PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MICHEL LAZARUS

Fermeture intégrale et changement de base

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule S3
« Colloque d'algèbre », , p. 123-129
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___S3_123_0>

FERMETURE INTEGRALE ET CHANGEMENT DE BASE

par

Michel LAZARUS

Ce texte rassemble quelques résultats liés au comportement des éléments entiers par changement de base.

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires. Nous dirons qu'un anneau est normal si ses localisés sont intègres et intégralement clos. Nous dirons qu'un morphisme $f:A \longrightarrow A'$ est réduit (resp. intègre, resp. normal) si f est plat et si pour tout morphisme $A \longrightarrow k$ où k est un corps, les localisés de $A' \otimes_A k$ sont réduits (resp. intègres, resp. normaux).

Si $B \longrightarrow C$ est un morphisme, on note $\overline{B}^C$ la fermeture intégrale de B dans C.

I

Commençons par indiquer trois énoncés permettant de conclure qu'un changement de base conserve la fermeture intégrale. Soit $f:A \longrightarrow A'$ un morphisme (le changement de base), $B \longrightarrow C$ un morphisme de A-algèbres et notons $D=\overline{B}^C$, $B'= B \otimes_A A'$, $C'= C \otimes_A A'$, $D'= D \otimes_A A'$.

<u>THEOREME I</u> ([3]) Si f est normal et si Aet A' sont noethériens, alors $D'= \overline{B'}^{C'}$.

<u>THEOREME 2</u> ([7]) Si f est absolument plat, alors $D'= \overline{B'}^{C'}$.

<u>THEOREME 3</u> ([5]) Si f est réduit et si A est noethérien, alors $D'= \overline{B'}^{C'}$.

Sous certaines hypothèses, les propriétés de A liées aux éléments entiers se transmettent bien à A':

<u>THEOREME I'</u>([3]) Si f est normal et si A,A' sont noethériens, pour toute A-algèbre B normale, $B \otimes_A A'$ est normal.

<u>THEOREME 2'</u>([7]) Si f est absolument plat et si A est normal, alors A' est normal.

On se propose dans cette partie de démontrer le

<u>THEOREME 3'</u>Si f est normal, A noethérien, et si B est une A-algèbre normale, alors $B \otimes_A A'$ est normal.

Cela se déduira du résultat suivant, qui est plus intéressant :

THEOREME 4 Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme. On suppose A local noethérien, A' local, f local et intègre. Alors $\operatorname{Min} A'$ est un ensemble fini.

Démonstration. $\operatorname{Min} A'$ désigne l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A'.

On procède par récurrence sur la dimension de A.

Si A est artinien de radical m, m est nilpotent et par hypothèse l'anneau local A'/mA' est intègre, donc $\operatorname{Min} A'$ n'a qu'un élément.

$\dim A = I$

a) A de valution discrète. On va montrer que dans ce cas A' est intègre. Soit π une uniformisante de A, $K = A_{\pi}$ son corps des fractions. $A'/\pi A'$ étant local, il est par hypothèse intègre, donc $\pi A'$ est un idéal premier; soit $\mathfrak{p}_0 \subset \pi A'$ un idéal premier minimal de A', nous allons montrer que c'est le seul. Sinon soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de A' distinct de $\mathfrak{p}_0$

- π ne peut appartenir ni à $\mathfrak{p}_0$ ni à $\mathfrak{p}$ car par platitude on a $\mathfrak{p}_0 \cap A = \mathfrak{p} \cap A = 0$
- par hypothèse les localisés de $K \otimes_A A' = A'_{\pi}$ sont intègres, or on vient de voir que $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p} \in \operatorname{Min} A'_{\pi}$, donc $\mathfrak{p}_0 A'_{\pi} + \mathfrak{p} A'_{\pi} = A'_{\pi}$ i.e. on a dans A' une relation $\pi^n = p_0 + p$ avec $p_0 \in \mathfrak{p}_0$ et $p \in \mathfrak{p}$. $p_0 = \pi p'_0$, car $\mathfrak{p}_0 \subset \pi A'$, et $p'_0 \in \mathfrak{p}_0$, car $\pi \notin \mathfrak{p}_0$, donc si $n \geqslant I$, on a $\pi^n = \pi p'_0 + p$, d'où $p = \pi p' \in \mathfrak{p}$, donc $p' \in \mathfrak{p}$; ainsi $\pi^n = \pi p'_0 + \pi p'$ avec $p'_0 \in \mathfrak{p}_0$ et $p' \in \mathfrak{p}$; or par platitude, π est non diviseur de zéro dans A', donc $\pi^{n-1} = p'_0 + p'$.

