PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

C. U. JENSEN

Applications logiques en théorie des anneaux et des modules

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule S3
« Colloque d'algèbre », , p. 29-37
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___S3_29_0>

APPLICATIONS LOGIQUES EN THEORIE DES ANNEAUX ET DES MODULES

C.U. JENSEN

1. Préliminaires de la théorie des modèles.

Nous considérons le langage $\mathcal{L}$ des anneaux associatifs unitères. Un énoncé du premier ordre est une formule de $\mathcal{L}$ dont chaque variable se trouve dans la portée d'un quantificateur. On dit que deux anneaux R et S sont élémentairement équivalents (et l'on écrit $R \equiv S$) si R et S satisfont aux mêmes énoncés du premier ordre de $\mathcal{L}$. D'après un résultat de Keisler et Shelah [3] les anneaux R et S sont élémentairement équivalents si et seulement s'il existe un ensemble I et un ultrafiltre F sur I tels que les ultrapuissances correspondantes R^I/F et S^I/F sont des anneaux isomorphes.

Une classe $\underline{\underline{C}}$ d'anneaux est appelée élémentairement close si $R \in \underline{\underline{C}}$ et $R \equiv S$ impliquent $S \in \underline{\underline{C}}$. On dit qu'une classe $\underline{\underline{C}}$ d'anneaux est axiomatisable si $\underline{\underline{C}}$ peut etre définie par une famille d'énoncés du premier ordre de $\mathcal{L}$. De même on dit qu'une classe $\underline{\underline{C}}$ d'anneaux est finiment axiomatisable si $\underline{\underline{C}}$ peut etre définie par un seul énoncé du premier ordre de $\mathcal{L}$. Pour décider si une classe d'anneaux est (finiment) axiomatisable le critère suivant s'avère tres commode:

Proposition 1 [2]. i) Une classe $\underline{\underline{C}}$ d'anneaux est axiomatisable si et seulement si $\underline{\underline{C}}$ est élémentairement close et fermée pour la formation d'ultraproduits

ii) Une classe $\underline{\underline{C}}$ d'anneaux est finiment axiomatisable si et seulement si $\underline{\underline{C}}$ est axiomatisable et la classe $\bar{\underline{\underline{C}}}$ est fermée pour la formation d'ultraproduits, où $\bar{\underline{\underline{C}}}$ désigne la classe d'anneaux qui n'appartiennent pas à $\underline{\underline{C}}$.

2. Des exemples explicites.

Dans cette section nous faisons une liste de certaines classes d'anneaux et nous signalons les cas où elles sont élémentairement closes, axiomatisables ou finiment axiomatisables.

$\underline{\underline{C}}_1$ = la classe des corps.

$\underline{\underline{C}}_2$ = la classe des corps algébriquement clos.

$\underline{\underline{C}}_3$ = la classe des corps ordonnables.

$\underline{\underline{C}}_4$ = la classe des corps réels fermés.

$\underline{\underline{C}}_5$ = la classe des corps valués henséliens.

$\underline{\underline{C}}_6$ = la classe des anneaux intègres.

$\underline{\underline{C}}_7$ = la classe des anneaux artiniens (à gauche) de longueur donnée.

$\underline{\underline{C}}_8$ = la classe des anneaux artiniens (à gauche).

$\underline{\underline{C}}_9$ = la classe des anneaux quasi-frobeniusiens de longueur donnée.

$\underline{\underline{C}}_{10}$ = la classe des anneaux quasi-frobeniusiens.

$\underline{\underline{C}}_{11}$ = la classe des anneaux absolument plats.

$\underline{\underline{C}}_{12}$ = la classe des anneaux premiers.

$\underline{\underline{C}}_{13}$ = la classe des anneaux semi-primaires.

$\underline{\underline{C}}_{14}$ = la classe des anneaux parfaits (à gauche).

$\underline{\underline{C}}_{15}$ = la classe des anneaux primitifs (à gauche).

$\underline{\underline{C}}_{16}$ = la classe des anneaux noethériens (à gauche).

$\underline{\underline{C}}_{17}$ = la classe des anneaux principaux.

$\underline{\underline{C}}_{18}$ = la classe des anneaux de Dedekind.

$\underline{\underline{C}}_{19}$ = la classe des anneaux de Bézout.

$\underline{\underline{C}}_{20}$ = la classe des anneaux de Prüfer.

$\underline{\underline{C}}_{21}$ = la classe des anneaux cohérents.

