

BERNARD DERRIDA

**Quelques exemples de problèmes physiques où interviennent  
des produits de matrices aléatoires**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1982, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1982\\_\\_1\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982__1_A2_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES EXEMPLES DE PROBLEMES PHYSIQUES OU  
INTERVIENNENT DES PRODUITS DE MATRICES ALEATOIRES

par

Bernard Derrida

INTRODUCTION

Les produits de matrices aléatoires apparaissent en physique dès que l'on cherche à étudier des systèmes unidimensionnels désordonnés. Le plus souvent on veut calculer les propriétés du produit d'un grand nombre de matrices aléatoires, à commencer par le coefficient de Lyapounov  $\gamma$  défini lorsque la limite existe par

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left[ \text{tr} \prod_{i=1}^N M_i \right]$$

où les  $M_i$  sont des matrices aléatoires dont la forme et la distribution dépendent du problème physique que l'on se pose. Le coefficient de Lyapounov généralise au cas des matrices aléatoires la notion de valeur propre. Malheureusement, il n'existe pas de méthode générale pour le calculer, même dans le cas où les matrices  $M_i$  sont  $2 \times 2$ . Une façon de faire est de résoudre le problème numériquement en tirant les matrices  $M_i$  au hasard sur ordinateur. L'autre possibilité, à laquelle ce qui suit est consacré, consiste à essayer de faire des développements autour de situations simples : les matrices  $M_i$  commutent presque, la distribution des matrices  $M_i$  est très concentrée etc...

Depuis le travail de Dyson <sup>[1]</sup> (1953), les problèmes unidimensionnels désordonnés ont motivé de nombreux travaux chez les physiciens qu'il serait beaucoup trop long de citer ici. Dans ce qui suit, j'ai choisi de présenter quelques exemples qui me sont familiers et qui me paraissent, chacun représentatif d'une méthode de développement différente. Chacune de ces méthodes conduit à des calculs assez longs qu'il n'est pas possible de reproduire ici. Il ne fait pas de doute que certains de ces méthodes ont dû être utilisées antérieurement dans la littérature.

Dans le 1<sup>er</sup> exemple, le produit de matrices aléatoires peut se ramener à un processus de Markov avec un nombre fini ou dénombrable d'états. Dans

l'exemple 2, on essaie de développer autour d'une situation où les matrices  $M_i$  commutent. Enfin dans les exemples 3 et 4, on considère des cas où la distribution des matrices aléatoires est très concentrée.

1. Exemple 1 : chaîne d'Ising aléatoire dans un champ magnétique uniforme [2]

Le calcul des propriétés d'une chaîne d'Ising dans un champ magnétique uniforme et dont les interactions ont des signes aléatoires peut se ramener au calcul d'une quantité  $F$  appelée l'énergie libre définie par :

$$F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log [\text{tr} \prod_{i=1}^N M_i]$$

où les matrices  $M_i$  sont aléatoires et distribuées selon la loi :

$$M_i = \begin{pmatrix} z^{1+\alpha} & z^{-1+\alpha} \\ z^{-1-\alpha} & z^{1-\alpha} \end{pmatrix} \text{ avec probabilité } \frac{1}{2}$$

ou

$$M_i = \begin{pmatrix} z^{-1+\alpha} & z^{1+\alpha} \\ z^{1-\alpha} & z^{-1-\alpha} \end{pmatrix} \text{ avec probabilité } \frac{1}{2}$$

$z$  et  $\alpha$  sont deux nombres positifs reliés à la température et au champ magnétique.

On ne sait pas calculer  $F$  pour un choix quelconque de  $\alpha$  et de  $z$ . Par contre, on peut trouver le début du développement de  $F$  dans la limite  $z \rightarrow \infty$  qui correspond au développement de basse température. La raison pour laquelle le calcul se simplifie dans la limite  $z \rightarrow \infty$  est la suivante : quand on effectue un produit de 2 matrices  $A$  et  $B$ , chaque élément du produit est la somme de produits d'éléments de  $A$  et de  $B$ . Dans la limite  $z \rightarrow \infty$ , on peut remplacer cette somme par le terme maximum de la somme chaque fois que les termes de la somme n'ont pas la même puissance de  $z$ .

On obtient [2] pour  $z \rightarrow \infty$  :

$$F = E \log z + S + o(1)$$

E est relié à l'énergie, S à l'entropie. E et S sont donnés par

$$\text{Si } \frac{2}{n+1} < \alpha < \frac{2}{n} \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{n^2 + 3n + 2\alpha(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ S = \frac{1}{4(n+1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{-2(n+1)} \right]^{p-1} \log p \end{array} \right.$$

où n est la partie entière de  $2/\alpha$

$$\text{Si } \alpha = \frac{2}{n} \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{n^2 + n + 2}{n+1} \\ S = \frac{1}{n} \sum_y H(y) \log y \end{array} \right.$$

où la somme sur y porte sur l'ensemble de points formé par le point  $y=2$  et tous les points que l'on peut atteindre à partir de 2 en combinant dans tous les ordres possibles les applications  $T_1$  et  $T_2$

$$T_1(x) = 1 + x \quad \text{et} \quad T_2(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

On obtient ainsi les points 3, 3/2, 4, 4/3, 5/2, 5/3 etc... La fonction H étant définie sur ces points par

$$H(2) = \frac{1}{4(n+1)}$$

$$H(T_1(y)) = H(1+y) = \frac{n-1}{2n} H(y)$$

$$H(T_2(y)) = H\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2n} H(y)$$

La suite du développement de F dans la limite  $z \rightarrow \infty$  est sans doute de plus en plus compliquée. L'expression de S dans le cas  $\alpha = 2/n$  donne déjà une idée de cette complexité.

