Y. GUIVARC'H

# Sur la représentation intégrale des fonctions harmoniques et des fonctions propres positives dans un espace riemannien symétrique

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1982, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982___1_A3_0>

Séminaires de Probabilités 1982
Université de Rennes I

# SUR LA REPRESENTATION INTEGRALE DES FONCTIONS HARMONIQUES ET DES FONCTIONS PROPRES POSITIVES DANS UN ESPACE RIEMANNIEN SYMETRIQUE

par Y. GUIVARC'H

On donne ici une preuve courte de la formule de Poisson représentant les solutions bornées de l'équation $\Delta f = 0$ où $\Delta$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à un espace symétrique de type non compact, ce qui répond à une question de A. Koranyi [ 12 ] . On donne également suivant les idées de [ 9 ] , une courte preuve de la formule de représentation intégrale des solutions positives de l'équation $\Delta f = cf$.
Cette formule de représentation intégrale a été d'abord obtenue par E.B. Dynkin [ 6 ] dans le cadre de l'étude du mouvement brownien sur certains espaces symétriques. Ce travail a été étendu au cas général par F.I. Karpelevič [ 11 ] dans le cadre d'une étude à l'infini des géodésiques. Ces deux auteurs suivent la méthode de la frontière de Martin.

La technique ici utilisée repose sur les idées développées dans le cadre général des opérateurs de convolution par H. Furstenberg [ 8 ] [ 9 ], où les propriétés des fonctions harmoniques extrémales jouent un rôle essentiel. Pour des travaux connexes relatifs aux fonctions propres des opérateurs de convolution , signalons [ 3 ] , [ 7 ]et[ 17 ] .

Les deux résultats obtenus ici correspondent à ceux établis par G. Choquet et J. Deny dans le cas d'un groupe abélien [ 2 ] et pourraient d'ailleurs s'étendre aux paires de Gelfand. Il est clair que la formule générale de représentation intégrale permet de retrouver la formule de Poisson mais la simplicité de celle-ci justifie une démonstration indépendante.

## A) LA FORMULE DE POISSON

On désignera par G un groupe semi-simple sans facteurs compacts, par K un sous-groupe compact maximal, par $G/K$ l'espace symétrique correspondant.

On sait que G se décompose sous la forme d'Iwasawa $G = K\,AN$ où AN est un sous-groupe résoluble connexe maximal. Si M est le centralisateur de A dans K , le normalisateur de AN s'écrit M AN de sorte que l'espace homogène compact $B = G/MAN$ s'écrit aussi $B = K/M$ . Enfin soit m (ou dk) la mesure de Haar normalisée sur K et $\bar{m}$ son image naturelle sur $B = K/M$ .

En général, on notera à l'aide d'un point les actions d'un groupe sur un espace (différent du groupe lui-même).
L'objet de ce paragraphe est de justifier le théorème suivant.
Il découlera de trois propositions.

THEOREME :

*Soit* $f$ *une solution bornée de* $\Delta f = 0$
*Alors il existe un unique élément de* $\mathbb{L}^{\infty}(B)$ , *noté* $\hat{f}$ , *tel que*

$$f\,(g.\bar{o}) = \int_B \frac{dg.\bar{m}}{d\bar{m}}\,(b)\ \hat{f}(b)\ d\ \bar{m}(b) = g.\bar{m}(\hat{f})$$

*L'espace homogène* $B = G/MAN$ *est appelé frontière de Furstenberg* *de* G *et* $\frac{dg.\bar{m}}{d\bar{m}}(b)$ (ou $g.\bar{m}$) *est appelé noyau de Poisson de* G.

Notons que les mesures sur G bi-invariantes par K s'identifient aux mesures K-invariantes sur l'espace homogène $G/K$ et que la convolution à droite d'une fonction sur $G/K$ par une telle mesure (à support compact) est bien définie, ce qui justifiera des abus de notation. On désigne par o l'origine de $G/K$.

PROPOSITION 1

*Il existe une mesure de probabilité* $\nu$, *bi-invariante par* K, *de support égal à la sphère géodésique unité* S *de* $G/K$ *centrée à l'origine, telle que, pour toute solution de* $\Delta f = 0$, *on ait*

$$f(g.o) = g.\nu(f) = \int_S f(g.s)\, d\nu(s)$$

*ou encore* $f = f * \nu$.