$\underline{\underline{C}}_{22}$ = la classe des anneaux uniformement cohérents.

Un aperçu des résultats est donné dans le tableau suivant.

("+" désigne "oui" et " - " désigne "non".)

$\underline{\underline{C}}_i$	$\underline{\underline{C}}_1$	$\underline{\underline{C}}_2$	$\underline{\underline{C}}_3$	$\underline{\underline{C}}_4$	$\underline{\underline{C}}_5$	$\underline{\underline{C}}_6$	$\underline{\underline{C}}_7$	$\underline{\underline{C}}_8$	$\underline{\underline{C}}_9$	$\underline{\underline{C}}_{10}$	$\underline{\underline{C}}_{11}$
élém.close	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
axiomatisable	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-	+
finiment axiomatisable	+	-	-	-	-	+	+	-	+	-	+
close pour ultraproduits	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-	+

$\underline{\underline{C}}_i$	$\underline{\underline{C}}_{12}$	$\underline{\underline{C}}_{13}$	$\underline{\underline{C}}_{14}$	$\underline{\underline{C}}_{15}$	$\underline{\underline{C}}_{16}$	$\underline{\underline{C}}_{17}$	$\underline{\underline{C}}_{18}$	$\underline{\underline{C}}_{19}$	$\underline{\underline{C}}_{20}$	$\underline{\underline{C}}_{21}$	$\underline{\underline{C}}_{22}$
élém.close	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	+
axiomatisable	+	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-
finiment axiomatisable	+	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-
close pour ultraproduits	+	-	-	+	-	-	-	+	+	-	-

Le théorème suivant concerne les dimensions homologiques des anneaux élémentairement équivalents.

<u>Théorème 2.1.</u> Si R et S sont des anneaux élémentairement équivalents et R est cohérent à gauche, alors w.gl.dim.R $\leq$ w.gl.dim.S, où w.gl.dim désigne la dimension faible (la "Tor-dimension"). En particulier, w.gl.dim.R = w.gl.dim.S si R $\equiv$ S et R et S sont cohérents (pas forcément au même côté). De même, si R $\equiv$ S et R est noethérien à gauche, alors l.gl.dim.R $\leq$ l.gl.dim.S. En particulier, l.gl.dim.R = l.gl.dim.S si R $\equiv$ S et R et S sont noethériens à gauche.

Exemple 2.2. Pour tout corps K l'anneau $R = K[X,Y]$ est uniformément cohérent. Donc, w.gl.dim.S = 2 pour chaque anneau S qui est élémentairement équivalent à R.

En général, la dimension globale n'est pas stable sous équivalence élémentaire. En effet

Théoreme 2.3. [7] Pour tout anneau commutatif et noethérien R pour lequel gl.dim.R > 0 , il existe un anneau S tel que $R \equiv S$ et gl.dim.S = ∞ . Dans le cas spécial $R = \underline{\underline{Z}}$, l'anneau des entiers, il existe (sous l'hypothèse généralisée du continu) pour chaque entier positif n un anneau R_n tel que $R_n \equiv \underline{\underline{Z}}$ et gl.dim.R_n = n.

Un anneau R est appelé un anneau de Peano si $R \equiv \underline{\underline{Z}}$. Notons des faits curieux sur ces anneaux. [4, 7]

Si R est un anneau de Peano et $R \neq \underline{\underline{Z}}$, alors R est non-noethérien et la dimension de Krull de R est non-dénombrable.

On dit qu'un corps K est un corps de Peano si $K \equiv \underline{\underline{Q}}$, où $\underline{\underline{Q}}$ est le corps des nombres rationnels. On déduit de [9] que tout corps de Peano est le corps des fractions d'un anneau de Peano. Il s'ensuit de ce qui précède que le degré de transcendance sur $\underline{\underline{Q}}$ de tout corps de Peano K, $K \neq \underline{\underline{Q}}$, est infini.

Le fait ci-dessus que R est non-noethérien si $R \equiv \underline{\underline{Z}}$, $R \neq \underline{\underline{Z}}$, n'est pas typique. En effet, le langage des anneaux est dénombrable et l'ensemble des formules est dénombrable. Par le "principe des tiroirs" on en conclut que toute famille d'anneaux, à laquelle appartiennent plus de $2^{\aleph_0}$ anneaux non-isomorphes, contient des anneaux élémentairement équivalents et non-isomorphes. Donc il existent des anneaux principaux (qui ne sont pas des corps) qui sont élémentairement équivalent et non-isomorphes.

