M. CHABERT

Anneaux de Fatou

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 8, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A8_0>

ANNEAUX DE FATOU

M. CHABERT

Définition (Benzaghou [I]). Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit de Fatou, lorsque les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

i) Pour toute fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ de $K(X)$, normalisée par les conditions (a) P et Q sont étrangers entre eux,

(b) $\deg P < \deg Q$,

(c) $Q(o) = I$,

si les coefficients de son développement en série à l'origine sont dans A, alors les coefficients de $Q(X)$ sont eux aussi dans A.

ii) Si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifient une relation de récurrence du type :

$$a_{n+s} + q_I a_{n+s-I} + \ldots + q_s a_n = 0$$

où les coefficients q_k appartiennent à K, et où l'ordre s de la récurrence est le plus petit possible, alors les q_k sont eux-mêmes dans A.

Avec cette dénomination, l'anneau Z est de Fatou (Fatou [6]), tout anneau d'entiers d'un corps de nombre est de Fatou (Pisot [7]), tout anneau factoriel est de Fatou (Dress [5]) et, ce qui redonne tous les cas précédents, un anneau intègre qui est intersection d'anneaux de valuation de hauteur I est de Fatou (Benzaghou [I]).

On sait en outre qu'un anneau de Fatou est complètement intégralement cols [I] (si $x \in K$, $d \in A-\{o\}$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $dx^n \in A$, la définition (i) appliquée à la fraction $\frac{d}{I-xX}$ montre que $x \in A$).

La classe des anneaux de Fatou est distincte de la classe des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur I [4].

La propriété pour un anneau d'être de Fatou, passe à la clôture intégrale [I] et aux anneaux de polynômes [3], mais ne passe pas aux localisés [4]. Mais finalement :

<u>Proposition</u>. <u>Un anneau est de Fatou si, et seulement si, il est complètement intégralement clos</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit A un anneau complètement intégralement clos de corps des fractions K, et soit $P(X)/Q(X)$ une fraction rationnelle normalisée de $K(X)$, dont le développement en série à l'origine $\sum_{n=o}^{\infty} a_n X^n$ est à coefficients dans A. Il s'agit de montrer que $Q(X)$ appartient à $A[X]$.
Soient L un corps de décomposition de $Q(X)$, B la fermeture intégrale de A dans L et $\frac{I}{\alpha_i} \in L$ les racines de $Q(X)$. Comme $Q(X)$ est égal au produit $\prod_i (I-\alpha_i X)$, il suffit de montrer que les α_i appartiennent à B.
Soit $\frac{I}{\alpha}$ l'une quelconque de ces racines. Posons $Q(X) = (I-\alpha X).R(X)$, et considérons le développement en série $\sum k_n X^n$ de la fraction rationnelle

$$P(X)/(I-\alpha X) = R(X).(P(X)/Q(X)).$$

Les b_n vérifient la relation de récurrence :

$$b_{n+I} = \alpha\, b_n \quad (n \geqslant q = \deg Q > \deg P)$$

et donc

$$b_{q+n} = \alpha^n\, b_q \quad (n \geqslant o).$$

En outre, b_q ne peut être nul sinon tous les b_{q+n} seraient nuls, $P(X)/(I-\alpha X)$ serait un polynôme et $\frac{I}{\alpha}$ serait racine de $P(X)$. D'autre part, l'égalité $(\sum a_m X^m).R(X) = \sum b_n X^n$ montre que, pour $n > o$, b_{q+n} est combinaison linéaire des a_m à coefficients ceux de $R(X)$.
Soit $c \in B - \{o\}$ tel que $CR(X)$ appartienne à $B[X]$; alors les Cb_{q+n} sont combinaisons des a_m (dans A) et des coefficients de $CR(X)$ (dans B).
Ainsi, pour $n \geqslant o$, cb_{q+n}, c'est-à-dire $cb_q\, \alpha^n$, appartient à B. Mais B étant la fermeture intégrale d'un anneau complètement intégralement clos l'est aussi ([2] V, § I, exercice I4) et $\alpha \in B$.

