

JEAN JACOD

**Sur la non-réversibilité du processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1982, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1982\\_\\_1\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982__1_A5_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA NON-REVERSIBILITE DU PROCESSUS

D'ORNSTEIN-UHLENBECK GENERALISE

Jean JACOD

§1. Introduction et résultats.

Dans ce qui suit, nous complétons l'article précédent de Gravereaux [1] en prouvant qu'il n'existe pas de processus d'Ornstein-Uhlenbeck "généralisé" réversible (ou "symétrique", au sens des processus de Markov stationnaires) qui soit discontinu: le résultat est donc le même que ceux du §5 de [1], mais sans aucune restriction et avec une méthode différente et un peu plus simple.

Par "processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé" nous entendons le processus solution de l'équation suivante

$$(1.1) \quad dX_t = h(X_t) dt + dZ_t, \quad X_0 = V$$

où  $Z$  est un processus à accroissements indépendants stationnaires (en abrégé: PAIS)  $d$ -dimensionnel, défini sur un espace filtré  $(\Omega, \underline{F}, \underline{F} = (\underline{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ , où  $V$  est une variable  $\underline{F}_0$ -mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , et où  $h$  est un opérateur linéaire sur  $\mathbb{R}^d$ . Pour simplifier on suppose que  $\underline{F}$  est la filtration engendrée par le processus  $Z$  (on peut toujours se ramener à ce cas).

On sait que la solution  $X$  est un processus fortement markovien homogène, et qu'il admet l'expression explicite suivante:

$$(1.2) \quad X_t = e^{th} \left( V + \int_0^t e^{-sh} \cdot dZ_s \right).$$

De plus on sait exactement quand ce processus  $X$  admet une probabilité stationnaire (voir [1], théorème (4.1)).

Plus précisément, on associe à  $h$  la décomposition (unique) suivante de  $\mathbb{R}^d$  en somme directe:  $\mathbb{R}^d = E \oplus F$  avec

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} E \text{ et } F \text{ sont stables par } h; \\ \text{la restriction de } h \text{ à } E \text{ (resp. } F) \text{ n'a que des valeurs propres } \lambda \text{ telles que } \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \text{ (resp. } \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0). \end{array} \right.$$

Tout vecteur de  $\mathbb{R}^d$  s'écrit de manière unique  $x = x^E + x^F$  avec  $x^E \in E$  et  $x^F \in F$ : on a ainsi  $Z_t = Z_t^E + Z_t^F$ , etc... Alors:

(1.4) THEOREME: Pour que le processus  $X$  admette une probabilité stationnaire, il faut et il suffit que:

(i)  $E[\text{Log}(1 + |Z_1|)] < \infty$ ;

(ii)  $Z^F$  soit déterministe, de la forme  $Z_t^F = t h(a)$  avec  $a \in F$ .

Passons maintenant à la réversibilité: on dira que l'équation (1.1) est réversible s'il existe un choix de la variable  $V$  pour laquelle le processus solution soit un processus de Markov stationnaire réversible (ou symétrique): cela équivaut à dire qu'il existe une probabilité stationnaire  $\eta$  par rapport à laquelle le semi-groupe du processus de Markov solution soit auto-adjoint; ou encore qu'il existe une probabilité stationnaire  $\eta$  tel que la solution stationnaire  $X$  ait même loi (en tant que processus) que le retourné de  $X$  à chaque temps fixe.

Remarquons que pour l'étude de la réversibilité, il faut se placer sous les conditions de (1.4): la composante  $X^F$  est donc trivialement de la forme  $X_t^F = e^{t h(V^F - a)} + a$ , et le choix  $V^F = -a$  donne une valeur constante à  $X_t^F$ : auquel cas  $X^E$  est indépendant de  $X^F$ , et réversible si et seulement si  $X$  l'est. Afin d'éviter des complications fastidieuses et triviales, on suppose donc que  $E = \mathbb{R}^d$ , ce qui revient à dire que  $e^{t h} \rightarrow 0$  quand  $t \uparrow \infty$ .

