MARIE-FRANÇOISE COSTE

MICHEL COSTE

Le spectre réel et la topologie des variétés algébriques sur un corps réel clos

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule S3
« Colloque d'algèbre », , p. 151-168
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___S3_151_0>

LE SPECTRE RÉEL ET LA TOPOLOGIE

DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES SUR UN CORPS RÉEL CLOS

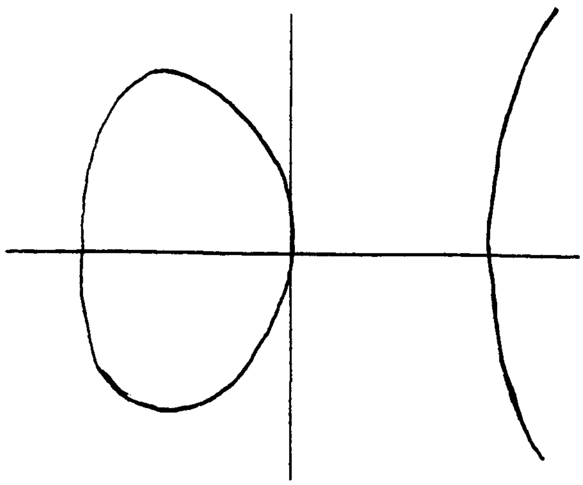
par

Marie-Françoise COSTE

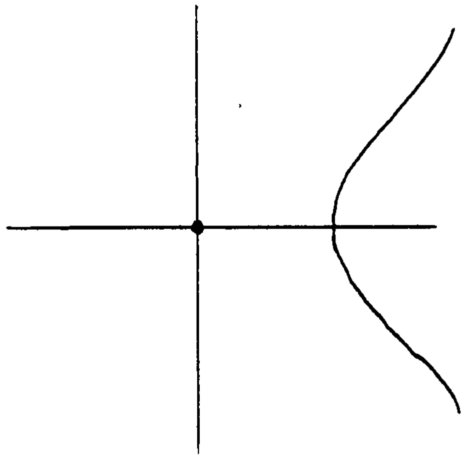
Michel COSTE

I - INTRODUCTION.

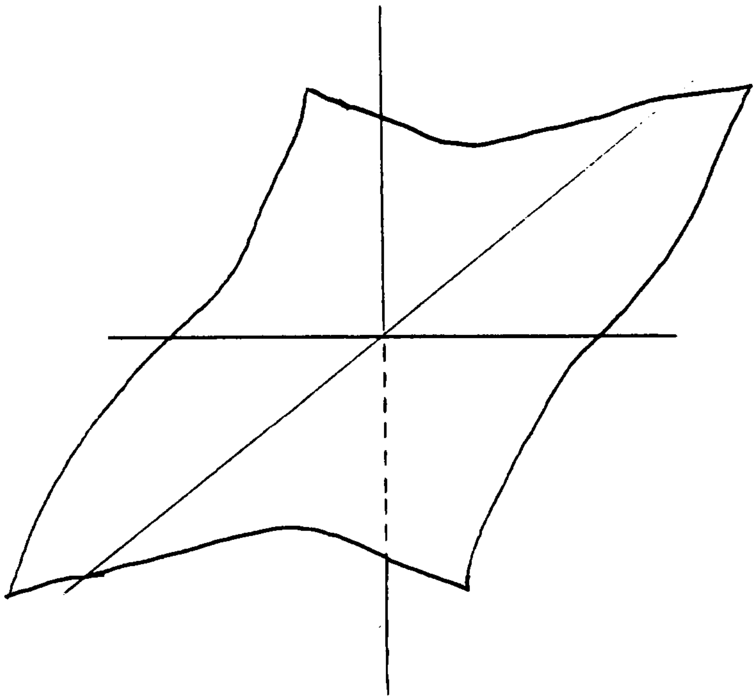
Soit V une variété algébrique définie sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $V(\mathbb{R})$ des points réels de V avec la topologie euclidienne (ou usuelle, c'est-à-dire pas celle de Zariski) a des particularités qui ne se rencontrent pas avec les points complexes. $V(\mathbb{R})$ peut avoir plusieurs composantes connexes même pour une variété irréductible : la cubique $y^2-x^3+x = 0$ a deux composantes connexes



On a aussi des phénomènes de chute de dimension : la cubique $y^2-x^3+x^2 = 0$ a un point réel isolé



Le "parapluie de Whitney" d'équation $(x^2+y^2)z-y^3 = 0$ est une surface connexe qui a un "manche" de dimension 1



Notre but est de dégager un outil algébrique qui rende compte de ces phénomènes. Pour cela nous associons fonctoriellement à un anneau commutatif A quelconque un espace topologique, le spectre réel de A, noté $\mathrm{Spec}_R A$. Ce spectre réel a les mêmes propriétés formelles et topologiques générales que le spectre premier avec sa topologie de Zariski. Mais, dans le cas où $A = \mathbb{R}[V]$ est l'anneau de coordonnées d'une variété algébrique affine définie sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{Spec}_R A$ est suffisamment proche de $V(\mathbb{R})$ avec sa topologie euclidienne pour rendre compte des phénomènes signalés ci-dessus. Ainsi $V(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Spec}_R\, \mathbb{R}[V]$ ont les mêmes composantes connexes, et si $x \in V(\mathbb{R})$ on a une notion algébrique de dimension de V en x qui correspond à ce que l'on voit sur le dessin. Les preuves des résultats annoncés peuvent se trouver dans [6] [7] [8] [9] [11] et seront regroupées dans [10].

II - DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES GÉNÉRALES DU SPECTRE RÉEL.

Soit V une variété algébrique affine définie sur un corps K algébriquement clos. Spec K[V] et V(K) avec la topologie de Zariski sont pratiquement le même espace topologique : on passe de V(K) à Spec K[V] en ajoutant les points génériques de fermés irréductibles et ceci ne change pas les ouverts. Considérons maintenant le cas d'une variété sur un corps réel clos K. Le théorème des zéros réels ([16]) montre que l'on a une situation analogue en remplaçant Spec K[V] par le sous-espace des idéaux premiers réels, c'est-à-dire ceux qui vérifient

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \in p \Longrightarrow x_i \in p \qquad i = 1,\dots,n\ .$$

Cependant ceci ne nous avance pas beaucoup si l'on s'intéresse à V(K) munie de sa topologie euclidienne donnée par l'ordre sur K.

Les idéaux premiers de l'anneau de coordonnées sont liés aux points de la variété dans des extensions algébriquement closes du corps de définition. De manière générale, tout morphisme d'un anneau A dans un corps algébriquement clos K se factorise à travers un corps algébriquement clos minimal qui est la clôture algébrique du corps résiduel $k(p)$ de A en p, le noyau du morphisme $A \longrightarrow K$; l'idéal premier p détermine la factorisation à isomorphisme près. Considérons maintenant un morphisme de A dans un corps réel clos K. Il se factorise aussi à travers un corps réel clos minimal qui est la clôture réelle de $k(p)$ (p est toujours le noyau de $A \longrightarrow K$) pour l'ordre induit par celui de K. Cette fois la seule donnée de l'idéal premier réel p ne suffit pas à déterminer la factorisation : il faut lui adjoindre celle de l'ordre sur $k(p)$.

Voici introduits les objets qui vont être les points du spectre réel de A : les couples formés d'un idéal premier réel p de A et d'un ordre (total) sur le corps résiduel $k(p)$. Nous choisirons de décrire un tel couple comme une partie de A, formée des éléments qui deviennent négatifs ou nuls dans le corps résiduel ordonné.

DEFINITION 1. *Un précône premier* α *de* A *est une partie de* A *qui vérifie :*

1°) $1 \notin \alpha$

2°) $\forall\, x \in A \quad -x^2 \in \alpha$

3°) $\forall\, x,y \in \alpha \quad x+y \in \alpha$

4°) $\forall\, x,y \in A$

$$xy \in \alpha \Longleftrightarrow (x \in \alpha \text{ et } -y \in \alpha) \text{ ou } (-x \in \alpha \text{ et } y \in \alpha).$$

Si on se donne un tel précône premier α on montre que $p = \alpha \cap -\alpha$ est un idéal premier réel et que α détermine bien un ordre sur le corps résiduel $k(p)$ si l'on impose que les images d'éléments de α soient négatives ou nulles.

Si α est un précône premier, on notera $k(\alpha)$ la clôture réelle du corps résiduel $k(p)$ ($p = \alpha \cap - \alpha$) pour l'ordre déterminé par α.

On peut, sur le modèle du spectre de Zariski, faire de l'ensemble des précônes premiers de A un espace topologique :

DEFINITION 2. *Le spectre réel de l'anneau* A, *noté* $\mathrm{Spec}_R A$ *est l'ensemble des précônes premiers de* A *muni de la topologie donnée par la base d'ouverts*

$$D(a_1,\dots,a_n) = \{\alpha \in \mathrm{Spec}_R A \mid a_1 \notin \alpha \text{ et } \dots \text{ et } a_n \notin \alpha\}$$

pour $a_1,\dots,a_n \in A$.

$D(a_1,\dots,a_n)$ est l'ensemble des précônes premiers tels que les éléments $a_1,\dots,a_n$ deviennent simultanément strictement positifs dans le corps résiduel ordonné correspondant. Remarquons que l'on n'a pas ici $D(a_1)\cap D(a_2) = D(a_1a_2)$.