- BIBLIOGRAPHIE -

[I] B. BENZAGHOU Algèbres de Hadamard, Bull. Soc. Math. France, t. 98, I970, p. 209-252 (Thèse Sc. Math. Paris, I969).

[2] N. BOURBAKI Algèbre commutative - Paris, Hermann.

[3] P.J. CAHEN Transfert de la propriété de Fatou aux anneaux de polynômes, Bull. Sc. Math., 2e série, t. 94, I970, p. 8I-83.

[4] J.L. CHABERT Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou, Bull. Soc. Math. France, t. 99, I97I, p. 273-283.

[5] Fr. DRESS Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. I, I968, p. I-44 (Thèse Sc. Math. Paris, I967).

[6] P. FATOU Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta. Math., Uppsala, t. 30, I906, p. 335-400 (Thèse Sc. Math. Paris, I907).

[7] Ch. PISOT La répartition modulo I et les nombres algébriques, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, série 2, t. 7, I938, p. 205-248 (Thèse Sc. Math. Paris, I938).

ANNEAUX DE POLYNOMES A VALEURS ENTIERES

I. Introduction.

Etant donné un anneau intègre A de corps des fractions K, nous appelons anneau de polynômes à valeurs entières sur A, et nous noterons B l'anneau des polynômes de $K[X]$ qui, pour tout élément de A, sont à valeurs dans A ; autrement dit

$$B = \{Q(X) \in K[X] \mid Q(A) \subset A\}.$$

Polya [8] et Ostrowski [7] ont étudié cet anneau B dans le cas où A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres.

Certaines propriétés de A se transfèrent à B ; ainsi :

I.I. Si A est intégralement clos, alors B aussi [4].

I.2. Si A est complètement intégralement clos, alors B aussi.

On peut se demander ce qu'il en est lorsque A est intersection d'anneaux de valuation de hauteur I. Or :

I.3. Proposition [4]. Si A est un anneau de valuation, pour que B soit égal à $A[X]$, il faut et il suffit que le corps résiduel de A soit infini ou bien que l'idéal maximal de A ne soit pas principal.

I.4. Notations. Jusqu'à nouvel ordre, nous supposerons que A est l'anneau d'une valuation v de hauteur I, discrète (d'uniformisante Π) et de corps résiduel de cardinal fini n $[(a_0, a_I, \ldots, a_{n-I})$ système de représentants dans A de $A/\Pi A]$. Soient $\hat{K}$ et $\hat{A}$ les complétés de K et A et $\hat{v}$ le prolongement de v.

2. Le A-module B.

Prolongeons la suite $(a_0, a_I, \ldots, a_{n-I})$ en définissant a_r, pour tout $r \in N$, de la façon suivante : si r s'écrit $r_k \ldots r_I\, r_0$ en base n, on pose :

2.I. $$a_r = a_{r_k}\,\Pi^k + \dots + a_{r_I}\,\Pi + a_{r_o}.$$

Posons aussi :

2.2. $$Q_m(X) = \Pi^{-u(m)} \prod_{o \leq r < m} (X - a_r) \qquad (m \in \mathbb{N})$$

où $u(m) = \sum_{s=o}^{\infty} \left[\frac{m}{n^s}\right]$. Pour $m = o$, $Q_o(X) = I$.

2.3. <u>Lemme</u>. <u>Pour tout entier m,</u> $Q_m(a_m)$ <u>est inversible dans A.</u>

On remarque que, quels que soient les entiers k et t, les éléments a_r, pour $kn^t \leqslant r < (k+I)\,n^t$, forment un système de représentants de A modulo Π^t, et, on regroupe les termes du produit $\Pi\,(X-a_r)$ qui ont même valuation.

2.4. <u>Proposition</u>. <u>(Polya)</u>. <u>Le A-module B est libre et admet pour base la famille des polynômes</u> $Q_m(X)$.