Preuve :

On sait que $G/K$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.
La solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur elliptique $\Delta$ vérifiant $\Delta 1 = 0$, dans la boule géodésique unité [ 4 ] permet d'associer à chaque fonction continue $\phi$ sur S une unique fonction h harmonique prolongeant $\phi$ dans la boule unité.

Puisque $\Delta 1 = 0$, d'après le principe du maximum il existe un unique noyau $x \to \nu_x$ où $\nu_x$ est une probabilité de support S, telle que $h(x) = \nu_x(\phi)$.

Comme S est K-invariante et que $\Delta$ commute avec K, $\nu_o = \nu$ est K-invariante. En particulier, pour toute f harmonique dans $G/K$ on a $f(o) = \nu(\tilde{f})$ où $\tilde{f}$ est la restriction de f à S

Donc, puisque G commute avec $\Delta$

$$f(g\cdot o) = g.\nu(f)$$

ou encore $$f = f * \nu$$

Justifions pour être complet, la proposition suivante [ 16 ] .

<u>PROPOSITION 2</u>

*Soient* P *et* Q *deux contractions qui commutent d'un espace de Banach* E . *Alors tout vecteur fixé par* $\alpha P + (1-\alpha)Q$ $(0 < \alpha < 1)$ *est aussi fixé par* P *et* Q .

La preuve repose sur le lemme.

<u>LEMME</u>

*Avec les notations précédentes, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \|[\alpha P + (1-\alpha)Q]^n (P-Q)\| = 0$$

<u>Preuve</u>

Puisque P et Q commutent la formule du binôme donne

$$[\alpha P + (1-\alpha)Q]^n = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_n^k P^k Q^{n-k} \quad \text{avec} \quad \gamma_n^k = C_n^k \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$$

$$[\alpha P + (1-\alpha)Q]^n [P-Q] = \sum_{k=0}^{n-1} (\gamma_n^k - \gamma_n^{k+1}) P^{k+1} Q^{n-k} + \gamma_n^n P^n - \gamma_n^0 Q^n$$

$$\|[\alpha P + (1-\alpha)Q]^n [P-Q]\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma_n^k - \gamma_n^{k+n}| + \gamma_n^n + \gamma_n^0 .$$

puisque P et Q sont des contractions.

Lorsque n est fixé $\gamma_n^k$ est d'abord fonction croissante de k, puis fonction décroissante, le maximum étant atteint en un entier proche de $\alpha^n$. Plus précisément, le rapport $\dfrac{\gamma_n^{k+1}}{\gamma_n^k}$ vaut $\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{n+1}{k+1}\right] - 1]$, quantité inférieure à 1 pour $k > \alpha n + \alpha - 1$.

Le maximum est donc atteint en $\gamma_n^k = \alpha_n n$ avec $|\alpha_n - \alpha| \leq \frac{1}{n}$.

Ce maximum est borné par $\frac{c}{\sqrt{n}}$ comme le montre la formule de Stirling :

$$\gamma_n^k \sim \left(\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{n\alpha_n}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha n}\right)^{n(1-\alpha_n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi n\ \alpha_n(1-\alpha_n)}}$$

avec $\frac{\alpha}{\alpha_n}$ et $\frac{1-\alpha}{1-\alpha_n}$ bornés par $1 + \frac{K}{n}$, ce qui montre que $\left(\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{n\ \alpha_n}$ et $\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha_n}\right)^{n(1-\ \alpha_n)}$ sont des suites bornées.

On a enfin, en tenant compte des propriétés précédentes :

$$||[\alpha P + (1-\alpha)Q]^n\ [P-Q]\ || \leq 2\ \gamma_n^{n\alpha_n} \leq \frac{2c}{\sqrt{n}}$$

ce qui justifie le lemme.

La proposition en découle immédiatement car l'égalité

$$[\alpha P + (1-\alpha)Q\ ]x \quad = x$$

implique $(P-Q)x = [\alpha P + (1-\alpha)Q]^n\ [P-Q]\,x$

et $\qquad Px = Qx = x$

par passage à la limite.

Disons qu'une fonction f possède la propriété de moyenne dans G s si pour toute probabilité biinvariante $\lambda$ on a $f = f * \lambda$.
Ceci signifie que la valeur de f en g.o est égale à la moyenne

de f (au sens de K) sur n'importe quelle orbite de $g\,K\,g^{-1}$ dans $G/K$. Les deux propositions précédentes ont pour conséquence le

COROLLAIRE

*Toute solution bornée de* $\Delta f = 0$ *possède la propriété de moyenne.*

Preuve

Soit $a \in S$, A un voisinage de a dans S et décomposons la probabilité $\nu$ de la proposition 1 en $\nu_A$ et $\nu'_A$, ses restrictions normalisées à l'ouvert KA et à son complémentaire complémentaire : $\nu = \alpha\nu_A + (1-\alpha)\nu'_A$.
On a $\alpha \neq 0$ puisque $\nu$ charge A.