Spec_R est en fait un foncteur contravariant de la catégorie des anneaux dans la catégorie des espaces topologiques : si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux et si $\beta \in \mathrm{Spec}_R B$ on pose $\mathrm{Spec}_R f(\beta) = f^{-1}(\beta)$; il est clair que $\mathrm{Spec}_R f$ est une application continue.

Outre le caractère fonctoriel de la construction, le spectre réel a les mêmes propriétés topologiques générales que le spectre premier. Ce sont les parties i) et ii) de la proposition suivante :

PROPOSITION 1. *Soit* A *un anneau quelconque.*

i) Les ouverts $D(a_1,\dots,a_n)$ *sont quasi-compacts. En particulier* $\mathrm{Spec}_R A$ *lui meme est quasi-compact.*

ii) Soient α,β *deux précônes premiers de* A. *On a* $\alpha\subset\beta$ *ssi* $\beta\in \mathrm{adh}(\{\alpha\})$. *Les fermés irréductibles de* $\mathrm{Spec}_R A$ *sont l'adhérence d'un point et d'un seul.*

iii) Soient α,β,β' *trois précônes premiers de* A *avec* $\alpha\subset\beta$ *et* $\alpha\subset\beta'$. *On a* $\beta\subset\beta'$ *ou* $\beta'\subset\beta$.

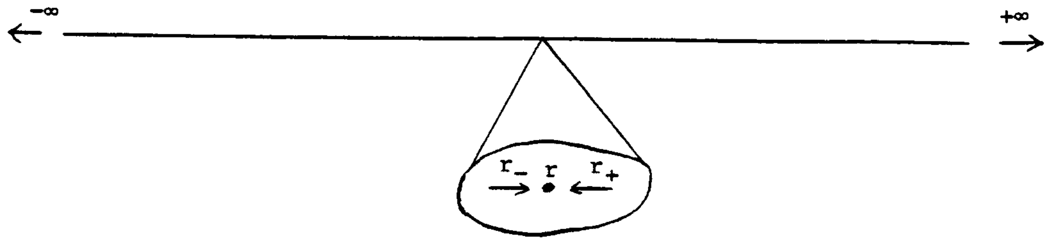
Les propriétés i) et ii) disent que $\mathrm{Spec}_R A$ est un espace spectral (Hochster). On dira comme d'habitude que β est une spécialisation de α (ou α une généralisation de β) si on a $\alpha\subset\beta$. La propriété iii) dit que les spectres réels ont une propriété particulière : les spécialisations d'un point forment une chaîne totalement ordonnée.

III - LE SPECTRE RÉEL DE L'ANNEAU DE COORDONNÉES D'UNE VARIÉTE ALGÉBRIQUE AFFINE RÉELLE.

Il est temps de donner un exemple de spectre réel : celui de l'anneau $\mathbb{R}[X]$. Les idéaux premiers réels de $\mathbb{R}[X]$ sont d'une part les idéaux maximaux réels qui correspondent aux points réels de la droite, d'autre part l'idéal (0), point générique de la droite. Le corps résiduel en un idéal maximal réel est $\mathbb{R}$, qui a un ordre unique. Un réel r détermine donc un précône premier que l'on peut encore écrire $r = \{P \in \mathbb{R}[X] | P(r) \leq 0\}$. Le corps résiduel au point générique est $\mathbb{R}(X)$; pour ordonner $\mathbb{R}(X)$, il faut situer X par rapport aux constantes réelles. On peut le mettre à $-\infty$, à $+\infty$, en r_- (resp. en r_+) c'est-à-dire juste à gauche (resp. à droite) d'un réel r. Un polynôme sera strictement positif en r_- s'il l'est sur un intervalle $]r-\varepsilon,r[$. En termes de précônes premiers

$$r_- = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, x \in]r-\varepsilon,r[\quad P(x) \leq 0\} .$$

On peut dessiner ainsi $\mathrm{Spec}_R\, \mathbb{R}[X]$:

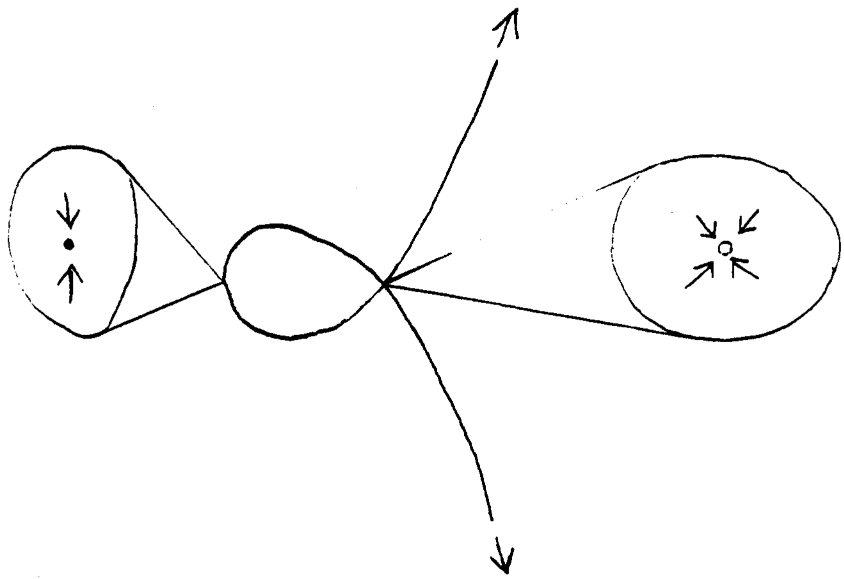


On peut prendre comme base d'ouverts de $\mathrm{Spec}_R\, \mathbb{R}[X]$ les "intervalles" du genre $[-\infty,r_-] = D(r-X)$, $[r_+,+\infty] = D(X-r)$, $[r_+,s_-] = D(X-r,s-X)$ pour $r < s$. On peut remarquer que les "intervalles"

$$[r_+,s_-] \quad \text{et} \quad]r_+,s_-[= \bigcup_{r<r'<s'<s} D(X-r',s'-X)$$

sont tous les deux des ouverts qui ont même trace sur les points réels de la droite ; le premier est quasi compact, pas le second.

Cette description donnée pour la droite réelle peut s'étendre au cas d'une courbe affine réelle irréductible Γ. Les points de $\mathrm{Spec}_R(\mathbb{R}[\Gamma])$ sont d'une part les points réels de Γ , d'autre part les "points génériques" des demi-branches réelles de Γ (une demi branche réelle étant une classe d'équivalence de paramétrisations réelles pour des changements de paramètres croissants). Par exemple, pour une cubique à point double réel :



Le point générique d'une demi-branche (s'il n'est pas à l'infini) se spécialise en le centre de cette demi-branche. Les points génériques de demi-branches réelles sont les éclats du point générique de la courbe : ils correspondent aux ordres sur $\mathbb{R}(\Gamma)$. A un tel ordre on (Krull) sait associer une place réelle $\mathbb{R}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R},\infty$ (les éléments finis à la place sont ceux qui ne sont pas infiniment grands par rapport aux constantes réelles) ; le choix d'un paramètre uniformisant positif donne alors une demi-branche réelle de Γ. Réciproquement une paramétrisation réelle de Γ donne bien, une fois choisi le signe du paramètre, un ordre sur $\mathbb{R}(\Gamma)$.

Dans le cas d'une variété de dimension plus grande, la description se complique : on est amené à considérer les places réelles de corps de degré de transcendance sur $\mathbb{R}$ plus grand que 1, et la situation est bien moins simple que ci-dessus. On peut voir Brumfiel [4] pour une description (incomplète) des ordres de $\mathbb{R}(X,Y)$.

Cependant, même si l'on a du mal à décrire les points du spectre réel, on peut mettre en évidence les rapports existant entre sa topologie et la topologie euclidienne de l'ensemble des points réels de la variété.

PROPOSITION 2. *Soit* V *une variété algébrique affine définie sur* $\mathbb{R}$. $V(\mathbb{R})$ *avec sa topologie euclidienne s'identifie à un sous espace dense de* $\mathrm{Spec}_R\,\mathbb{R}[V]$.

Si x est un point de $V(\mathbb{R})$, le précône premier correspondant que l'on notera encore x est $\{P \in \mathbb{R}[V]\ P(x) \leq 0\}$. La trace de l'ouvert $D(P_1,\dots,P_n)$ sur $V(\mathbb{R})$ est $\{x \in V(\mathbb{R})\,|\,P_1(x) > 0$ et ... et $P_n(x) > 0\}$.

Précisons davantage les rapports entre les deux espaces.

DEFINITION 3. *Un constructible de* $\mathrm{Spec}_R A$ *est une combinaison booléenne d'ouverts* $D(a_1,\dots,a_n)$ *(c'est-à-dire obtenue à partir de ceux-ci par unions et intersections finies et passage au complémentaire).*

Rappelons par ailleurs qu'un sous ensemble semi-algébrique de $V(\mathbb{R})$ est une combinaison booléenne de parties de $V(\mathbb{R})$ données par des inégalités polynômiales strictes

PROPOSITION 3.

i) *La restriction à* $V(\mathbb{R})$ *induit une bijection entre les constructibles de* $\mathrm{Spec}_R\,\mathbb{R}[V]$ *et les semi-algébriques de* $V(\mathbb{R})$. *On notera* $\tilde{S}$ *le constructible correspondant au semi-algébrique* S.

ii) *Cette bijection induit une bijection entre les constructibles ouverts de* $\mathrm{Spec}_R\,\mathbb{R}[V]$ *(c'est-à-dire les unions finies d'ouverts de la base) et les semi-algébriques ouverts de* $V(\mathbb{R})$.