Tout polynôme P(X) de $K[X]$ peut s'écrire $P(X) = \sum_{m=o}^{\deg P} p_m\,Q_m(X)$ où $p_m \in K$. Si $P(X) \in B$, alors $p(a_o), p(a_I), \dots, p(a_{\deg P}) \in A$ et, par 2.3, $p_m \in A$. Notons en passant :

2.5 Pour qu'un polynôme P(X) de $K[X]$ appartienne à B, il faut et il suffit que $P(a_o), P(a_I), \dots, P(a_{\deg P})$ appartienne à A.

3. <u>Les idéaux premiers de B</u>.

3.I. <u>Proposition [5]</u>. <u>Les idéaux premiers non nuls de B sont de l'une des deux formes</u> :

(i) $\mathfrak{P}_P = \{Q(X) \in B \mid Q = P.R \text{ où } R \in K[X]\}$

<u>où P est un polynôme non constant et irréductible de</u> $K[X]$

(ii) $\mathfrak{I}_x = \{Q(X) \in B \mid Q(x) \in \Pi\,\hat{A}\}$

<u>où x est un élément de</u> $\hat{A}$.

Démonstration. Comme le localisé de B en A - {o} est égal à $K[X]$, un idéal premier non nul de B au-dessus de (o) dans A est de la forme (i).
Soit donc $\mathcal{P}$ un idéal premier de B au-dessus de A. L'idéal $\mathcal{P}$ est maximal et $B/\mathcal{P}$ isomorphe à $A/\Pi A$; car, pour tout $R(X) \in B$, $\prod_{o \leq i \leq n} (R(X)-a_i) \in \Pi B \subset \mathcal{P}$ et il existe i tel que $R(X) - a_i \in \mathcal{P}$.
[L'idée de la démonstration qui suit est due à Cahen [3] ; nous en donnons une version simplifiée].

Soit $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$ l'anneau des fonctions continues de $\hat{A}$ dans $\hat{A}$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On a un isomorphisme canonique de $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})/\Pi\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$ sur $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A}/\Pi\hat{A})$ où le corps fini $\hat{A}/\Pi\hat{A}$ est muni de la topologie quotient qui est discrète.
Ainsi $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A}/\Pi\hat{A})$ est l'anneau des fonctions localement constantes du compact totalement discontinu $\hat{A}$ dans le corps $\hat{A}/\Pi\hat{A}$. On sait alors ([I], II, § 4, exercice I7) qu'il y a une bijection entre A et le spectre de l'anneau absolument plat $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A}/\Pi\hat{A})$ donnée par :

$$x \in \hat{A} \longmapsto \{f \in \mathcal{C}(\hat{A},\hat{A}/\Pi\hat{A}) \mid f(x) = o\}.$$

D'où :

3.2. Les idéaux premiers de $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$ au-dessus de ΠA sont les idéaux de la forme $\mathfrak{M}_x = \{f \in \mathcal{C}(\hat{A},\hat{A}) \mid f(x) \in \Pi\hat{A}\}$ où x appartient à $\hat{A}$. Ces idéaux sont maximaux de corps résiduel isomorphe à $A/\Pi A$.

D'autre part, une forme du théorème de Stone-Wienstrass montre que $\hat{A}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$ ([2], X, § 4, exercice 2I). Comme $A[X]$ est dense dans $\widehat{A[X]}$ et B compris entre $A[X]$ et $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$, B est dense dans $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$.
Aussi, si l'on note $\bar{\mathcal{P}}$ l'adhérence de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$, c'est un idéal de $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$; et, il est propre, sion il existerait une suite d'éléments $R_n(X)$ de $\mathcal{P}$ tendant vers I ; pour n assez grand, $\frac{I}{\Pi}(I - R_n(X))$ serait dans B, et finalement I appartiendrait à $\mathcal{P}$.