Soit aussi  $(b, C, H)$  les caractéristiques de Lévy-Khintchine de  $Z$ : on a  $b \in \mathbb{R}^d$ ,  $C$  est un opérateur linéaire symétrique sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $H$  est une mesure positive sur  $\mathbb{R}^d$ , ne chargeant pas  $\{0\}$  et intégrant la fonction  $|x|^2 \wedge 1$ , avec:

$$(1.5) \quad \begin{cases} E(\exp i \langle u, Z_t \rangle) = \exp t \xi(u) \\ \xi(u) = i \langle u, b \rangle - \frac{1}{2} \langle u, C u \rangle + \int H(dx) [e^{i \langle u, x \rangle} - 1 - i \langle u, x \rangle 1_{\{|x| \leq 1\}}] \end{cases}$$

(1.6) THEOREME: Supposons que toutes les valeurs propres de  $h$  aient leur partie réelle strictement négative. Dans ce cas  $\tilde{C} = \int_0^\infty e^{sh} C e^{sh^*} ds$  existe, et l'équation (1.1) est réversible si et seulement si

(i)  $H = 0$  ( $\iff Z$  est continu)

(ii)  $h \tilde{C}$  est auto-adjoint.

Ce théorème sera démontré dans le §3. Contentons-nous maintenant de citer, sans justification, le résultat dans le cas général:

Pour que l'équation (1.1) soit réversible, il faut et il suffit que:

(i)  $H = 0$ ;

(ii)  $b = h(a)$  pour un  $a \in \mathbb{R}^d$  (automatiquement satisfait dans (1.6) car  $h$  est inversible);

(iii)  $\tilde{C} = \int_0^\infty e^{sh} C e^{sh^*} ds$  existe, et  $h\tilde{C}$  est auto-adjoint.

On vérifie aisément que ces conditions impliquent les conditions de (1.4).

## §2. Une "solution" stationnaire anticipative de (1.1).

Dans ce paragraphe, nous allons supposer que:

(2.1)  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  pour toute valeur propre de  $h$ .

L'objectif est de construire une solution stationnaire de (1.1). Bien entendu, (2.1) implique que  $F = \mathbb{R}^d$ , donc d'après le théorème (1.4) ce n'est en principe possible que lorsque  $Z$  est déterministe.

Toutefois, si on n'impose plus à  $V$  d'être  $\mathbb{F}_0$ -mesurable, l'équation (1.1) devient "anticipative"; elle n'a donc peut-être pas de sens, mais sa solution "formelle" explicite (1.2) est, quant à elle, toujours bien définie. On a alors la

(2.2) PROPOSITION: Soit (2.1), et supposons que

(i)  $E[\operatorname{Log}(1 + |Z_1|)] < \infty$ .

Alors l'intégrale stochastique  $V = -\int_0^\infty e^{-sh} \cdot dZ_s$  existe, et le processus  $X$  défini par (1.2) vérifie aussi

(2.3) 
$$X_t = -e^{th} \int_t^\infty e^{-sh} \cdot dZ_s,$$

la loi de  $X_t$  ne dépend pas de  $t$ , et la filtration engendrée par  $X$  est  $\underline{G} = (\underline{G}_t)_{t \geq 0}$ , avec

(2.4) 
$$\underline{G}_t = \mathbb{F}_t \vee \sigma(V).$$

(dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck "classique", où  $Z$  est un brownien, cette construction nous a été suggérée par H. Föllmer).

Démonstration. Le fait que l'intégrale définissant  $V$  ci-dessus existe découle d'un résultat de Jurek [3] (voir la démonstration du théorème (3.1) de [1]). La formule (2.3) est alors évidente, et sur cette formule il est clair que la loi de  $X_t$  est égale à celle de  $X_0 = V$ .

Définissons  $\underline{G}$  par (2.4), et soit  $\underline{G}^X$  la filtration engendrée par  $X$ .