On en déduit, par itération de ce calcul, que $I \in \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}$, ce qui est impossible puisque A' est local. Ainsi $\operatorname{Min} A'$ se réduit à $\mathfrak{p}_0$ et puisque les hypothèses entrainent que A' soit réduit, on voit que A' est intègre.

b) cas général. On se ramène à A réduit, puis A intègre de corps des frations K; on utilise alors l'existence d'une décomposition $A \overset{i}{\hookrightarrow} A_I \overset{j}{\hookrightarrow} \bar{A}^K$ avec i fini et j radiciel (cf [2]) et le fait que $\bar{A}^K$ est un anneau de Dedekind semi-local.

$\dim A = n > I$

On suppose le théorème 4 démontré lorsque $\dim A < n$. Utilisant ([5]), on en déduit le lemme suivant:

LEMME I Si A est noethérien, intégralement clos et $\dim A < n$, alors A' est intègre.

Supposant maintenant $\dim A = n$, on se ramène par des arguments standart au cas où A est complet, à corps résiduel algébriquement clos, et normal.

LEMME 2 Avec les hypothèses ci-dessus, il existe un morphisme $A \longrightarrow B$ injectif et fini et $t \in \mathrm{Rad}\, B \setminus 0$, tels que B soit local et normal et B/tB réduit.

Ce lemme permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence et conduit à des calculs analogues au cas de valuation discrète.

Pour démontrer le lemme 2 on se ramène au cas où A et la fermeture intégrale d'un anneau de séries formelles $k[[X_I,\dots,X_n]]$, de corps des fractions K, avec k algébriquement clos de caractéristique $p>0$, dans K^{I/p^r} (r entier positif) et on a:

LEMME 3 A est un anneau isomorphe à $k[[X_I,\dots,X_n]]$.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.

On déduit du théorème 4 les corollaires suivants:

COROLLAIRE I Soit $f:A \longrightarrow A'$ un morphisme intègre avec A noethérien. Alors pour toute A-algèbre B normale, les localisés de $B \otimes_A A'$ sont intègres.

COROLLAIRE 2 C'est le théorème 3'.

COROLLAIRE 3 Soit $f:A \longrightarrow A'$ un morphisme intègre avec A noethérien, B une A-algèbre locale géométriquement unibranche de radical n, et n' un idéal premier de $B' = B \otimes_A A'$ tel que $n' \cap A = n$. Alors $B'_{n'}$ est géométriquement unibranche (cf [3]).

Signalons aussi le

COROLLAIRE 4 Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. On suppose A et B noethériens, f et g normaux. Alors $g \circ f$ est normal.

COMPLEMENT Le théorème 3 reste vrai sans hypothèse noethérienne si on suppose que f est essentiellement de type fini.

En effet il résulte d'abord de ([7], (2.I)) qu'on peut se borner au cas où A est un anneau de valuation.

PROPOSITION I Soit $f:A \longrightarrow A'$ un morphisme plat, essentiellement de type fini avec A de valuation. Alors il existe une $\mathbb{Z}$-algèbre locale essentiellement de type fini A_o, un morphisme local $A_o \longrightarrow A$ et une A_o-algèbre plate de type fini A'_o tels que A' s'identifie à un anneau de fractions de la A-algèbre $A'_o \otimes_{A_o} A$.

Démonstration. Ecrivons $A' = S_I^{-I} A_I$ où $A_I = A[x_I,\dots,x_n]$ est une A-algèbre de type fini et S_I une partie multiplicative de A_I. Soit A_2 l'image, par le morphisme $A_I \longrightarrow S_I^{-I} A_I$, de A_I, et S_2 celle de S_I. A_2 est donc une sous A-algèbre de type fini de A', S_2 une partie multiplicative de A_2, et $A' = S_2^{-I} A_2$. Comme A_2 est incluse dans la A-algèbre plate A' et que A est de valuation, A_2 est aussi une A-algèbre plate. Comme elle est aussi de type fini, on sait ([8]) qu'elle est de présentation finie.

On termine alors la démonstration de la proposition I grâce aux résultats de [4].
Revenons, lorsque f est essentiellement de type fini, au théorème 3. On peut supposer A' local et f local. D'après la proposition I, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & A'_I & \longrightarrow & A' = (A'_I)_{m'_I} \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ A_o & \longrightarrow & A & & \end{array}$$

où A_o est un anneau local noethérien excellent, A'_o une A_o-algèbre plate de type fini, $A'_I = A'_o \otimes_{A_o} A$ et m'_I un idéal premier de A', au dessus du radical m de A. Si m_o = Rad A_o et $m'_o = m'_I \cap A'_o$, le morphisme $A_o \longrightarrow (A'_o)_{m'_o}$ est local, plat et sa fibre spéciale est géométriquement réduite, puisque c'est le cas pour $A \longrightarrow A'$. D'après un résultat de M. ANDRE (cf [6]) on sait alors que toutes les fibres de $A_o \longrightarrow (A'_o)_{m'_o}$ sont géometriquement réduites. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 3 avec hypothèse noethérienne.