Soit donc $\mathfrak{M}_x$ un idéal maximal de $\mathscr{C}(\hat{A},\hat{A})$ contenant $\overline{\mathfrak{P}}$. On a les inclusions :

$$\mathfrak{P} \subset \overline{\mathfrak{P}} \cap B \subset \mathfrak{M}_x \cap B = \mathfrak{P}_x.$$

Comme $\mathfrak{P}$ est maximal, $\mathfrak{P}$ est égal à $\mathfrak{P}_x$. De plus, on peut montrer :

3.3. [5] a) Pour que $\mathfrak{p}_P$ soit inclus dans $\mathfrak{P}_x$, il faut et il suffit que $P(x) = o$.

b) Pour tout $x \in \hat{A}$, $\mathfrak{P}_x$ est maximal et son corps résiduel est isomorphe à $A/\Pi A$ (vu plus haut).

c) Si P n'a pas de racines dans $\hat{A}$, $\mathfrak{p}_P$ est maximal et son corps résiduel est isomorphe à $K[X]/(P)$.

d) Si P a une racine dans $\hat{A}$, l'anneau $B/\mathfrak{p}_P$ est semi-local et intègralement clos.

4. Les localisés de B.

Pour déterminer les localisés de B en les idéaux premiers $\mathfrak{p}_P$ et $\mathfrak{P}_x$, il semble finalement plus simple de déterminer d'abord les anneaux de valuation contenant B en se servant de la proposition 3.I, puis d'utiliser le fait que B est intégralement clos (I.I).

4.I. Proposition [5]. Les valuations de $K(X)$ dont l'anneau contient B sont de l'un des deux types :

i) La valuation P-adique de $K(X)$ où P est un polynôme non constant et irréductible de $K[X]$.

ii) La valuation W_x de $K(X)$, x étant un élément (quelconque) de $\hat{A}$, à valeur dans le produit lexicographique $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, définie par : pour tout $R(X) \in K[X] - \{o\}$ décomposé sous la forme :

$$R(X) = (X-x)^{r_x} \,.\, R_I(X) \text{ où } R_I(X) \in \hat{K}[X] \text{ et } R_I(x) \neq 0,$$
$$W_x(R(X)) = (r_x, \hat{v}(R_I(x))).$$

4.2. Remarque. La valuation W_x est de heuteur I, si et seulement si x est transcendant sur K.

4.3. Corollaire. Le localisé de B en l'idéal premier $\mathfrak{P}_P$ est l'anneau de la valuation P-adique. Le localisé de B en l'idéal premier $\mathfrak{P}_x$ est l'anneau de la valuation W_x.

4.4. Remarque. Pour répondre à une question de Soublin, notons que l'anneau B est cohérent. En effet, B est un anneau de Prüfer (corollaire 4.3) ; pour qu'un B-module soit plat, il faut et il suffit qu'il soit sans torsion et donc tout produit de B-modules plats est un B-module plat.

5. Contre-exemples

5.I. Contre-exemple. L'anneau B est complètement intégralement clos, tandis que le localisé de B en l'idéal premier $\mathfrak{P}_a$, où a est un élément de A, est l'anneau de la valuation W_a qui est de hauteur 2, donc n'est pas complètement intégralement clos.

5.2. Remarque. L'anneau des fonctions entières fournissait déjà un contre-exemple ([I], V, § I, exercice I2). Mais dans ce cas, on ne sait pas décrire explicitement le localisé en question, car son existence provient de celle d'un ultra-filtre non trivial.

5.3. Remarque. L'anneau B ne peut être ni noethérien, ni de Krull, sinon il en serait de même de ses localisés.

5.4. Proposition. Pour que B soit intersection d'anneaux de valuation de hauteur I, il faut et il suffit que $\hat{K}$ soit transcendant sur K.

La condition nécessaire résulte de la proposition 4.I. Inversement, si l'ensemble χ des éléments de $\hat{A}$ transcendants sur K est non vide, il est à la fois dense dans $\hat{A}$ et adhérent à A, et donc étant donné

$R(X) \in K[X]$, $\forall\, a \in A \ \exists\, x \in \chi$ (et $\forall\, x \in \chi \ \exists\, a \in A$)

tel que $R(X) \in B_{\mathfrak{P}_x}$ soit équivalent à $R(a) \in A$.