Le même genre de méthode peut être utilisée dans d'autres problèmes comme celui d'une marche auto-évitante sur un ruban aléatoire [3].

2. Exemple 2 : Cas d'un produit de matrices qui commutent presque [4]

On peut ramener le problème d'une chaîne d'Ising dans un champ aléatoire ou d'un système unidimensionnel de polymères dans un potentiel aléatoire à celui du calcul d'un coefficient de Lyapounov  $F(\varepsilon)$  défini par :

$$F(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left[ \text{tr} \prod_{i=1}^N \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon z_i & z_i \end{pmatrix} \right]$$

où les  $z_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et positives, distribuées selon une loi  $\rho(z)$ . Quand  $\varepsilon = 0$ , on connaît  $F$  :

$$F(0) = \max [0, \overline{\log z}]$$

où la barre désigne la moyenne par rapport à  $\rho(z)$

$$\overline{\log z} = \int \rho(z) \log z \, dz$$

La question que nous nous sommes posée est celle du développement de  $F(\varepsilon)$  pour  $\varepsilon$  petit. Limitons nous au cas où

$$\overline{\log z} < 0$$

Tout ce qui suit se transpose facilement au cas  $\overline{\log z} > 0$ .

On constate en faisant le calcul [3] que pour que le développement de  $F(\varepsilon)$  en puissances de  $\varepsilon$  existe jusqu'à l'ordre  $\varepsilon^{2n}$ , il faut que  $\overline{z^n} < 1$ . Par exemple, si  $\overline{z^2} < 1$  mais  $\overline{z^3} > 1$ , on ne peut obtenir que 2 termes de ce développement

$$F(\varepsilon) = \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \frac{(1+\overline{z})^2 \overline{z^2} + 2\overline{z^2} (1-\overline{z^2})}{(1-\overline{z})^2 (1-\overline{z^2})} \varepsilon^4 + ?$$

et quand on essaie de calculer le coefficient de  $\varepsilon^6$ , celui ci est infini. On voit que si  $\overline{z^2} \rightarrow 1^-$ , le coefficient de  $\varepsilon^4$  diverge. De même si  $\overline{z} < 1$

mais  $\overline{z^2} > 1$ , on ne peut obtenir que le 1<sup>er</sup> terme

$$F(\varepsilon) = \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} \varepsilon^2 + ?$$

La région la plus intéressante est le cas où  $\overline{\log z} < 0$  mais  $\overline{z} > 1$ . Dans ce cas, le comportement de  $F(\varepsilon)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  est une loi de puissance

$$F(\varepsilon) \sim K \varepsilon^{2\alpha}$$

où  $\alpha$  est la solution réelle positive de

$$\overline{z}^\alpha = 1$$

Ce comportement en loi de puissance peut être justifié [4]. Néanmoins le calcul de la constante  $K$  et des termes suivants de ce développement pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  paraît beaucoup plus difficile.

### 3. Exemple 3 : Cas d'une distribution très concentrée [5]

Considérons l'équation de Schrödinger sur un réseau à 1 dimension

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \lambda V_n \psi_n = E \psi_n$$

Pour un choix quelconque de  $\psi_0$  et  $\psi_1$ , les  $\psi_n$  vont augmenter exponentiellement avec  $n$  et le taux de croissance est le coefficient de Lyapounov  $\gamma(E)$ . Si l'on pose

$$R_n = \frac{\psi_n}{\psi_{n-1}}$$

Le coefficient de Lyapounov  $\gamma(E)$  est défini par

$$\gamma(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log R_n$$

Nous cherchons à trouver ici un moyen de développer  $\gamma(E)$  en puissances de  $\lambda$ . On peut écrire la formule de récurrence des  $R_n$  :

$$R_{n+1} = E - \lambda V_n - \frac{1}{R_n}$$

On suppose qu'on peut développer les  $R_n$  en puissances de  $\lambda$  de la manière suivante

$$R_n = A \exp[\lambda B_n + \lambda^2 C_n + \dots]$$

En reportant dans la récurrence sur les  $R_n$ , on obtient en égalant ordre par ordre les puissances de  $\lambda$

$$A = E - A^{-1}$$

$$A B_{n+1} = -V_n + A^{-1} B_n$$

$$A \left( C_{n+1} + \frac{B_{n+1}^2}{2} \right) = A^{-1} \left( C_n - \frac{B_n^2}{2} \right)$$

On obtient alors pour  $\gamma(E)$

$$\gamma(E) = \log A + \lambda \langle B_n \rangle + \lambda^2 \langle C_n \rangle + \dots$$

où  $A$  est la racine la plus grande en module de  $A + A^{-1} = E$  et les moyennes  $\langle \rangle$  ont la signification suivante

$$\langle B_n \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N B_n$$

Nous allons maintenant examiner 2 cas : le cas où le potentiel  $V_n$  est aléatoire et celui où il est quasipériodique.