On obtient des exemples explicites comme suit:

[1] Si K et L sont des corps élémentairement équivalents

de la caractéristique zéro, alors $K[[X]] \equiv L[[X]]$.

Le résultat correspondant n'est pas vrai pour les anneaux de polynômes.(Par exemple, pour tout corps $K \neq \underline{\underline{Q}}$ les anneaux $K[X]$ et $\underline{\underline{Q}}[X]$ ne sont pas élémentairement équivalents; voir aussi ci-après.) Cependant, si K et L sont des corps algébriquement clos de la même caractéristique tels que leur degrés de transcendance sur le corps premier sont infinis, alors $K[X] \equiv L[X]$. Il est une question ouverte de savoir ce qui se passe lorsque l'hypothèse concernant les degrés de transcendance est supprimée. En particulier, si $\bar{\underline{\underline{Q}}}$ désigne le corps des nombres algébriques et $\underline{\underline{C}}$ le corps des nombres complexes on ignore si $\bar{\underline{\underline{Q}}}[X] \equiv \underline{\underline{C}}[X]$. D'autre part, si $\underline{\underline{R}}$ désigne le corps des nombres réels, c'est assez facile de voir que $(\bar{\underline{\underline{Q}}} \cap \underline{\underline{R}})[X] \not\equiv \underline{\underline{R}}[X]$, bien que $\left(\bar{\underline{\underline{Q}}} \cap \underline{\underline{R}}\right) \equiv \underline{\underline{R}}$.

3. Applications en théorie des algèbres de dimension finie.

Dorénavant, K désigne un corps (commutatif) infini, et l'on considère des K-algèbres R dont la K-dimension est un entier fixe d. Pour un entier t fixe soit $\mathrm{Ind}_t(R)$ l'ensemble de classes d'isomorphisme de R-modules indécomposables de longueur t.

On dit que R est de représentation finie, si $\sum_{t=1}^{\infty} |\mathrm{Ind}_t(R)| < \infty$ Dans le cas contraire on dit que R est de représentation infinie.

En établissant une conjecture de Brauer-Thrall Nazarova-Roiter- Ringel ont démontré qu'il existe pour toute K-algèbre R de représentation infinie un ensemble infini d'entiers t tels que $|\mathrm{Ind}_t(R)| = |K|$.

Les résultats du reste de cette section se trouvent dans [6, 8].

Proposition 3.1. Soient I un ensemble et F un ultrafiltre sur I. Soient $\{K_\alpha\}$, $\alpha \in I$, une famille de corps infinis et $\{R_\alpha\}_{\alpha \in I}$ une famille de K_α-algèbres de K_α-dimension d, d étant un entier fixe. Alors l'ultraproduit $R^* = \prod_{\alpha \in I} R_\alpha/F$ est une algèbre de dimension d sur l'ultraproduit $K^* = \prod_{\alpha \in I} K_\alpha/F$, et pour tout entier t il y a une bijection canonique

$$\prod_{\alpha \in I} \mathrm{Ind}_t(R_\alpha)/F \longrightarrow \mathrm{Ind}_t(R^*).$$

<u>Corollaire 3.2.</u> Les algèbres de représentation finie forment une classe élémentairement close.

En utilisant la proposition 3.1 et le résultat de Nazarova-Roiter-Ringel on obtient

<u>Théorème 3.3.</u> Il existe une fonction f: $\underline{\underline{N}}^2 \to \underline{\underline{N}}$ avec la propriété suivante. Pour tout corps infini K et toute K-algèbre R de K-dimension d et de représentation finie, on a $|\mathrm{Ind}_t(R)| \leqq f(d,t)$ pour tout entier t.

<u>Corollaire 3.4.</u> Pour chaque entier d fixe les algèbres de dimension d sur un corps infini de représentation finie forment une classe axiomatisable.

En vertu d'une analyse sémantique de certaines dimensions cohomologiques on prouve

<u>Théorème 3.5.</u> Pour chaque entier d fixe les algèbres de dimension d sur un corps infini de représentation finie forment une classe finiment axiomatisable. Il existe deux fonctions g et h: $\underline{\underline{N}} \to \underline{\underline{N}}$ avec les propriétés suivantes. Pour tout corps infini K et toute K-algèbre R de K-dimension d et de représentation finie, la longueur de chaque R-module indécomposable est $\leqq$ g(d), et le nombre total $|\mathrm{Ind}(R)|$ de R-modules indécomposables est $\leqq$ h(d).