[Il existe une démonstration beaucoup plus directe de cette proposition n'utilisant que la paragraphe 2 [5]].

5.5. Contre-exemple. Si K est un corps local (c'est-à-dire supposé au plus complet), alors B est un anneau complètement intégralement clos qui n'est pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur I.

5.6. Remarque. Nakayama [6] a déjà donné de tels contre-exemples, mais les anneaux qu'il obtient paraissent plus difficiles à manier.

6. Généralisations.

Pour pouvoir changer d'anneaux, changeons de :

Notations. Pour tout anneau intègre R, notons $R[X]_{sub}$ l'anneau des polynômes à valeurs entières sur R. Dans toute la suite, R désignera un anneau intègre et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R.

Dans le cas local, nous savons :

6.I. Proposition [4]. Si R est un anneau local de corps résiduel infini, alors $R[X]_{sub}$ est égal à $R[X]$.

D'autre part, on peut étendre les résultats précédents :

6.2. *Proposition. Supposons que R soit un anneau local d'idéal maximal principal (engendré par Π) et de corps résiduel fini (de cardinal n). Le R-module $R[X]_{sub}$ est libre et les assertions 2.3, 2.4 et 2.5 sont encore vraies (si l'on remplace A par R et B par $R[X]_{sub}$). De plus, les idéaux premiers de $R[X]_{sub}$ au-dessus de ΠR sont de la forme*

$$\mathcal{P}_x = \{Q(X) \in R[X]_{sub} \mid Q(x_m) \in \Pi R \ \text{pour m assez grand}\} ,$$

où x est un élément du séparé-complété de R et (x_m) une suite d'élément de R qui représente x ; ces idéaux sont maximaux de corps résiduel isomorphe à $R/\Pi R$.

Dans quelle mesure sait-on se ramener au cas local ?

6.3. *Proposition [4]. L'anneau $R_{\mathfrak{p}}[X]_{sub}$ contient l'anneau $R[X]_{sub}$.*

6.4. *Corollaire [4]. On a $R[X]_{sub} = \bigcap R_{\mathfrak{p}}[X]_{sub}$ où $\mathfrak{p}$ décrit l'ensemble des idéaux maximaux de R.*

6.5. *Proposition. Les anneaux $(R[X]_{sub})_{\mathfrak{p}}$ et $R_{\mathfrak{p}}[X]_{sub}$ sont égaux dans les cas particuliers suivants :*

i) *R est noethérien* ;

ii) $R_{\mathfrak{p}}[X]_{sub} = R_{\mathfrak{p}}[X]$;

iii) $\mathfrak{p}$ *est principal*.

Démonstration. Le cas (i) est montré dans [4]. Le cas (ii) résulte de la suite d'inclusions :

$$R_{\mathfrak{p}}[X] = (R[X])_{\mathfrak{p}} \subset (R[X]_{sub})_{\mathfrak{p}} \subset R_{\mathfrak{p}}[X]_{sub} = R_{\mathfrak{p}}[X] .$$

Enfin, dans le cas (iii), on peut supposer que le quotient $R/\mathfrak{p}$ est fini (de cardinal n), sinon par 5.1, on serait ramené au cas (ii) ; en particulier $\mathfrak{p}$ est maximal et $R/\mathfrak{p}^n$ est isomorphe $R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}})^n$. L'idéal $\mathfrak{p}$ étant principal (engendré par Π), on peut construire une suite (a_m) d'éléments de R et en déduire des polynômes $Q_m(X)$ qui forment une base du R -module $R_{\mathfrak{p}}[X]_{sub}$

(cf. § 2). Mais, par construction les $Q_m(X)$ appartiennent à $R[X]_{sub}$.

6.6. <u>Remarque</u>. Dès que $R_{\mathfrak{p}}[X]_{sub} = R_{\mathfrak{p}}[X]$, les idéaux premiers de $R[X]_{sub}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ s'obtiennent par intersection avec $R[X]_{sub}$ des idéaux premiers de $R_{\mathfrak{p}}[X]$ (qui sont connus). Ceci est réalisé dès que $R/\mathfrak{p}$ est infini, et en particulier dès que $\mathfrak{p}$ n'est pas maximal.