iii) *L'opération* $S \longmapsto \tilde{S}$ *commute aux intersections et réunions finies, au passage au complémentaire, à l'intérieur, à l'adhérence, à l'image et à l'image réciproque par un morphisme de variétés.*

La première partie de la proposition est une conséquence de l'élimination des quantificateurs pour les corps réels clos, plus connues sous le nom de principe de Tarski-Seidenberg. La deuxième partie est la traduction du résultat suivant [7] : tout ouvert semi-algébrique de $V(\mathbb{R})$ est union finie d'intersections finies d'ouverts de la forme $\{x \in V(\mathbb{R}) | P(x) > 0\}$. Ce résultat découle facilement d'un "lemme de Thom généralisé" d'Efroymson [13]. Bochnak-Efroymson [3] et Delyell ont d'autres démonstrations.

Ce résultat peut se traduire aussi comme un principe qui nous est très utile pour obtenir des propriétés topologiques du spectre réel.

PROPOSITION 4. *Soit* C *une partie de* $\mathrm{Spec}_R A$ *donnée comme l'ensemble des* α *tels que* $k(\alpha)$ *satisfait une formule close* $\Phi(\underline{a})$ *du langage des corps ordonnés à paramètres* $\underline{a} = a_1, \ldots, a_n$ *dans* A. *Supposons que* $\Phi(\underline{x})$ *a une extension ouverte dans* $\mathbb{R}^n$. *Alors* C *est un ouvert constructible de* $\mathrm{Spec}_R A$.

Revenons maintenant aux composantes connexes de $V(\mathbb{R})$. On sait que celles-ci sont des ouverts semi-algébriques de $V(\mathbb{R})$. La proposition 3 donne immédiatement le résultat suivant :

PROPOSITION 5. *L'opération* $S \longmapsto \tilde{S}$ *donne une bijection entre les composantes connexes de* $V(\mathbb{R})$ *et celles de* $\mathrm{Spec}_R\, \mathbb{R}[V]$. *Ceci vaut aussi pour les composantes des semi-algébriques de* $V(\mathbb{R})$.

Il est naturel de se demander ce que devient tout ceci quand on remplace $\mathbb{R}$ par un autre corps réel clos K. On sait que si V est une variété algébrique affine sur K, V(K) avec sa topologie euclidienne n'a pas de bonnes propriétés topologiques. L'ensemble des points réels algébriques de la droite, par exemple, n'est pas localement connexe. On peut décrire $\mathrm{Spec}_R\, \mathbb{A}[X]$ (où $\mathbb{A}$ est le corps des réels algébriques) : il est formé des points $-\infty$, $+\infty$, a_-, a, a_+ pour tout réel algébrique a et d'un seul point r pour chaque réel transcendant r (correspondant à l'ordre sur $\mathbb{A}(X)$ pour lequel les fractions positives sont celles qui prennent une valeur positive en r). On a donc "bouché les trous" de la droite réelle algébrique et $\mathrm{Spec}_R\,\mathbb{A}[X]$ est localement connexe et connexe.

En général on a les résultats suivants :

PROPOSITION 6.

i) *Les résultats de la proposition 3 restent valables quand on remplace* $\mathbb{R}$ *par un autre corps réel clos* K.

ii) $\mathrm{Spec}_R\, K[V]$ *est localement connexe et a un nombre fini de composantes connexes. Ceci est vrai aussi pour les constructibles de* $\mathrm{Spec}_R\, K[V]$. *De plus si* L *est une extension réelle close de* K *l'application* $\mathrm{Spec}_R L[V] \longrightarrow \mathrm{Spec}_R K[V]$ *induit une bijection entre les composantes connexes.*

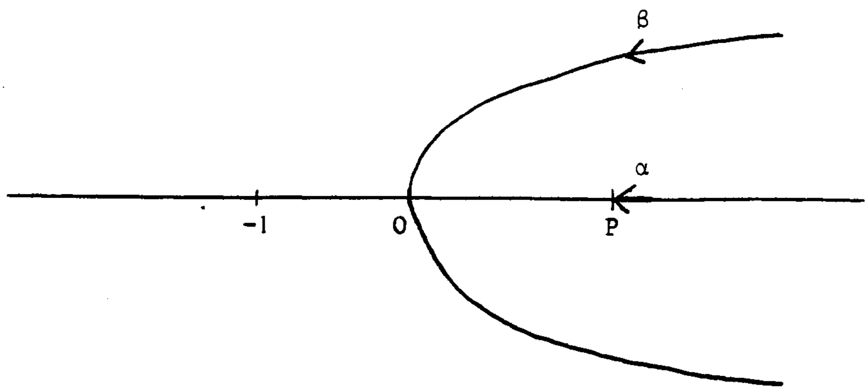
La preuve de cette proposition utilise intensivement le principe de Tarski-Seidenberg et le fait que l'on a des bornes sur le nombre et le degré des polynômes introduits dans le "lemme de Thom généralisé".