Considérons l'espace de Banach des fonctions f continues bornées sur $G/K$ vérifiant $f = f * \nu$. Comme $\nu_A$ et $\nu'_A$ sont bi-invariantes, elles commutent avec $\nu$ [ 10 ] et définissent des contractions qui commutent de l'espace précédent.
D'après la proposition 2, on a donc, pour tout f de cet espace $f = f * \nu_A$. A la limite, $\nu_A$ converge vaguement vers la mesure K-invariante normalisée $\nu_a$ sur l'orbite de a suivant K.
On a donc puisque f est continue $f = f * \nu_a$.
Faisant varier a et remplaçant la sphère géodésique unité par une sphère de rayon quelconque, on obtient la propriété de moyenne.

PROPOSITION 3

*La formule* $f(g) = g.\overline{m}(\phi)$ *définit une bijection entre l'espace* $\mathbb{L}^\infty(B)$ *et l'espace des fonctions de* $\mathbb{L}^\infty(G/K)$ *vérifiant la propriété de moyenne.*

Preuve

Soit $\phi$ donnée, f définie par la formule et $\nu$ une probabilité bi-invariante sur G.
Alors $f * \nu(g) = \int f(gh)\, d\nu(h) = g.(\nu * \bar{m})(\phi) = g.\bar{m}(\phi) = f(g)$ car $\nu * \bar{m} = \bar{m}$ ce qui prouve que f possède la propriéte de moyenne.

Observons que si $\tilde{\mathfrak{n}}$ est l'algèbre de Lie opposée à $\mathfrak{n}$ algèbre de N, il existe des éléments $a \in A$ tel que toutes les valeurs propres de Ada, restreintes à $\tilde{\mathfrak{n}}$, soient de module strictement inférieur à 1.
Puisque B s'identifie mesurablement à $\tilde{N}$ en raison de la décomposition (p.p) $G = \tilde{N}\, MAN$, $\bar{m}$ s'identifie à un élément de $\mathbb{L}^1(\tilde{N})$. Ceci implique que la suite de mesures $a^n\bar{m}$ converge vaguement, quand n tend vers $+\infty$, vers la mesure de Dirac $\delta_{b_o}$ associée à l'origine de $G/_{MAN}$.

De cette remarque découle que deux fonctions continues $\phi$ et $\psi$ sur B vérifiant $g.\bar{m}(\phi) = g.\bar{m}(\psi)$ sont égales : en passant à la limite dans $g\, a^n.\bar{m}(\phi) = g\, a^n.\bar{m}(\psi)$, on obtient $\phi(g.b_o) = \psi(g.b_o)$ soit $\phi = \psi$.
Pour $\phi$ et $\psi$ dans $\mathbb{L}^\infty(B)$ on obtient à partir de l'égalité (p.p) : $g.\bar{m}(\phi) = g.\bar{m}(\psi)$ $\phi = \psi$ (p.p).

L'application $\phi \to g.\bar{m}(\phi)$ est donc bien une injection dans l'espace des fonctions satisfaisant la propriété de moyenne.

Soit $\mu$ une forme linéaire sur $\mathbb{L}^\infty(G)$ invariante par translation à gauche par les éléments de MAN. L'existence d'une telle forme est assurée par la moyennabilité de MAN.
Notons $f_x$ la translatée à gauche de f par x [ $f_x(g) = f(xg)$] et supposons $f \in \mathbb{L}^\infty(G)$ uniformément continue à gauche.
Alors la formule $\hat{f}(x) = \mu(f_x)$ définit une fonction continue de x, invariante à droite par MAN d'après la nature de $\mu$.

On peut donc associer ainsi à tout élément de $\mathbb{L}^{\infty}(G)$ uniformément continu à gauche, un élément de $\mathbb{L}^{\infty}(B)$. Lorsque f est quelconque dans $\mathbb{L}^{\infty}(G)$, le même procédé reste valable à condition de poser $\hat{f}(\alpha) = \mu[\check{\alpha} * f]$ pour tout élément $\alpha$ de $\mathbb{L}^{1}(G)$ ; l'application $\alpha \to \hat{f}(\alpha)$ est alors une forme linéaire sur $\mathbb{L}^{1}(G)$, et s'identifie encore à un élément de $\mathbb{L}^{\infty}(B)$.