6.7. <u>Anneaux de Krull</u>. Supposons que R soit un anneau de Krull.
Considérons les trois cas :

i) $R/\mathfrak{p}$ est infini ;

ii) $\mathfrak{p}$ est de hauteur strictement plus grande que I ;

iii) $\mathfrak{p}$ est de hauteur I et de corps résiduel fini.

Dans le cas (i), $R_{\mathfrak{p}}[X]_{sub} = R_{\mathfrak{p}}[X]$.
Dans le cas (ii), notons $\mathfrak{q}_i$ les idéaux premiers de R contenus dans $\mathfrak{p}$.
Comme $R_{\mathfrak{p}} = \cap R_{\mathfrak{q}_i}$ et que les $\mathfrak{q}_i$ ne sont pas maximaux, on a :

$$R_{\mathfrak{p}}[X]_{sub} = \cap R_{\mathfrak{q}_i}[X]_{sub} = \bigcap R_{\mathfrak{q}_i}[X] = R_{\mathfrak{p}}[X].$$

Donc dans les cas (i) et (ii), on connaît les idéaux premiers de $R[X]_{sub}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ (remarque 6.6). Pour pouvoir conclure dans le cas (iii), il nous faut supposer ou bien que R est noethérien (intégralement clos), ou bien que R est factoriel, car on sera alors dans l'hypothèse (i) ou (iii) de la proposition 6.6, et on connaît les idéaux premiers de $R_{\mathfrak{p}}[X]_{sub}$, puisque $R_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation (proposition 3.I).

Enfin, en ce qui concerne le R-module $R[X]_{sub}$:

6.8. <u>Proposition</u> <u>(Cahen [3])</u>. <u>Si R est un anneau de De Dedekind, le R-module</u> $R[X]_{sub}$ <u>est libre et peut s'écrire comme une somme directe de R-modules</u> projectifs :

$$R[X]_{sub} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} I_m Q_m(X),$$

<u>où I_m est un idéal fractionnaire de R et</u> $Q_m(X)$ <u>un polynôme de degré m.</u>

6.9. <u>Proposition</u>. <u>Si R est un anneau factoriel, le R-module</u> $R[X]_{sub}$ <u>est libre et admet une base</u> $(Q_m(X))_{m \in \mathbb{N}}$ <u>où</u> $Q_m(X)$ <u>est un polynôme de degré m</u>.

Les démonstration de ces deux propositions utilisent le fait qu'un anneau de Krull ne possède qu'un nombre fini de valuations essentielles de corps résiduel de cardinal fini donné, ainsi que le théorème chinois qui permet de construire de proche en proche les polynômes $Q_m(X)$.

- BIBLIOGRAPHIE -

[I] N. BOURBAKI Algèbre commutative - Paris, Hermann.

[2] N. BOURBAKI Topologie générale - Paris, Hermann.

[3] P.J. CAHEN Polynômes à valeurs entières, Queen's University at Kingston, Mathematical preprint, n° 4 et I4, I97I.

[4] P. CAHEN et J.L. CHABERT Coefficients et valeurs d'un polynôme, Bull. Sc. Math., 2e série, t. 95, I97I, p. 295-304.

[5] J.L. CHABERT Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou, Bull. Soc. Math. France, t. 99, I97I, p. 273-283.

[6] T. NAKAYAMA On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains, Proc. Imp. Acad. Tokyo, t. I8, I942, p. I85-I87 et p. 233-236, et, Proc. Japan Acad., t. 22, I946, p. 249-250.

[7] A. OSTROWSKI Ueber ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, J. für reine und angew. Math., t. I49, I9I9, p. II7-I24.

[8] G. POLYA Ibidem, p. 97-II6.

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° 8 J.L CHABERT
I0, villa des Gobelins
75 - PARIS (I3^{e})