{i_2}) + \dots + v(u_{i_{p-k-m-I}}) + m v(u_0)$

et cet entier est supérieur à :

$$\theta(i_1) + \theta(i_2) + (2i_2 - I)r + \dots + \theta(i_{p-k-m-I}) + (2i_{p-k-m-I} - I)r + m\theta(0)$$

et puisque θ est pseudo-concave, ce dernier est plus grand que :

$$\geq \theta(n+I) + (p-k-m-2)\theta(0) + m\theta(0) + 2(n-i_1 + I)r - (p-k-m-2)r$$

$$\geq \theta(n+I) + (p-I)\theta(0) - (k+I)\theta(0) + (2n+I)r - (p-k-m-3+2i_1)r$$

Puisque $\theta(0) \leq 0$

$$v(\lambda) \geq \theta(n+I) + (2n+I)r + (p-I)\theta(0) - (p-k-m-3+2i_1)r$$

finalement

$$v(\lambda) - \ell \geq \theta(n+I) + (2n+I)r - (p-k-m-3+2i_1-I)r$$

Or, le coefficient de r est positif d'après les inégalités vérifiées par les indices (cf ci-dessus).

Finalement, d'après les lemmes précédents et IV-4-3

$$v(u_{n+I}) \geq \theta(n+I) + (2n+I)r$$

Soit $\bar{\phi}_Y \geq \bar{\theta}$ d'où le résultat.

Remarque 4.9 : Le fait que le polynôme est séparable est essentiel. Par exemple, en caractéristique 2 le polynôme en Y

$$Y^2 + I + X^2 \text{ n'est pas séparable.}$$

Les coefficients $S_1(X)$ et $S_2(X)$ vérifient $\phi_{S_i} \geq \theta$

$$\text{avec } \theta(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ +\infty & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases} \quad \text{qui est pseudo-concave}$$

La solution est ici $Y = I + X$

$$\phi_Y(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 0 & n = I \\ +\infty & n \geq 2 \end{cases}$$

Il n'existe pas de fonction linéaire ℓ vérifiant

$$\phi_Y \geq \theta + \ell$$

ce qui impliquerait $\phi_Y(I) = +\infty$.

Cet anneau n'est pas algébriquement fermé dans $\text{Cf}(A)[[X]]$.

Remarque 4.I0 : En particulier, les séries formelles dont la fonction associée est minorée par une fonction linéaire forment un anneau hensélien (il suffit de prendre $\theta = 0$).

Remarque 4.II : Considérons la fonction pseudo-concave θ définie par

$$\begin{aligned} \theta(n) &= +\infty & I \leq n \leq k \\ \theta(n) &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

Alors H_θ est formé des séries formelles minorées par une fonction linéaire, dont les coefficients u_n sont nuls pour $I \leq n \leq k$. Cet anneau est hensélien.

Remarque 4.I2 : On a vu précédemment que si $S \in A[[X]]_{(X)}$, alors ϕ_S est minorée par une fonction linéaire, d'où $A[[X]]_{(X)} \subset H_\theta$, et en particulier l'hensélisé $(A[[X]]_{(X)})^h$ de $A[[X]]_{(X)}$ est inclus dans H_θ $(A[[X]]_{(X)})^h \subset H_\theta$.

Définition 4.I3 : On dit qu'une fonction pseudo-concave ϕ est stable par translations, si la fonction ψ définie par $\psi(n) = \phi(n+I)$ vérifie

$$\bar{\psi} \geq \bar{\phi}$$

On montre facilement par récurrence que $\psi_k(n) = \phi(n+k)$ vérifie

$$\overline{\psi}_k \geq \overline{\phi}$$

Remarque 4.I4 : Il est clair que seules les fonctions pseudo-concaves finies peuvent être stables par translations.

Exemples : La fonction nulle (donc les affines)

Les fonctions $n \mapsto -an^2$ (a entier, $a < 0$) sont des fonctions pseudo-concaves stables par translations.

Proposition 4.I5 : Soit θ une fonction pseudo-concave stable par translations, alors $H_{\overline{\theta}}$ vérifie les conditions suivantes :

1) $H_{\overline{\theta}}$ est un anneau de valuation discrète. C'est l'anneau de la valuation induite sur son corps des fractions par la valuation (X) -adique.

2) Son complété est égal à $Cf(A)[[X]]$.