Supposons $f \in \mathbb{L}^{\infty}(G)$, vérifiant la propriété de moyenne, uniformément continue à gauche et montrons que $f(g) = g\cdot\overline{m}(\hat{f})$.

La formule $f(g) = \int_K f(g\,k\,g_1)\,dk$ valable pour tout $g_1$, s'écrit aussi

$$f(g) = \int_K f_{(gk)}(g_1)\,dk$$

et donne

$$f(g) = \int_K \mu[f_{(gk)}]\,dk$$

$$f(g) = \int_K \hat{f}(gk.b.)\,dk = g.\overline{m}(\hat{f})$$

Lorsque f n'est pas uniformément continue à gauche, cette formule reste valable (p.p) avec $\hat{f}$ défini au sens faible.

<u>Preuve du théorème</u>

Soit f élément de $\mathbb{L}^{\infty}(G/K)$ vérifiant $\Delta f = 0$. Alors f possède la propriété de moyenne d'après le corollaire et s'écrit sous la forme voulue d'après la proposition 3.

B) FONCTIONS PROPRES POSITIVES

Donnons d'abord la construction d'une famille naturelle de telles fonctions.

Notons a(g) la composante de g sur A dans la décomposition $G = KAN$ et posons $\sigma(g,k) = a(gk)$, $\sigma_\lambda(g,k) = \lambda[a(gk)]$ pour tout homomorphisme $\lambda$ de A dans le groupe multiplicatif des réels positifs ; un tel caractère de A sera appelé exponentielle dans la suite.

On a alors la

PROPOSITION 1

*Les fonctions $h_\lambda^k$ sur $G/_K$ définies par*

$$h_\lambda^k\,(g.o) = \sigma_\lambda(g^{-1},k) = \lambda[\,a(g^{-1}k)]$$

*sont des fonctions propres de l'opérateur de Laplace Beltrami et des opérateurs de convolution (à droite) par les mesures bi-invariantes.*

Preuve

Puisque ces opérateurs commutent avec l'action de G et que $h_\lambda^k(g.o) = h_\lambda^e(k^{-1}g.o)$ il suffit de voir que $h_\lambda^e(g.o)$ est fonction propre de ces opérateurs.

Considérons l'identification de NA à $G/_K$ définie par l'application $t \longrightarrow t.o$ .

Les mesures bi-invariantes sur G (ou $G/_K$ ) s'identifient aux mesures $\alpha$ portées par NA telles que $\alpha * m$ soit bi-invariante. Il en résulte que la convolution à droite sur NA par une telle mesure $\alpha$ s'identifie à l'opérateur de convolution (sur $G/_K$ ) par la mesure bi-invariante $\alpha * m$ : si $\theta$ est une mesure sur NA, la propriété de $\alpha$

implique la relation $(\theta * \alpha) * m = (\theta * m) * (\alpha * m)$.

Comme dans l'identification de $G/K$ à NA, la fonction $h_\lambda^e(g)$ s'identifie au caractère $\lambda\,[a(t^{-1})]$ de NA, fonction propre de tout opérateur de convolution sur NA, il est clair que cette fonction répond bien à la proposition.

L'objet de ce paragraphe est de justifier le

THEOREME

*Soit* $\Lambda^c$ *l'ensemble des exponentielles* $\lambda$ *sur* A *telles que* $\Delta h_\lambda^k = c h_\lambda^k$ .

*Toute solution positive* f *de l'équation* $\Delta f = cf$ *avec* $f(o)=1$ *admet la représentation*

$$f(g) = \iint_{\Lambda^c \times K} \sigma_\lambda(g^{-1},k)\, d\mathcal{E}\,(\lambda,k)$$

*où* $\mathcal{E}$ *est une probabilité sur* $\Lambda^c \times K$.

On peut noter que $\sigma_\lambda(g^{-1},k)$ ne dépend de k que par sa classe modulo M et qu'il est possible de préciser un sous-ensemble de $\Lambda^c$ suffisant à la représentation précédente et tel que la mesure $\mathcal{E}$ correspondante soit uniquement définie par f : on doit alors isoler les extrémales parmi les fonctions $h_\lambda^k$.

Ce théorème découlera des propositions 2 et 3 qui suivent.

