J. GUERINDON

Séries restreintes sur un anneau principal

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. nº 6, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A6_0>

SERIES RESTREINTES SUR UN ANNEAU PRINCIPAL

J. GUERINDON

On va donner des résultats sur les séries restreintes sur un anneau A, lorsque la topologie linéaire donnée τ n'est pas nécessairement métrisable. On considèrera notamment les topologie artiniennes sur A (cf. Ballet [3] et Salmon [I]) et la topologie finie qui sera mise en relation avec les G-idéaux (au sens de Kaplansky) et avec les topologies artiniennes (cf. § I).

On obtient notamment un théorème d'adhérence pour les séries restreintes (2,5), un théorème de plongement pour les diviseurs (2,6). On précise le cas des anneaux réguliers (2,I) et des anneaux principaux(§ 3). On donne enfin des conjectures sur les diviseurs.

§ I - On va d'abord caractériser la topologie linéaire $\mathcal{C}$ sur un anneau noethérien donné A qui est la restriction à A de la topologie artinienne sur $A[X]$. Posons la

Définition. On appelle topologie "finie" sur un anneau quelconque B, la topologie linéaire dont un système fondamental de voisinages de 0 sur B est constitué par tous les idéaux U_α tels que B/U_α ait un spectre premier fini (on vérifie facilement les axiomes des voisinages). On a le

Théorème I. Si A est noethérien, la topologie artinienne sur $A[X]$ induit la topologie finie sur A.

On utilisera divers lemmes :

Lemme I. (Artin Tate). Soit R un anneau intègre noethérien, il y a équivalence entre les propriétés

a) R est semi-local de dim 0 ou I

b) R possède un nombre fini d'idéaux premiers.

(cf. par exemple, les E.C.A., chapitre 4 ou Kaplansky, Commutative rings). Les idéaux P d'un anneau noethérien A tels que R = A/P satisfasse aux conditions a) et b) du lemme I sont les "G-idéaux" étudiés par ailleurs (loc. citato et [2]). On établira facilement que les G-idéaux de A sont les restrictions des idéaux maximaux de $A[X]$.

Lemme 2. Si C est un anneau noethérien. Il existe une suite décroissante $\{D_n\}$ d'idéaux telle que C/D_n soit artinien pour tout n et $\bigcap_n D_n = (0)$. Si C n'est pas artinien, il existe une telle suite strictement décroissante.

Soit $(0) = q_I \cap \dots \cap q_r$ une décomposition primaire de (0) et $M_I, \dots, M_r$ maximaux tels que $q_i \subseteq M_i$ pour tout $i = I, 2, \dots, r$.

Soit $R = M_I \dots M_r$. On a $\bigcap_n R^n = (0)$ car $\bigcap_n M_i^n$ est intersection des q_j contenus en M_i. Si $R_n = 0$ pour un n, on a C artinien. c.q.f.d.

<u>Lemme 3</u>. <u>Soit $f : A \hookrightarrow B$ un homomorphisme f(injectif) d'anneaux tel que B soit noethérien et A fidèlement plat. Soit τ_B la topologie artinienne sur B et</u> $\mathcal{C} = f^{-I}(\tau_A)$. <u>Alors on a</u> $\mathcal{C} \leq \tau_A$ (inégalité en général).

On sait que A est noethérien et f est injectif. Soit M un idéal maximal arbitraire de A. Par fidèle platitude, il existe μ idéal maximal de B tel que $\mu \cap A = M$ et pour tout α on a $\mu^\alpha \cap A \supset M^\alpha$.
Soit J un idéal de A tel que A/J soit artinien et soit $\mathcal{F}$ la famille des V de B tels que $V_\lambda \cap A = J$. On a $J B \cap A = J$ et $\mathcal{F}$ est non vide. Si on voit que B/V_o est artinien, on aura bien $\mathcal{C} < \tau_A$. <u>Si</u> B/V_o <u>n'était pas artinien</u>, on aurait, d'après le lemme précédent une suite strictement décroissante L_n telle que

$$B \supset L_I \supset \dots \supset L_n \supset L_{n+I} \supset \dots \supset V_o$$

avec $\cap L_n = V_o$ et les B/L_n artiniens Or on a $L_n \cap A \supsetneqq J$.
Or A/J est artinien et donc pour $n > N$, $L_n \cap A = L_N \cap A = J_I$.
Alors $J_I = A \cap V_o = J$, $L_N \cap A = J$ d'où une contradiction.