Nous avons vu que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (m(\overline{\theta}))^n = \{0\}$; il reste à montrer que l'idéal maximal est principal.

$$\text{Soit } S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n X^n \in m(\overline{\theta}), \text{ alors } S = XT$$

$$\text{avec } T = \sum_{n \in \mathbb{N}} r_n X^n \text{ et } r_n = u_{n+1}$$

$$\phi_T(n) = \phi_S(n+1) \text{ d'où le résultat}$$

donc $H_{\overline{\theta}}$ est un anneau de valuation discrète [2]. La valuation d'une série formelle étant son ordre. Pour montrer le 2), remarquons que

$$Cf(A)[X]_{(X)} = A[[X]]_{(X)} \subset H_{\overline{\theta}} \subset Cf(A)[[X]].$$

Puisque la fonction valuation d'une série formelle de $A[[X]]_{(X)}$ est minorée par une fonction affine et que $\overline{\theta} \leq \overline{0}$ car $\theta(n) < +\infty$.

De plus, soit \underline{m} l'idéal maximal de $A[\bar{X}]_{(X)}$ qui est égal à (X) , il est clair que $\underline{m}(\bar{\theta}) = \underline{m} H_{\bar{\theta}}$ d'où le résultat ([I] § 3 n° 5, proposition II) puisque H est local noethérien et que le complété de $A[\bar{X}]_{(X)}$ est $Cf(A)[[\bar{X}]]$.

Soit $\Phi = (\bar{\phi}_i)_{i \in I}$ un ensemble de classes de fonctions pseudo-concaves, ordonné par l'ordre induit, et filtrant à gauche, les injections canoniques étant des morphismes locaux. Dans ces conditions, la limite inductive des $H_{\bar{\phi}_i}$ existe.

Lemme 4.I6 : Posons $H_{\Phi} = \varinjlim (H_{\bar{\phi}_i})$, alors

- 1) H est un anneau local hensélien
- 2) Pour tout $i \in I$; H_{Φ} domine $H_{\bar{\phi}_i}$.

Cela résulte du fait qu'une limite inductive d'anneaux locaux henséliens est hensélien (les morphismes de transitions étant locaux) ([3]

), et que les morphismes de $H_{\bar{\phi}_i}$ dans H_{Φ} sont locaux.

(Ici H_{Φ} domine $H_{\bar{\phi}_i}$).

Remarque 4.I7 : Soit ϕ une fonction pseudo-concave finie : la fonction ψ définie par $\psi(n) = \phi(n+I)$ n'est pas pseudo-concave en général. Lorsque ϕ est concave, alors ψ est concave, donc pseudo-concave.

Soit donc ϕ une fonction concave et posons

$$\psi_k(n) = \phi(n+k) \quad k \in \mathbb{N}$$

on en déduit pour tout n

$$\psi_k(n) \leq \phi(n) + \phi(k) - \phi(0)$$

et si $k \geq h$, alors pour tout n , on a :

$$\psi_k(n) = \phi(n+k) = \phi(n+k-h+h)$$

$$\leq \phi(n+h) + \phi(k-h) - \phi(0)$$

d'où

$$\bar{\psi}_k \leq \bar{\psi}_h$$

Prenons $\phi = (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Proposition 4.I8 : Alors dans ces conditions, l'anneau hensélien H_ϕ est un anneau de valuation discrète.

Puisque l'idéal maximal de H_ϕ est formé des séries formelles nulles à l'origine. Il nous reste à vérifier que cet idéal maximal est principal.

Soit $S(X) = XT(X) \in H_\phi$, alors il existe ψ_i telle que $XT(X) \in H_{\psi_i}$, soit $T(X) \in H_{\psi_{i+1}}$. Donc $T(X) \in H_\psi$, d'où le résultat.

Exemples :

1) Prenons $\phi(n) = -an^k$ a entier > 0

$$S \quad H_\phi \iff \bar{\phi}_S \geq -a\bar{P}_k \text{ où } P_k \text{ est un polynôme unitaire de degré } k.$$

2) Soit a un entier ≥ 2 , et prenons $\phi(n) = -a^{-n}$

$$S \quad H_\phi \iff k : \bar{\phi}_S \geq -\overline{a^k}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI Algèbre commutative Ch. III Localisation Hermann
- [2] N. BOURBAKI Algèbre commutative Ch. VI Valuations Hermann
- [3] J. DIEUDONNE et A. GROTHENDIECK Eléments de Géométrie Algébrique
Public. de l'I.H.E.S. n°32.
- [4] M. RAYNAUD Anneaux locaux henséliens Lectures Notes n°169
Springer-Verlag.
- [5] R. RIVET Thèses Université de Rennes 1971.
- [6] O. ZARISKI P. SAMUEL Commutative Algebra T.2, Van Nostrand Princeton N.J.

Colloque d'ALGÈBRE de RENNES (FRANCE)
du 19 au 22 Janvier 1972

Exposé n° 2 R. RIVET
Maître de Conférences
de Mathématiques

Institut National des Sciences Appliquées
CEDEX 35 031 RENNES