<u>Corollaire 3.6.</u> Il existe une fonction h: $\underline{\underline{N}} \to \underline{\underline{N}}$ avec la propriété suivante. Pour tout corps K infini et toute K-algèbre R de K-dimension d et de représentation finie, la dimension globale gl.dim.R est ou bien infinie ou bien $\leqq$ h(d).

Faisons mention d'une autre conséquence du théorème 3.5. Le langage des corps algébriquement clos permet l'élimination quantificateurs (c.à d. toute formule du langage est équivalente à une formule sans quantificateurs). Donc, le fait que les algèbres de représentation finie et de dimension d sur un corps algébriquement clos sont finiment axiomatisables, entraîne que ces algèbres forment (par leurs constantes de structure) un ensemble constructible tel que les polynômes qui apparaissent dans la définition de constructibilité ont des coefficients entiers. Ceci précise un résultat de Gabriel [5].

A propos des algèbres de représentation infinie Ringel a fait la conjecture suivante: Si R est une K-algèbre de représentation infinie et $|\mathrm{Ind}_t(R)| = \infty$ pour un entier t, alors $|\mathrm{Ind}_s(R)| = \infty$ pour tout multiple s de t.

Le résultat suivant peut etre regardé comme une approximation faible de cette conjecture.

<u>Théorème 3.7.</u> Pour tout entier d fixe il existe une suite croissante $g_1 < g_2 < \dots < g_i < g_{i+1} < \dots$ avec la propriété suivante. Pour tout corps infini K et toute K-algèbre R de représentation infinie et de K-dimension d chaque intervalle $[g_i, g_{i+1}]$ contient un entier t pour lequel $|\mathrm{Ind}_t(R)| = \infty$

D'après le théorème 3.7 il existe pour tout corps K et chaque entier d un plus petit nombre $g = g(d,K)$ tel que pour toute K-algèbre R de représentation infinie et de K-dimension d il existe un nombre $t \leq g(d,K)$ pour lequel $|\mathrm{Ind}_t(R)| = \infty$

Il se trouve que $g(d,K) = g(d,L)$ si K et L sont des corps élémentairement équivalents. Deux corps algébriquement clos sont élémentairement équivalents si et seulement s'ils ont la même caractéristique. Par conséquent, pour tout p qui est un nombre premier ou 0 on peut définir $g(d,p) = g(d,K)$, où K est un corps (quelconque) algébriquement clos de la caractéristique p.

<u>Proposition 3.8.</u> Pour tout entier d il existe un ensemble fini E_d de nombres premiers tel $g(d,0)= g(d,p)$ pour tout nombre premier p, $p \notin E_d$.

Pour terminer, encore un résultat concernant les algèbres de représentation infinie sur un corps algébriquement clos.

<u>Théoreme 3.9.</u> Il existe une fonction $\beta : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ avec la propriété suivante: Pour tout corps algébriquement clos K et toute K-algèbre R de K-dimension d et tout entier t on a ou bien $|\mathrm{Ind}_t(R)| = K$ ou bien $|\mathrm{Ind}_t(R)| \leq \beta(d,t)$.

B I B L I O G R A P H I E.

1. J.Ax and S.Kochen, Diophantine problems over local fields III Decidable fields, Ann.of Math. 83 (1966), 437-456.
2. J.L.Bell and A.B.Slomsom, Models and Ultraproducts, North Holland Publ.Comp. 1969.
3. W.W.Comfort and S.Negrepontis, The Theory of Ultrafilters, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 1974.
4. G.Cherlin, Ideals in some nonstandard Dedekind rings, Logique et Analyse, 71-72 (1975), 379-406.
5. P.Gabriel, Finite representation type is open, in Representation of Algebras, Lecture Notes in Mathematics 488, Springer, 1975.
6. C.Hermann, C.U.Jensen and H.Lenzing, Applications of model theory to representations of finite dimensional algebras, (à paraître).
7. C.U.Jensen, Peano rings of arbitrary global dimension, à paraître au J.London Math.Soc.
8. C.U.Jensen and H.Lenzing, Model theory and representations of algebras,Proceedings of the 2^{nd} Int.Conference on Representations of Algebras, Ottawa 1979, Springer Lecture Notes,(à paraître).
9. J.Robinson, Definability and decision problems in arithmetic, J.Symb.Logic 14 (1949), 98-114.

Matematisk Institut

Universitetsparken 5

DK-2100 Copenhague Ø

Danemark.