<u>Remarque</u>. A est linéairement compact pour la topologie finie, si et seulement si A est semi-local complet.

<u>Lemme 4</u>. <u>Si A et B sont locaux noethériens et si B est fidèlement plat sur A, alors</u> τ_A <u>et</u> $f^{-I}(\tau_B)$ <u>coïncident</u>.

En effet B domine A et $\mu = \text{rad}_j B \supseteq M = \text{rad}_j A$. Donc $(\mu^\alpha \cap A) \supseteq M^\alpha$ pour tout α. Or $\mathcal{C} < \tau_A$ (lemme 3), donc $\mathcal{C} = \tau_A$.

<u>Lemme 5. Soit $f : A \hookrightarrow B$ avec B noethérien et A fidèlement plat. Alors pour tout idéal maximal M de A, il existe un idéal maximal μ de B tel que B_μ domine A_M, et que la topologie naturelle sur A_M soit induite par la topologie naturelle sur B_μ dans l'homomorphisme induit φ par f de A_M en B_μ.</u>

En effet, A est noethérien et B_μ est A_M-fidèlement plat. Alors φ est injective. B_μ et A_M sont noethérien et le lemme 4 conduit au résultat.

<u>Démonstration du théorème I</u> : Soit en effet $\{\mu_j\}$ $(j \in J)$ le spectre maximal de B, $\{P_j\}$ l'ensemble des G-idéaux. $P_j = \mu_j \cap A$ de A (cf. Kaplansky, Commutative rings), et soit $\mathcal{C}'$ la topologie définie sur A par les intersections finies d'idéaux qui sont puissances de G-idéaux. Pour tout n, on a $\mu_j^n \cap A \supset P_j^n$ et donc $\mathcal{C} > \mathcal{C}'$. Or B est noethérien et A fidèlement plat, l'homomorphisme $\varphi_j : A_{P_j} \hookrightarrow B_{\mu_j}$ est fidèlement plat.
D'après le lemme 5, la topologie naturelle (artinienne) sur A_{P_j} est induite par celle de B_{μ_j} et P_j^n est restriction d'un idéal μ_j-primaire de A et donc $\mathcal{C}' > \mathcal{C}$ et donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Enfin le lemme I montre que $\mathcal{C}'$ est la topologie finie, d'où le théorème.

§ 2 - <u>Séries restreintes.</u>

Soit τ une topologie linéaire sur A et $A_\tau[[X]] = A\{X\}$ le sous-anneau de $A[[X]]$ formé des $\varphi = \Sigma\, a_n X^n$ telles que $a_n \longrightarrow 0$ selon τ.
Ce sont les séries restreintes (cf. [I]). P. Salmon a établi que si V_j est un voisinage arbitraire de 0 pour τ, si W_j est l'idéal de $A[X]$ formé des polynômes en X, à coefficients en V_j, et si σ' est la topologie qui est définie sur $A[X]$ par les W_j, alors $A\{X\}$ est le complété de $A[X]$ pour σ'.

On étudiera <u>deux cas</u>. Le cas α) sera celui où τ est une topologie artinienne (cf [3]) ; le cas β) sera celui où τ est la "topologie finie" sur A.

<u>Cas α</u> : τ est la topologie artinienne sur A supposé noethérien. Le cas où A est semi-local a été étudié par Salmon (cf [I]).

Considérons maintenant le cas où A est noethérien <u>régulier</u>, c'est-à-dire que pour tout idéal maximal M_i ($i \in I$) A_{M_i} est local régulier. On posera $\Delta_i = A_{M_i}\{X\}$ (séries restreintes sur A_{M_i}) et <u>on prendra sur A la topologie artinienne T</u>.

<u>Théorème 2.I.</u> <u>Si A est noethérien et intègre, on a</u> $A\{X\} = \bigcap_i \Delta_i$, <u>et si A est régulier alors $A\{X\}$ est complètement intégralement clos</u>.