La partie ii) de la proposition montre que l'on a ainsi une notion agréable de composante connexe. On peut montrer [11] que ces composantes connexes sont un invariant birationnel des variétés lisses et "réellement complètes" (c'est-à-dire, pour les variétés affines, bornées).

Puisqu'il y a bijection entre les ouverts semi-algébriques de V(K) et les ouverts constructibles de $\mathrm{Spec}_R K[V] = \tilde{V}$, il revient au même de se donner un faisceau sur $\tilde{V}$ ou sur le site formé des ouverts semi-algébriques de V(K) avec les recouvrements finis. Ce site est évoqué par Brumfiel [4] mais il ne remarque pas qu'il est équivalent à un espace topologique. Par ailleurs Brumfiel montre -sans parler de spectre réel- une partie du ii) de la proposition 6 (il dit qu'un semi-algébrique S est connexe s'il n'est pas réunion disjointe de deux semi-algébriques non vides ouverts dans S) et a aussi un concept de "dimension réelle en un point" (cf. plus bas). A notre avis, l'utilisation du spectre réel simplifie les choses et permet d'aller plus loin.

IV - PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DES MORPHISMES D'ANNEAUX.

Le "théorème de montée" de Cohen-Seidenberg n'est pas valable pour les idéaux premiers réels : considérons l'exemple de la projection de la parabole $x = y^2$ sur l'axe des x



Le point générique de la parabole s'envoie sur le point générique de la droite. Si on spécialise ce dernier au point d'abscisse -1, il n'y a aucun point réel de la parabole au dessus. Reprenons maintenant cet exemple avec les précônes premiers. Soit β le point générique d'une demi-branche réelle de la parabole, qui se projectte sur le point générique α d'une demi-branche réelle de la droite. Soit P le centre de α (si α n'est pas $\pm\infty$). Alors le centre de β n'est pas à l'infini, et est bien au dessus de P.

On voit bien ici comment l'explosion du point générique est nécessaire pour avoir des résultats dans le contexte réel.

PROPOSITION 7. *Soit* $f : A \longrightarrow B$ *un morphisme entier d'anneaux. Soient* α *un précône premier de* A, β *un précône premier de* B *au dessus de* α *et* α' *une spécialisation de* α. *Il existe une spécialisation* β' *de* β *au dessus de* α'. *L'application* $\mathrm{Spec}_R f : \mathrm{Spec}_R B \longrightarrow \mathrm{Spec}_R A$ *est fermée.*

On se ramène à montrer que si B est une A-algèbre entière de présentation finie, l'image de $\mathrm{Spec}_R B$ dans $\mathrm{Spec}_R A$ est fermée. Si on pose

$$B = A[X_1,\dots,X_n]/(P_1(X_1),\dots,P_n(X_n),Q_1(\underline{X}),\dots,Q_p(\underline{X}))$$

où les P_i sont unitaires, cette image est l'ensemble des précônes premiers α tels que $k(\alpha)$ satisfait la formule

$$\exists\, x \quad P_1(x_1) = \dots = P_n(x_n) = Q_1(\underline{x}) = \dots = Q_p(\underline{x}) = 0 \ .$$

On utilise alors le principe de la proposition 4.

On n'a pas ici de "théorème de descente" comme le montre l'exemple ci-dessus de la projection de la parabole sur la droite : 0_- est une générisation de l'origine sur l'axe des x qui ne se relève pas en une générisation de l'origine sur la parabole.

Comme résultat d'ouverture, nous avons :

PROPOSITION 8.

i) *Si* f *est lisse,* $\mathrm{Spec}_R f$ *est ouvert.*

ii) *Si* f *est étale,* $\mathrm{Spec}_R f$ *est un homéomorphisme local.*

La partie ii) de cette proposition est une conséquence de la spatialité du topos étale réel que nous rencontrerons plus loin. Signalons-en une conséquence utile :

PROPOSITION 9. *Soit* V *une variété algébrique définie sur* K *réel clos, et un point non singulier de* V(K), $T_x(V)$ *l'espace tangent à* V *en* x. *Un voisinage de* x *dans* V *est homéomorphe à un voisinage de* x *dans* $\widetilde{T_x(V)}$.

Pour le spectre réel, on peut donc raisonner au voisinage d'un point non singulier comme si on était dans un espace affine.

V - DIMENSION REELLE.

Nous allons maintenant nous intéresser à la dimension combinatoire de l'espace $\mathrm{Spec}_R A$.

DEFINITION 4. *La dimension réelle de l'anneau* A, *notée* $\dim_R A$, *est le sup des longueurs de chaînes de précônes premiers de* A.

On a bien entendu toujours $\dim_R A \leq \dim A$ (dimension de Krull). Cette définition n'a rien d'aberrant :

PROPOSITION 10. *Soit* V *une variété algébrique affine sur* K *réel clos. La dimension réelle de* K[V] *est égale au sup des longueurs de chaînes de sous-ensembles algébriques irréductibles de* V(K).