### 3.a Cas aléatoire

Quand les  $V_n$  sont aléatoires, non corrélés et de moyenne nulle :

$$\langle V_n \rangle = 0 ; \langle V_n V_m \rangle = V^2 \delta_{n,m}$$

On obtient

$$\langle B \rangle = 0 ; C = -\frac{i}{2} \frac{A^2}{(A^2-1)^2} V^2$$

et donc

$$\gamma(E) = \log A - \frac{\lambda^2}{2} \frac{A^2}{(A^2-1)^2} V^2 + \dots$$

Ce calcul particulièrement simple peut être poursuivi pour obtenir le développement de  $\gamma(E)$  en puissances de  $\lambda$ . Il est intéressant de remarquer que déjà l'ordre  $\lambda^2$  permet de comprendre l'effet de localisation. En effet, quand on prend  $E$  sur le spectre, cela revient à choisir  $A = e^{ik}$ , le terme en  $\lambda^2$  devient réel, ce qui indique qu'il y a localisation.

### 3.b Cas quasipériodique

On peut utiliser la même méthode quand le potentiel est quasipériodique

$$V_n = \cos(qn + \varphi)$$

et où  $q$  est incommensurable avec  $2\pi$ .

On obtient

$$\lambda = \log A - \frac{\lambda^2}{4} \frac{A^2+1}{A^2-1} \frac{A^2}{A^4-2A^2 \cos q + 1}$$

Quand  $A \rightarrow e^{ik}$ , la correction en  $\lambda^2$  est imaginaire contrairement au cas du potentiel aléatoire. On voit ainsi que le potentiel quasipériodique n'a pas tendance à localiser pour  $\lambda$  petit [6].

### 4. Exemple 4 : Cas d'impuretés très diluées

On cherche encore une fois à calculer le coefficient de Lyapounov  $\gamma$  dans le cas où les matrices  $M_i$  sont distribuées selon la loi :

$$M_i = A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ avec probabilité } 1 - x$$

$$M_i = B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ avec probabilité } x$$

où on suppose que  $\lambda_1 > |\lambda_2| > 0$ . Les matrices  $A$  et  $B$  correspondent respectivement à l'absence ou à la présence d'impuretés.

On peut développer  $\gamma$  en puissances de  $x$  et on obtient

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left( \text{tr} \prod_{i=1}^N M_i \right) \\ &= \log \lambda_1 + x \log \left( \frac{\alpha}{\lambda_1} \right) + x^2 \sum_{q=0}^{\infty} \log \left[ 1 + \frac{\beta \gamma}{\alpha^2} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^q \right] \\ &+ \dots\end{aligned}$$

Ce développement s'obtient en regardant l'effet d'une seule matrice  $B$  pour le terme en  $x$ , l'effet de 2 matrices  $B$  séparées par  $q$  matrices  $A$  avec  $0 \leq q < \infty$  pour le terme en  $x^2$ , l'effet de 3 matrices  $B$  séparées par  $q$  et  $r$  matrices  $A$  pour le terme en  $x^3$  etc... Ce développement devient de plus en plus compliqué : les coefficients des puissances successives de  $x$  sont des sommes multiples de logarithmes. Il est important de noter que chaque ordre de ce développement apporte de nouvelles restrictions sur sa validité : le premier terme n'est valable que si  $\alpha \neq 0$ , le second terme n'est valable que si tous les arguments des logarithmes ne s'annulent pas et ainsi de suite. Cela ressemble beaucoup à l'exemple 2 où chaque terme du développement en  $\varepsilon^2$  imposait des contraintes plus fortes que le terme précédent.

#### REMERCIEMENTS

Les exemples qui précèdent proviennent de collaborations très enrichissantes avec J. Avron, H.J. Hilhorst, Y. Pomeau et J. Vannimenus que je voudrais remercier ici. Je tiens également à remercier le Professeur Y. Guivarc'h et l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes pour leur hospitalité.

REFERENCES

1. F.J. Dyson, Physical Review 92, 1331 (1953)
2. B. Derrida, Y. Pomeau et J. Vannimenus, Journal of Physics C11, 4749 (1978)
3. B. Derrida, Journal of Physics A15, L119 (1982)
4. B. Derrida et H.J. Hilhorst, 1982 à paraitre
5. Cet exemple reproduit des discussions avec J. Avron au Aspen Center for Physics
6. S. Aubry et G. André : Annals of the Israel Physical Society 3, 133 (1980) ed. L.P. Horwitz and Y. Ne'eman.

B. Derrida  
Service de Physique Théorique  
CEN SACLAY  
91191 Gif sur Yvette