REMARQUE Lorsque f est essentiellement de type fini, le théorème 4 est, sans hypothèse noethérienne, une trivialité; on voit qu'on trouvera alors des analogues aux corollaires du théorème 4.

QUESTION Soit $f: A \longrightarrow A'$ un morphisme à fibres géométriquement connexes. On suppose que A est noethérien intègre et que f est, disons, normal. Les localisés de A' sont-ils intègres ?

II

Dans cette partie on montre que, en un sens, les hypothèses faites dans les théorèmes 3 et 4 sont les meilleures possibles.

Dans un premier patagraphe on s'occupe de la platitude.

THEOREME 5 Soit A un anneau (resp. un anneau réduit) et M un A-module.
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) M est plat.

(ii) Pour toute A-algèbre B de type fini (resp. de type fini et réduite), le B-module $B \otimes_A M$ est sans torsion.

Montrons (ii)$\Longrightarrow$(i). Soit $0 \to N \to L \to M \to 0$ une présentation de M avec L libre de base E.
Il résulte d'un exercice de ([I], chap. I) que si M n'est pas plat il existe $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \in N$ tel que $\vec{x} \notin IN$ où $I = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ sont des éléments distincts de E.

Soit $\mathfrak{I}$ le plus grand idéal gradué de $A[T_I,\ldots,T_n]$ inclus dans $(T_I-x_I,\ldots,T_n-x_n)$, $C = A[T_I,\ldots,T_n,U,V]$ et $B = \dfrac{C}{UT_I-Vx_I,\ldots,UT_n-Vx_n,\ \mathfrak{I}C)} = A[t_I,\ldots,t_n,u,v]$ .Alors u est non diviseur de zéro dans B et si $\vec{t}$ est l'image de $\sum t_i\vec{e}_i \in B \otimes_A L$ dans $B \otimes_A M$,$\vec{t}$ est non nul bien que $u\vec{t}=0$ .De plus si A est réduit,B est aussi réduit.

<u>PROPOSITION 2</u> Soit $f:A \longrightarrow A'$ un morphisme tel que pour toute A-algèbre réduite B, $B' = B \otimes_A A'$ soit réduit.Alors si A est réduit,f est plat.

Démonstration.D'après le théorème 5 il suffit de montrer que B' est sans B-torsion,ce qui nous ramène à B=A;la proposition résulte donc du

<u>LEMME 4</u> Sous les hypothèses de la proposition 2,A' est sans A-torsion.

En effet soit S l'ensemble des éléments réguliers de A, $a \in S$ et $t' \in A'$ tels que $at'=0$. Posons $B = \dfrac{A[V,X]}{(X^2 - aV)}$;comme B est un A-module libre,il est sans torsion,donc $B \longrightarrow S^{-I}B$ est injective;or $S^{-I}B \simeq S^{-I}A[X]$ puisque a est alors inversible,donc B est réduit.Par hypothèse $B' = \dfrac{A'[V,X]}{(X^2 - aV)}$ est réduit,mais dans B' on a $x^2=av$,d'où $(xt')^2=0$, d'où $xt'=0$ i.e. $t'X \in (X^2 - aV)$ dans $A'[V,X]$,donc $t'=0$.

<u>COROLLAIRE 5</u> Soit $f:A \longrightarrow A'$ un morphisme "conservant la fermeture intégrale".Alors si B est une A-algèbre réduite,$B \otimes_A A'$ est réduit.Si de plus A est réduit, f est plat.

En effet B réduit $\Longrightarrow$ B intégralement fermé dans $B[T] \Longrightarrow$ B' intégralement fermé dans $B'[T] \Longrightarrow$ B' réduit (cf 5).

Terminons ce paragraphe par un contre-exemple:

Soit A un anneau local de radical m tel que m soit un nilidéal non nul et $m^2=m$.Considérons le morphisme $A \longrightarrow A' = A/m$;alors il n'est pas plat,cependant si $B \longrightarrow C$ est un mophisme de A-algèbres, $\bar{B}^C \otimes_A A'$ est inclus dans $C \otimes_A A'$ et y est intégralement fermé.

(Si k est un corps algébriquement clos de caractéristique 2 ,on peut prendre

$$A = \frac{k[X_I,\ldots,X_n,\ldots\ ]}{(X_I,X_I-X_2^2,\ldots,X_n-X_{n+I}^2,\ldots)}\ )$$

Ce dernier paragraphe contient deux contre-exemples aux théorèmes 3 et 4 lorsqu'on ne fait plus d'hypothèse noethérienne.