Cependant on aurait le même résultat, et plus simplement, avec les idéaux premiers réels. L'intérêt des précônes premiers est qu'ils donnent une définition de la dimension d'une variété en un point qui coïncide avec ce que l'on voit sur les dessins.

DEFINITION 5. *Soit* x *un point de* V(K). *La dimension réelle de* V *en* x, *notée* $\dim_R(V,x)$ *est le sup des longueurs de chaînes de précônes premiers de* K[V] *se terminant en* x.

Un sous-produit de la démonstration de la spatialité du topos étale réel est le fait que le sous-espace de $\mathrm{Spec}_R K[V]$ formé des générisations de x est homéomorphe au spectre réel de $(K[V]_x)^h$, le hensélisé de l'anneau local en x. On a donc $\dim_R(V,x) = \dim_R(K[V]_x)^h$.

PROPOSITION 11. *Soit* V *une variété algébrique affine irréductible sur* K *réel clos, avec* K(V) *formellement réel (ceci veut dire simplement que* K[V] *est l'anneau des fonctions polynomiales sur* V(K), *qui est irréductible).*
Soit $x \in V(K)$. *On a*

$$\dim_R(V,x) = \dim_R(K[V])$$

ssi x *est limite (pour la topologie euclidienne) de points non singuliers de* V(K).

On retrouve ici une des conditions de "réalité locale" de G. Efroymson [12]. L'égalité $\dim_R(V,x) = \dim_R(K[V]_x)^h$ montre immédiatement l'équivalence de cette condition avec la suivante : "un des idéaux premiers minimaux de $K[V]_x^h$ est réel". A noter qu'une des conditions d'Efroymson n'est pas équivalente aux autres ; c'est "un des idéaux maximaux du normalisé de $K[V]_x$ est réel". Voici un contre-exemple, suggéré par J.-J. Risler. La surface d'équation $x^2+y^2+z^2-x^3 = 0$ est normale à l'origine qui est pourtant un point réel isolé (et donc la dimension réelle de la surface à l'origine est 0, alors que sa dimension réelle globale est 2).

On peut bien sûr définir la dimension réelle d'un semi-algébrique S de $A^n(K)$ en un point x, comme le sup des longueurs de chaînes de précônes premiers de $\tilde{S}$ se terminant en x. On montre alors

PROPOSITION 12.

i) *La fonction* $x \longmapsto \dim_R(S,x)$ *est semi continue supérieurement sur le semi-algébrique* S. *Pour* k *fixé* $\{x \in S \mid \dim_R(S,x) \leq k\}$ *est un semi algébrique ouvert dans* S.

ii) *Soit* d *la dimension de la clôture de Zariski de* S *dans* $A^n(K)$.

$$d = \sup\{\dim_R(S,x) \mid x \in S\} .$$

iii) $\dim_R(S,x)$ *est la dimension de la clôture de Zariski d'un voisinage suffisamment petit de* x *dans* S.

VI - LE TOPOS ÉTALE RÉEL.

Il y a sur le spectre réel de l'anneau A un faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_R A}$ qui en fait un espace annelé en anneaux locaux henséliens de corps résiduels réels clos. Précisément la fibre de ce faisceau au dessus du précône premier est l'anneau A_α local ind-etale sur A, hensélien et de corps résiduel $k(\alpha)$ (ceci caractérise bien l'anneau A_α).

Dans le cas où $A = \mathbb{R}[V]$ est l'anneau de coordonnées d'une variété affine réelle non singulière, le faisceau structural sur $\mathrm{Spec}_R\,\mathbb{R}[V]$ est l'image directe du faisceau des fonctions de Nash (ou analytiques-algébriques) sur $V(\mathbb{R})$ [2]. Dans le cas général on peut donner de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_R A}$ une description calquée sur celle du faisceau de fonctions de Nash par Artin et Mazur dans [2]. Soit U un ouvert de $\mathrm{Spec}_R A$. Considérons le système filtrant formé des couples (B,) où

- B est une A-algèbre étale,
- $\varphi : U \longrightarrow \mathrm{Spec}_R B$ est une section de l'homéomorphisme local

$\mathrm{Spec}_R B \longrightarrow \mathrm{Spec}_R A$; les morphismes de transition de (B,φ) dans (C,Ψ) sont les morphismes de A-algèbres $f : B \longrightarrow C$ tels que $\varphi = \mathrm{Spec}_R f \circ \Psi$. Soit $\mathcal{Q}(U)$ la limite inductive des A-algèbres B pour ce système filtrant. $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_R A}$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{Q}$.