On notera $\mathcal{H}^c$ le cône des $f \geq 0$ vérifiant $\Delta f = cf$. La théorie de la représentation des convexes compacts [ 1 ] va s'appliquer à ce cône.

PROPOSITION 2

*Le cône convexe* $\mathcal{H}^c$ *est fermé pour la topologie de convergence uniforme sur les compacts de* $G/K$ *et la condition* $f(o)=1$ *définit une base compacte de ce cône. Les éléments* f *de* $\mathcal{H}$ *vérifient une condition de Harnack* *uniforme : pour tout* $f$ *de* $\mathcal{K}^c$ *le rapport* $\frac{f(x)}{f(y)}$ *est borné par une constante dépendant seulement de la distance de* $x$ *à* $y$.

Preuve

L'opérateur différentiel $\Delta$ sur $G/K$ s'identifie à un opérateur elliptique sur $\mathbb{R}^n$ et on va utiliser les propriétés des solutions d'une équation $Df = 0$ où $D$ est un opérateur elliptique sur $\mathbb{R}^n$ avec $D1 = 0$ : principe du maximum, compacité des familles de solutions bornées sur les compacts [ 4 ] , inégalité de Harnack [ 15 ] . Soit $\phi$ une solution positive de $\Delta\phi = 0$ ; elle ne s'annulle pas en raison du principe du maximum. Considérons l'opérateur $D$ défini par $Du = \Delta(\phi u) - u\Delta\phi$ ; cet opérateur est elliptique comme $\Delta$ et vérifie de plus $D1 = 0$. Enfin, l'application $f \to \bar{f} = \frac{f}{\phi}$ est un homéomorphisme entre le cône $\mathcal{K}^c$ et le cône $\bar{\mathcal{K}}$ des $u \geq 0$ vérifiant $Du = 0$ . Le cône $\mathcal{K}^c$ est donc fermé comme $\bar{\mathcal{K}}$ .

Comme les éléments de $\mathcal{K}^c$ ne s'annullent pas, la condition $f(0) = 1$ définit une base de $\mathcal{K}^c$. D'après l'inégalité de Harnack, le rapport $\frac{u(x)}{u(0)}$ est borné lorsque $u$ parcourt $\bar{\mathcal{K}}$ et $x$ varie dans une boule géodésique de rayon donné.
Il en est donc de même du rapport $\frac{f(x)}{f(0)}$ quand $f$ décrit $\mathcal{K}^c$ et $x$ la boule donnée.

Comme l'action de $G$ commute avec $\Delta$ on a aussi la même borne pour le rapport $\frac{f(g.x)}{f(g.o)}$ , ce qui justifie la condition de Harnack uniforme.

Enfin l'ensemble défini par $f(0) = 1$ s'identifie à celui défini par $f(0) = \frac{1}{\phi(0)}$ , lequel est compact en raison de l'inégalité de Harnack.

La clef de la preuve du théorème est la

PROPOSITION 3

*Pour toute extrémale* h *de* $\mathcal{H}^c$ *avec* $h(o)=1$ *, il existe une exponentielle* $\lambda$ *sur* A *et* $k \in K$ *tels que*

$$h(g) = \lambda[a(g^{-1}k)] = h_\lambda^k(g)$$

La preuve repose sur plusieurs lemmes. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des mesures bi-invariantes à support compact données par une densité continue $\geq 0$.

LEMME 1.

*Soit h, une extrémale de* $\mathcal{H}^c$, $\alpha$ *un élément de* $\mathcal{A}$ *Alors il existe un réel positif* $c(\alpha)$ *tel que :*

$$h * \alpha = c(\alpha)\, h$$

$$\alpha * h = c(\alpha)\, m * h$$

Preuve.

On a par définition :

$$h * \alpha\,(g.o) = \int_{G/K} h(g.x)\, d\alpha(x).$$

Puisque la distance de $g\cdot x$ à $g\cdot o$ est bornée lorsque x varie dans le support de $\alpha$, on a d'après la condition de Harnack uniforme :

$$h\,(g.\,x) \leq C\, h\,(g.o)$$

et donc : $h * \alpha\,(y) \leq C\, h\,(y)\ (y \in G/K)$.