PROPOSITION 3 Il existe un morphisme plat $f:A \longrightarrow A'$ avec A de valuation de hauteur I (donc complètement intégralement clos) tel que si B est une A-algèbre , B réduit (resp. intègre, resp. est un corps) entraîne $B \otimes_A A'$ réduit (resp. intègre,resp. est un anneau de polynômes à une indéterminée sur B);et tel cependant que si K est le corps des fractions de A, A' ne soit pas intégralement fermé dans A'_K .

Démonstration.Partons d'un anneau de valuation de hauteur I, A ,dont le radical m ne soit pas principal.Définissons deux suites $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(t_n)_{n\geqslant I}$ d'éléments de $m\setminus 0$ de la façon suivante: $s_0\in m\setminus 0$ est quelquonque et comme m n'est pas principal,il existe $t_I\in m\setminus As_0$ .A étant de valuation,on a nécessairement $s_0=s_I t_I$ avec $s_I\in m\setminus 0$ et on recommence...D'où $s_I=s_2t_2$,...., $s_n=s_{n+I}t_{n+I}$,...

On prend alors $A'=A[U,X_0,X_I,\ldots,X_n,\ldots]/\mathcal{J}=A[u,x_0,x_I,\ldots,x_n,\ldots]$ où

$$\mathcal{J} = \langle (X_n - t_{n+I}X_{n+I})_{n\geqslant 0} \text{ , } (X_n^2 + s_n^2 U)_{n\geqslant 0} \rangle$$

A' est sans A-torsion et $x_0/s_0\in A'_K\setminus A'$ est entier sur A'.

PROPOSITION 4 Il existe un morphisme $g:A \longrightarrow A''$ avec A de valuation de hauteur I,A" local,g local et normal,et Min A" infini.

Démonstration.Repartons du morphisme $f:A\longrightarrow A'$ de l'exemple précédent.

Soit $B'= A'[T,T^{-I}]/(T^2+ u)$ et considérons le système inductif de A-algèbres $\ldots\longrightarrow B'^{\otimes p}\longrightarrow B'^{\otimes(p+I)}\longrightarrow \ldots$ obtenu en tensorisant à chaque pas par le morphisme $A \longrightarrow B'$ .Soit $m^{(p)}$ l'idéal de $B'^{\otimes p}$ engendré par le radical de A et les éléments du type $I\otimes\ldots\otimes x_n\otimes\ldots\otimes I$ $(n\geqslant 0)$.$m^{(p)}$ est un idéal premier de $B'^{\otimes p}$ contenant ses 2^p idéaux premiers minimaux;le système se localise et on prend $A''= \lim (B'^{\otimes p})_{m^{(p)}}$.

REMARQUE Pour tout morphisme $A/m \longrightarrow k$ où k est un corps, $A''\otimes_A k$ est un anneau intègre et intégralement clos.Soit A_0 un anneau de valuation discrète;en construisant l'anneau de valuation de hauteur I, A ,à l'aide de ([I],chap.VI,§I0,prop.I),on en déduit un morphisme composé $A_0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} A''$ local,plat,dont la fibre générique est géométriquement normale et la fibre spéciale géométriquement irréductible,bien que Min A" soit infini.

[1] N.BOURBAKI,Algèbre commutative,Chap.I et VI,Hermann,Paris,1964.

[2] A.GROTHENDIECK et J.DIEUDONNE,Eléments de géométrie algébrique,chap.0_{IV},§23, Pub. Math. de l'I.H.E.S. n°20,1964.

[3] A.GROTHENDIECK et J.DIEUDONNE,Eléments de géométrie algébrique,chap.IV,§6, Pub. Math. de l'I.H.E.S. n°24,1965.

[4] A.GROTHENDIECK et J.DIEUDONNE,Eléments de géométrie algébrique,chap.IV,§11, Pub. Math. de l'I.H.E.S. n°28,1966.

[5] M.LAZARUS,Fermeture intégrale et changement de base,C.R.Acad.Sc. ,Paris,t.289, 1979,p.51-53 .

[6] B.MAROT,Conservation des propriétés formelles d'un anneau semi-local par complétion adique;ce fascicule.

[7] J.P.OLIVIER,Fermeture intégrale et changements de base absolument plats, Colloque d'Algèbre,Rennes 1972 .

[8] M.RAYNAUD et L.GRUSON,Inventiones Math.,n°13,1971.

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales

U.E.R. 48,Université Pierre et Marie Curie

4 place Jussieu, 75230-Paris