Le faisceau structural sur $\mathrm{Spec}_R A$ a une propriété universelle : il y a un morphisme canonique $A \longrightarrow \Gamma(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_R A})$ et à chaque fois que l'on a un espace annelé en anneaux locaux henséliens de corps résiduel réel clos $(X,\mathcal{O}_X)$ et un morphisme $A \longrightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X)$, il existe une unique application continue $\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Spec}_R A$ et un unique morphisme local $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_R A} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ induisant une factorisation

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & \Gamma\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_R A} \arrow[d] \\ & \Gamma\mathcal{O}_X \end{tikzcd}$$

Voici pourquoi, en tant que catégorico-logiciens, nous avons été ramenés à introduire et étudier le spectre réel : on savait que le topos étale du schéma affine Spec A [1] possède une propriété universelle analogue où il est question cette fois de topos annelés en anneaux locaux stricts (c'est-à-dire henséliens de corps résiduel séparablement clos) [14]. G. Wraith a suggéré de considérer le problème universel formulé avec les anneaux locaux henséliens de corps résiduel réel clos, introduits par A. Kock en géométrie différentielle synthétique [15]. Grâce à la théorie générale des spectres développée dans [5] nous avons pu donner une description du topos annelé solution de ce problème universel, le topos étale réel : son site de définition est la duale de la catégorie des A-algèbres étales, les recouvrements étant les familles de morphismes de A-algèbres étales $(f_i : B \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ telles que la famille $(\mathrm{Spec}_R f_i)_{i \in I}$ soit surjective (il suffit donc de remplacer dans la description du topos étale Spec par Spec_R).

G. Wraith, s'appuyant sur le fait que la clôture réelle d'un corps ordonné n'a pas d'automorphisme non trivial au-dessus de ce dernier (contrairement à la clôture séparable d'un corps) conjecturait que le topos étale réel est spatial, c'est-à-dire qu'il est équivalent à une catégorie de faisceaux sur un espace topologique. Nous avons pu montrer ce résultat (l'espace topologique en question est bien sur le spectre réel) [9]. Après une réduction de nature catégorique, on est amené à montrer qu'il y a au plus un morphsime de A-algèbres d'un A_α dans un A_β pour α et β précônes premiers de A. On y arrive en utilisant une idée d'A. Joyal qui permet d'isoler dans A_α une racine simple d'un polynôme à coefficients dans A au moyen d'une formule qui a pour paramètres ces coefficients. Comme on n'est pas dans un corps, mais dans un anneau local, on ne peut pas utiliser l'algorithme de Sturm pour effectuer ce repérage, et là est la difficulté.

REFERENCES

[1] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.-L. VERDIER : Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Lecture Notes in Math. n° 270, Springer-Verlag, 1972.

[2] M. ARTIN, B. MAZUR : On Periodic Points, Annals of Math. 81, p. 82-99, 1965.

[3] J. BOCHNAK, G. EFROYMSON : Real algebraic geometry and the 17^{th} Hilbert problem, Technical report n° 359, University of New-Mexico, 1978.

[4] G. W. BRUMFIEL : Partially ordered rings and semi-algebraic geometry, L.M.S. Lecture Notes Series n° 37, Cambridge University Press, 1979.

[5] M. COSTE : Localisation, Spectra and Sheaf Representation dans M. P. Fourman, C. J. Mulvey, D. S. Scott, éd. : Applications of Sheaves, Lecture Notes in Math. n° 753, Springer-Verlag, 1979.

[6] — : Dimension réelle, Pré-publications mathématiques n° 11, Université Paris-Nord, 1979.

[7] M. COSTE, M.-F. COSTE-ROY : Topologies for Real Algebraic Geometry, dans A. Kock, éd. : Topos Theoretic Methods in Geometry, Various Publications Series n° 30, Aarhus Universitet, 1979.

[8] — : Spectre de Zariski et spectre étale, du cas classique au cas réel, Séminaire de Mathématiques pures, rapport n° 82, Université Catholique de Louvain, 1979.

[9] — : Le spectre étale réel d'un anneau est spatial, C.R. Acad. Sc. Paris Série A t. 290, p. 91-94, 1980.

[10] — : La topologie du spectre réel d'un anneau, à paraître.

[11] M.-F. COSTE-ROY : Le spectre réel d'un anneau, Thèse, Université Paris-Nord, 1980.

[12] G. EFROYMSON : Local reality on algebraic varieties, J. of Algebra 29, p. 133-142, 1974.

[13] G. EFROYMSON : Substitution in Nash functions, Pacific Journal of Math. 63, p. 137-145, 1976.

[14] M. HAKIM : Topos annelés et schémas relatifs, Springer-Verlag, 1972.

[15] A. KOCK : Formally Real Local Rings, and Infinitesimal Stability, dans Topos Theoretic Methods in Geometry.

[16] J.-J. RISLER : Une caractérisation des idéaux des variétés algébriques réelles, C. R. Acad. Sc. Paris Série A t. 271, p. 1171-1173, 1970.