Comme $\Delta$ commute avec la convolution par $\alpha \in \mathcal{A}$ on a $h * \alpha \in \mathcal{H}^c$; et l'extrémalité de h dans $\mathcal{H}$ donne

$$h * \alpha = c(\alpha)\, h .$$

On a d'après la commutativité de $\mathcal{A}$

$$\alpha * h = \alpha * (m * h * m) = (m * h * m) * \alpha = m * h * \alpha = c(\alpha) m * h$$

LEMME 2

*Aves les notations du lemme 1, la fonction* $\Phi = m * h$ *est bi-invariante et fonction propre commune à droite des opérateurs de convolution par les éléments de* $\mathcal{A}$*; elle vérifie*

*pour tout* $g$ : $\delta_g * \Phi \leq k(g)\, \Phi$

*Pour tout* $g_1 \in G$ , $h$ *vérifie la propriété de moyenne généralisée*

$$\int_K h(gkg_1)\, dk = \Phi(g_1)\, h(g)$$

( $\Phi$ est donc une fonction sphérique).

Preuve

$\Phi$ vérifie comme h

$$\Phi * m = \Phi \qquad \Phi * \alpha = c(\alpha)\, \Phi$$

et par construction $m * \Phi = \Phi$ .

D'après la deuxième égalité du lemme 2, on a

$$d(\alpha)\ \delta_g * \Phi = \delta_g * \alpha * h \leq \beta * h = c(\beta)\, \Phi$$

avec $\beta \in \mathcal{A}$ et $\beta \geq \delta_g * \alpha$

Il suffit donc de prendre $k(g) = \frac{c(\beta)}{c(\alpha)}$ .

La relation $h * \alpha = c(\alpha)\, h$ implique, par passage à la limite vague sur une suite $\alpha_n$ convergeant vers $m * \delta_{g_1} * m$ :

$$h * m * \delta_{g_1} * m = \lim_n c(\alpha_n)\, h$$

$$h * \delta_{g_1} * m = c(g_1)\, h$$

$$\int h(g\, k\, g_1)\, dk = c(g_1)\, h(g)\ .$$

Prenant $g = e$, on obtient $c(g_1) = \Phi(g_1)$ d'où la relation de moyenne.

Pour être complet donnons la démonstration du lemme suivant [ 9 ] .

L'utilisation du théorème de Schauder-Tychonoff dans un tel contexte apparait aussi en [13].

LEMME 3

*Supposons que le groupe* AN *opère continûment sur un cône convexe à base compacte* $\mathcal{C}$ *d'un espace vectoriel topologique (localement convexe séparé).*

*Alors il existe un vecteur* $v \neq 0$ *de* $\mathcal{C}$ *et une exponentielle* $\lambda$ *sur* AN *tels que :* $\forall\, t \in AN,\ t.v = \lambda(t)\, v$.

Preuve

Observons d'abord que l'assertion du lemme est vraie de l'action d'un groupe abélien C sur le cône $\mathcal{C}$ en vertu du théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff appliqué à l'action projective de ce groupe sur une base de ce cône.

De plus, dans ce cas, en raison de la compacité de la base du cône, l'ensemble $\Lambda$ des exponentielles $\lambda$ associées à des vecteurs propres $v$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de C.

Prenons ici C égal au dernier terme non nul de la suite centrale descendante de $N$ et observons que $A$ ne laisse invariant aucun compact de $C$ autre que $\{0\}$ .

Comme la condition $c.v = \lambda(c)\, v$ implique $c.\, av = \lambda(a^{-1} c\, a)\, v$, le compact $\Lambda$ du dual de $C$ est stable sous l'action de $A$ par automorphismes. Un tel compact est donc réduit à $\{0\}$.

Finalement, on a

$$\forall c \in C \qquad c.v = v$$

et on peut remplacer le cône $\mathcal{C}$ par le sous-cône des éléments fixés par $C$, le groupe $AN$ étant remplacé par $AN/_C$. on obtient finalement, par récurrence, un cône formé d'éléments invariants par $N$ et un élément de ce cône propre pour tous les éléments de $A$, donc de $AN$.

LEMME 4

*Soit* $\Phi$ *une fonction positive sur* $G$ *telle qu'il existe* $d(g)$ *localement bornée avec* $\delta_g * \Phi \leq d(g)\, \Phi$ .

*Soit* $f$ *une fonction , telle que* $|f|/_\Phi$ *soit borné, vérifiant*

$$\Phi(g_1)\, f(g) = \int_K f(g\, k\, g_1)\, dk \qquad (g, g_1 \in G)$$

*Alors il existe* $\hat{f} \in \mathbb{L}^\infty(K)$ *et* $\lambda$ *exponentielle sur* $A$ *telle que*

$$f(g) = \int_K \lambda[\, a(g^{-1}k)\, ]\, \hat{f}(k)\, dk$$

Preuve

Soit $\mathbb{L}^\infty_\Phi = \{f \; ; \; |f|/_\Phi \in \mathbb{L}^\infty(G)\}$ .