En effet, on a $A\{X\} \subseteq \bigcap_i \Delta_i$. Réciproquement, si $f \in \bigcap \Delta_i$ les coefficients de f en $K[[X]]$ (K = fract A) sont en $\bigcap_i A_{M_i} = A_i$. De plus, si $W = M_I^{\alpha_I} \ldots . M_p^{\alpha_p}$ est un voisinage pour T en A, on a $W = A \cap M_I^{\alpha_I} A_{M_I} \cap \ldots$ et donc presque tous les a_n sont en W et f est restreinte, et donc $f \in A\{X\}$ pour T. Comme chaque $A_{M_i}\{X\}$ est noethérien régulier d'après le théorème suivant, il sera c. i. clos et donc aussi A. c.q.f.d. Reste à voir le

<u>Théorème 2.2.</u> <u>Si A est noethérien semi-local régulier alors, pour la topologie artinienne, $A\{X\}$ est noethérien régulier</u>.

En effet, $A\{X\}$ est noethérien comme complété de $A[X]$ pour la topologie $R\,A[X]$-adique, R étant le radical de Jacobson de A (Salmon, [I], corollaire de la proposition I). Comme A est régulier, $A[X]$ est régulier et donc la complétion est un anneau régulier (cf. Gréco-Salmon, théorème 8,3, chapitre 8, p. 36). Pour le cas où A est local, on peut aussir voir Salmon (cf [I], théorème I, p. 392).

<u>Théorème 2.3</u>. <u>Si A est semi-local noethérien et si on désigne A{X} par B et A[[X]] par C alors, B est A-plat et C est B plat (non fidèlement).</u>

En effet, soit $V = XB$, $W = XC$ et soit φ et ψ les injections canoniques. La topologie sur A est toujours <u>artinienne</u>.

$$A[X] \xhookrightarrow{\varphi} A\{X\} \xhookrightarrow{\psi} A[[X]].$$

Si on munit B et C de leurs topologies (X)-adiques alors, $W^p \cap B = V^p$, et comme C est complet et $A[X]$ partout dense en C (qui est sa complétion RX-adique si $R = \mathrm{rad}_j\, A$), A{X} est partout dense en C et V est le complété XB-adique de B qui est noethérien. Donc C est B-plat. De même, B est $A[X]$-plat car $A[X]$ est noethérien. Enfin, comme I-X est inversible en $A[[X]]$ est non en A{X} (l'inverse $I+X+X^2+\ldots$ n'est pas restreinte), alors il n'y a pas fidèle platitude et B et C ne sont pas des anneaux de Zariski.

P. Salmon (cf [I]) a établi que si A est local noethérien régulier, alors A{X} (pour la topologie naturelle) est <u>factoriel</u>. Plus généralement, Arezzo et Gréco ont établi que si A est régulier factoriel et si le groupe de Picard de $A/m\,[X_I,\ldots,X_n]$ est nul alors A{X} est factoriel, les séries restreintes étant prises pour la topologie m-adique.

<u>cas β</u> : Si A est noethérien quelconque et si τ est la <u>topologie finie</u>, cette dernière n'est pas métrisable dès que $\mathrm{Spec}_m A$ n'est pas dénombrable.
On appellera $\varphi \in A\{X\}$ un <u>quasi-polynôme</u> sur A. Pour étudier l'adhérence d'un idéal I de $A[X]$ en A{X}, on utilisera un

<u>Lemme "d'injectivité"</u> : Si sur le groupe abélien additif G on définit les topologies T, par des G_λ ($\lambda \in L$) et T' par les G'_μ ($\mu \in M$) en sorte que chaque G_λ soit un G'_μ et chaque G'_μ soit une intersection de $G_{\lambda(\gamma)}$ ($\gamma \in P$, $\lambda(\gamma) \in L$), alors on a une <u>injection</u> canonique

$$\varprojlim (G/G'_\mu) \longrightarrow \varprojlim (G/G_\lambda)$$

(cf. par exemple Bourbaki, Topologie générale, 3^e éd., III, chapitre 3 § 7 n° 3, corollaire 2).