Alors $G$ opère à gauche sur $\mathbb{L}^\infty_\Phi$ d'après l'hypothèse sur $\Phi$ ; il opère aussi sur son dual muni de la topologie faible et, en particulier, sur le cône des formes linéaires positives. Une base (compacte) de ce cône est définie par la condition $\mu(\Phi) = 1$. D'après le lemme 4, il existe donc une forme linéaire positive $\mu$ sur $\mathbb{L}^{\infty}_{\Phi}$ avec $\mu(\Phi) = 1$, et une exponentielle $\lambda$ sur AN tels que : $\forall\, t \in AN \quad t.\mu = \lambda(t)\mu$ .

On peut alors raisonner comme à la fin de la preuve de la proposition 3 de A, en définissant

$\hat{f}(k) = \mu\,[\,f_k\,]$,

ce qui conduit à la formule

$\mu\,(\Phi)\, f(g) = \int_K \mu\,(f_{gk})\, dk$

Si l'on pose $gk = (g.k)\, t\,(g.k)$, avec $g.k \in k$ et $t(g.k) \in AN$, on peut écrire :

$$f_{gk}(g_1) = f_{g.k}\,[t\,(g.k)\, g_1]$$

$$\mu\,[f_{gk}] = \lambda\,[a(gk)]\ \mu\,[fg.k]$$

puisque $t.\mu = \lambda\,(t)\,\mu$.

D'où $f(g) = \int_K \lambda\,[a(gk)]\ \hat{f}\,(g.k)\, dk.$

Observons que l'on a classiquement $\frac{dg.m}{dm}(k) = \delta^{-1}\,[a\,(g^{-1}k)]$ où $\delta(t)$ est le module de $t \in AN$ (muni de la mesure de Haar à gauche), et $t\,(gg',k) = t\,(g,g'.k)\ t\,(g',k)$.

Ceci permet d'écrire avec le changement de variables $g.k = k'$

$$f(g) = \int_K \lambda^{-1}\,[a\,(g^{-1}k')]\ \hat{f}\,(k')\ dg.m\,(k')$$

$$f(g) = \int_K (\lambda\delta)^{-1}\,[a(g^{-1}k)]\ \hat{f}\,(k)\ dk,$$

ce qui donne la formule annoncée.

On peut maintenant justifier la proposition.

Preuve de la proposition 3.

Montrons que h s'écrit sous la forme $h(x) = \int_K h_\lambda^k(x)\, d\gamma(k)$.

Si $\varepsilon_n$ est une identité approchée formée des fonctions continues à supports compacts, posons $f_n = \varepsilon_n * h$, et notons que, puisque $\varepsilon_n \leq \alpha$ avec $\alpha \in \mathcal{A}$ on a, d'après le lemme 1 :

$$f_n \leq \alpha * h = c(\alpha)\Phi.$$

D'après le lemme 4, on a donc :

$$f_n\,(x) = \int_K h_\lambda^k\,(x)\,(x)\,\hat{f}_n\,(k)\,dk,$$

où $\hat{f} \in \mathbb{L}^\infty(k)$. Puisque $f_n(0)$ converge , la suite de mesures positives $\hat{f}(k)dk$ a des masses bornées : elle est relativement compacte et par extraction d'une sous-suite convergente vers $\gamma$, on obtient :

$$f(x) = \int_K h_\lambda^k\,(x)\,d\,\gamma\,(k).$$

On a de plus :

$$cf = \Delta f = \int_K \Delta\, h_\lambda^k\,d\,\gamma\,(k) = c(\lambda) \int_K h_\lambda^k\,d\gamma(k) = c\,(\lambda)\,f$$

soit : $c(\lambda) = c$, donc $h_\lambda^k \in \mathcal{H}^c$.

Par extrêmalité de h on conclut que $h_\lambda^k$ est indépendant de $k(\gamma.pp)$.

D'où enfin, $h = h_\lambda^k$

Preuve du théorème.

Le cône $\mathcal{H}^c$ étant à base compacte, tout élèment de $\mathcal{H}^c$ est barycentre d'élèments extrémaux [ 1 ] . Il existe donc une mesure & sur $\Lambda^c \times K$, telle que : $h = \int h_\lambda^k\, d\&(\lambda,k)$.