Théorème 2.4. Si A est noethérien et B = A[X], on a $\sigma' \preccurlyeq \tau_B$ et une injection canonique continue $\varphi : A\{X\} \longrightarrow \hat{B}$, si $\hat{B}$ est le séparé-complété de B pour la topologie artinienne et A{X} l'ensemble des séries restreintes pour la topologie finie.

En effet, pour tout voisinage V_j de (0) de la topologie finie sur A, il existe des G-idéaux $P_I,\dots,P_\ell$ et $\mu_I,\dots,\mu_\ell$ maximaux en B tels que $\mu_i \cap A = P_i$ (tout i) et $V_j \supseteq P_I^{\alpha_I} \cap \dots \cap P_\ell^{\alpha_\ell}$. Les $P_j^{\alpha_j}$ engendrent la topologie $\mathcal{T}$. On a donc pour tout entier k et l'idéal W'_j des polynômes à coefficients en

$$V'_j = P_I^{\alpha_I} \cap \dots \cap P_\ell^{\alpha_\ell} \quad : \quad X^k W'_j \subseteq \mu_I^{\alpha_I} \cap \dots \cap \mu_\ell^{\alpha_\ell}$$

Donc $\mu_I^{\alpha_I} \cap \dots \cap \mu_\ell^{\alpha_\ell}$ est un voisinage 0 pour σ' et on a alors $\sigma' \leq \tau_B$. L'existence de φ résulte alors du "lemme d'injectivité" car tout idéal de B est fermé par τ_B (A est noethérien), en particulier ceux qui définissent σ'.

Lemme. $\hat{B}$ est fidèlement plat sur B = A[X] si A est noethérien.

En effet, B étant noethérien et $\hat{B}$ étant le produit des B_{M_i} ($M_i \in \mathrm{spec}_m B$), chaque $\hat{B}_{M_i}$ est B-plat donc $\hat{B}$ aussi car B est noethérien, comme A. On en déduit le "Théorème d'adhérence" :

Théorème 2.5. Si I est un idéal de A[X], on a I A{X} ∩ A[X] = I. L'application canonique du spectre premier de A{X} sur celui de A[X] est surjective.

En effet, on a par fidèle platitude $I\hat{B} \cap B = I$ donc $I\,A\{X\} \cap A[X] = I$ par application du théorème (2.4). D'autre part, on voit que si P est un idéal de $A[X]$, il existe Π premier de B qui est au-dessus de P. Alors $P' = \Pi \cap A\{X\}$ est au-dessus de P.

Corollaire. Tout idéal de $A[X]$ est fermé pour la topologie σ'.

En effet, on a $\sigma' \leqslant \tau_B$ et tout idéal de $A[X]$ est fermé pour la topologie artinienne, A étant noethérien.
Dans la suite de ce paragraphe, on notera $A[X\}$ les séries restreintes en X pour la topologie finie sur A.

Application aux diviseurs. Soient A noethérien et I un idéal entier de $A[X]$ et $I\,A[X\}$ son extension aux quasi-polynômes. On se propose de comparer les classes de diviseurs de $A[X]$ et $A[X\}$.
Si I et J sont entiers pour $A[X]$ alors on a le :

Lemme. Si $I\,A[X\}$ et $J\,A[X\}$ sont équivalents pour l'équivalence d'Artin en $A[X\}$ alors I et J sont équivalents pour l'équivalence d'Artin en $A[X]$.

En effet, pour tous $u,v \in A[X]$, $u\,I \subseteq v\,A[X]$ entraîne $u\,I\,A[X\} \subseteq v\,A\{X\}$, donc $u\,J\,A\{X\} \subseteq v\,A\{X\}$. Or on a, d'après le théorème d'adhérence (2.4) $u\,J\,A\{X\} \cap A[X] = u\,J\,A[X]$ et $v\,A[X\} \cap A[X] = v\,A[X]$.
On a donc $u\,J \subseteq v\,A[X]$ et donc I et J sont équivalents pour $A[X]$; d'où d'où le lemme.

Soit alors Γ le monoïde multiplicatif des diviseurs de $A[X]$, Γ' celui des diviseurs de $A[X\}$. Si A est un anneau de Krull, $A[X]$ est un anneau de Krull et Γ est un groupe. Γ est engendré multiplicativement par les classes $\overline{P_\lambda}$ des idéaux premiers P_λ de hauteur I de $A[X]$ et tout $d \in \Gamma$ est un produit fini unique $\prod_i \overline{P}_i^{\alpha_i}$ $(\alpha_i \in \mathbb{Z})$.

Posons $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ par $\varphi(\overline{P_i})$ = classe de $P_i A[X\}$ pour $A[X\}$.
On a $\varphi(P_i) \in \Gamma'$. On pose $\varphi(d) = \prod_i \varphi(\overline{P_i})^{\alpha_i}$. Alors φ est un homomorphisme de groupe.

Si on a $\prod_j P_j^{\beta_j} A[X\}$ équivalent à $\prod_j P_j^{\beta'_j} A[X\}$ pour des β_j et s'_j positifs et presque tous nuls, alors le lemme montre que l'on a $\prod_j P_j^{\beta_j}$ équivalent à $\prod_j P_j^{\beta'_j}$ en $A[X]$ et donc $\beta_j = \beta'_j$ pour tout j.
Comme conséquence, si $d \in \Gamma$ est tel que $\varphi(d) = e'$ élément neutre de Γ' alors d est l'élément neutre de Γ. D'où le

Théorème 2.6. Si A est un anneau noethérien intègre et intégralement clos, alors $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ est un homomorphisme injectif de monoïdes multiplicatifs.

En effet, A étant noethérien, le lemme s'applique et comme A est anneau de Krull, le théorème est établi.

Supposons maintenant A régulier. On pose alors la :

Conjecture. Si A est noethérien régulier et de dimension finie, alors φ est surjective, c'est-à-dire on a un isomorphisme $\Gamma \approx \Gamma'$.

Problème. Si A est noethérien intègre et intégralement clos, étudier le monoïde quotient $\Delta(A) = \Gamma'/\varphi(\Gamma)$.

§ 3 - Cas des anneaux principaux.

Soit A un anneau (intègre) principal et munissons le de la topologie artinienne τ_A. Soit $A\{X\}$ l'anneau correspondant des séries restreintes.
Soit $X = \mathrm{spec}_m A$.

Si X est fini, A est semi local , la structure de $A\{X\}$ est donnée au moyen du théorème (2.I) : $A\{X\}$ est noethérien et régulier.

Si X est infini, A est un anneau de Jacobson et la topologie finie coïncide avec la topologie artinienne. On applique les théorèmes (2.3) et (2.4). On remarque en outre que si X est non dénombrable, toute série restreinte est un polynôme. Par contre en Z par exemple, la série

$$\sum_n (P_I)^n (P_2)^{n-I} \ldots\ldots (P_n) X^n,$$

où P_n est le nième nombre premier, est une série restreinte.

Munissons maintenant A de la topologie finie. On a le

Théorème 3.I. Si A est principal, l'anneau $A[X\}$ des quasi-polynômes est complètement intégralement clos, et on a une injection du groupe des diviseurs Γ de $A[X]$ dans celui du groupe des diviseurs de $A[X\}$.

En effet, si X est fini, la topologie finie sur A est discrète et on a $A[X] = A[X\}$. Si X est infini, on a $\mathcal{C} = \tau_A$ et on applique le théorème (2.6).

Problème : Quand φ est-elle surjective ?

BIBLIOGRAPHIE

[I] P. SALMON Sur les séries formelles restreintes
Bull. Soc. Math. Fr. t 92, I964 p. 385-4IO.

[2] J. GUERINDON Topologies linéaires sur les anneaux de polynômes
Bull. Sc. Math. 2^{e} série, 95, I97I, p. 24I à 259.

[3] BALLET Thèse et exposé au présent colloque.

[4] GRECO et SALMON Topics on m-adic topologies Ergebnisse ... I970.

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° 6 J. GUERINDON
Dpt Mathématiques I^{er} cycle
BP 25 A
35 - RENNES