Remarque :

Pour $c = 0$, $\Lambda^c$ est une hypersurface du dual de A. Si dim.A = 1, on a $\Lambda^o = \{1, \delta^{-1}\}$, où $\delta(a)$ est le module de a dans AN ; les fonctions $h_\lambda^k$ correspondantes sont 1 et $\delta^{-1}[a(g^{-1}k)] = \frac{dg.m}{dm}(k)$. Comme 1 n'est pas extrémale, on obtient pour $f \geq 0$ et $\Delta f = 0$,

$$f(g) = \int_K \frac{dg.m}{dm}(k)\, d\,\&\,(k),$$

ce qui donne la formule de POISSON.

Si dim A > 1, la formule précédente fournit toutes les fonctions positives possédant la propriété de moyenne comme on le voit aisément en reprenant les raisonnements précédents.

Donc si dim A > 1, les harmoniques positives ne se réduisent pas aux fonctions possédant la propriété de moyenne. Dans ce cas, la construction de la frontière de MARTIN, c'est-à-dire l'étude des limites des quotients de la fonction de GREEN, fournit un compactifié naturel de $G/_K$ dont il serait intéressant de préciser la topologie en la reliant à celle des compactifiés définis en [14]. Dans le cas $G = S\ell\ (d, \mathbb{R})$ les points de ce compactifié de MARTIN ont été décrits en [6].

Enfin, nous voulons exprimer ici notre reconnaissance à A. KORANYI, dont l'intérêt nous a été précieux dans la rédaction de ce travail.

-o-0-o-

# REFERENCES

1) G. CHOQUET
*Lecture in analysis*
Benjamin New-York 1969.

2) G. CHOQUET et J. DENY
*sur l'équation de convolution* $\mu = \mu * \sigma$
C.R.A.S. - Paris 250 (1960) - p. 799-801.

3) J.P. CONZE et Y. GUIVARC'H
*Propriété de droite fixe et fonctions harmoniques positives*
*Lecture notes in Mathematics* - 404 Springer Verlag 1974 - p. 126-132.

4) R. COURANT et D. HILBERT
*Methods of Mathematical physics* - vol. II Interscience - New-york 1962.

5) N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ
*Linear operators* - Interscience New-York 1958.

6) E.B. DYNKIN
*Non-negative eigenfunctions of the Laplace- Beltrami operator and Brownian motion on certain symmetric spaces.*
Dokl.Akad.Nauk SSSR 141 (1961), 288-291 (Russian) ; translated as Soviet Math. Dokl.2 (1961), 1433-1436.

7) L. ELIE
*Comportement assymptotique du noyau potentiel sur un groupe de Lie*
A paraître - Annales ENS 1982.

8) H. FURSTENBERG
*A Poisson formula for semi-simple Lie groups.*
Ann. of Math. (2) 77 (1963), 335-386.

9) H. FURSTENBERG
*Translation-invariant cones of functions on semisimple Lie groups,*
Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 271-326, MR 31 ≠ 1326.

10) S. HELGASON
*Differential geometry and symmetric spaces.*
Academic Press, New-York, 1962.

11) F.I. KARPELEVIČ
*The geometry of geodesics and the eigenfunctions of the Beltrami-Laplace operator on symmetric spaces.*
Trudy Moskow. Math. Obsc. 14 (1965), 48-185 = Trans. Moscow Math. Soc. 1965, 51-199, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967. MR 37 ≠ 6876.

12) A. KORÁNYI
*Harmonic functions on symmetric spaces, in "Geometry and Harmonic Analysis of Symmetric Spaces",* Marcel Dekker Inc., New-York 1972.

13) G.A. MARGULIS.
*Positive harmonic functions on nilpotent groups* - Doklady Akad 1966 - Tom 166 n° 5.

14) C.C. MOORE
*Compactifications of symmetric spaces II : The Cartan domains,*
Amer. J. Math. 86 (1964), 358-378.

15) J. MOSER
*On Harnack's theorem for elliptic differential equations.*
Comm. pure and Appl. Math. Vol. 14 - n° 3 (1961) - p. 577-591.

16) A. REVUZ: MARKOV CHAINS -(p. 133)
North Holland Amsterdam 1975.

17) W. VEECH
*The tail of a positivity preserving semi-group.*
Israël J of Math - vol. 18 - n° 2, 1974 - p. 167-206.

-o-0-o-