Il est clair que  $\underline{G}_t^X \subset \underline{G}_t$ . Par ailleurs  $\int_0^t e^{-sh} \cdot dZ_s = e^{-th}(X_t - X_0)$  est  $\underline{G}_t^X$ -mesurable, donc  $Z$  est adapté à  $\underline{G}_t^X$ . Comme  $\underline{F}$  est la filtration engendrée par  $Z$ , on en déduit que  $\underline{F}_t \subset \underline{G}_t^X$ , donc  $\underline{G}_t = \underline{F}_t \vee \sigma(X_0) \subset \underline{G}_t^X$ : par suite,  $\underline{G}_t^X = \underline{G}_t$ . ■

(2.5) REMARQUES: 1) On peut montrer bien mieux que cette proposition; notamment le fait que si  $X$  est défini par (1.2) avec une variable aléatoire  $V$  quelconque, et si la loi de  $X_t$  ne dépend pas de  $t$ , alors on a la condition (1) ci-dessus et  $V$  est égal à  $-\int_0^\infty e^{-sh} \cdot dZ_s$ ; notamment aussi le fait que le processus  $X$  construit ci-dessus est markovien homogène (stationnaire, bien-sûr) par rapport à la filtration  $\underline{G}$ : ceci est démontré dans [2].

2) Une autre question se pose: est-ce-que le processus  $X$  ci-dessus est effectivement solution de l'équation (1.1)? si on veut que (1.1) soit une équation stochastique "usuelle", il faut que la condition initiale  $V$  soit mesurable par rapport à la tribu initiale, ce qui conduit à remplacer la filtration  $\underline{F}$  par la filtration  $\underline{G}$  définie par (2.4). Le problème se ramène donc à vérifier que  $Z$  est une  $\underline{G}$ -semimartingale, auquel cas l'équation (1.1) a un sens et le processus  $X$  défini par (1.2) en est la solution. Ce problème est résolu par l'affirmative dans le cas uni-dimensionnel dans l'article [2]. ■

Rappelons que la mesure  $H$  est la "mesure de Lévy" de  $Z$ , relativement à la filtration  $\underline{F}$ : voir (1.5). On rappelle que, si  $\underline{P}(\underline{F})$  désigne la tribu  $\underline{F}$ -prévisible de  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ , pour toute fonction  $\underline{P}(\underline{F}) \otimes \underline{B}(\mathbb{R}^d)$ -mesurable positive  $W$  sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  on a

$$(2.6) \quad E \left[ \sum_{s \leq t} W(s, \Delta Z_s) \mathbf{1}_{\{\Delta Z_s \neq 0\}} \right] = E \left[ \int_0^t ds \int H(dx) W(s, x) \right].$$

Par rapport à la filtration  $\underline{G}$ , le processus continu à droite et limité à gauche  $X$ , qui est  $\underline{G}$ -adapté, admet aussi une mesure de Lévy  $\underline{G}$ -prévisible  $\nu(\omega; dt \times dx)$ , caractérisée par la propriété suivante: pour toute fonction  $\underline{P}(\underline{G}) \otimes \underline{B}(\mathbb{R}^d)$ -mesurable positive  $W$  elle vérifie l'égalité

$$(2.7) \quad E \left[ \sum_{s \leq t} W(s, \Delta X_s) \mathbf{1}_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \right] = E \left[ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nu(ds \times dx) W(s, x) \right].$$

(2.8) PROPOSITION: Soit les hypothèses de (2.2). Pour que la  $\underline{G}$ -mesure de Lévy de  $X$  se mette sous la forme  $\nu(\omega; dt \times dx) = dt \times H'(dx)$ , où  $H$  est une mesure positive sur  $\mathbb{R}^d$ , il faut et il suffit que  $H = 0$ , ce qui revient à dire que  $Z$  (ou  $X$ ) est continu.

Démonstration. D'après (2.3) on a  $\Delta X = \Delta Z$ , donc dans (2.7) on peut rem-

placer  $\Delta X$  par  $\Delta Z$  dans (2.7). La condition suffisante est alors évidente car si  $Z$  est continu on peut prendre  $v=0$ . Montrons la condition nécessaire. Soit  $\eta$  la loi de  $V$ . Soit  $A$  un borélien de  $\mathbb{R}^d$  ne contenant pas 0 et tel que  $H(A) < \infty$ . La formule (2.7) écrite pour  $W(\omega, s, x) = 1_A(x) 1_B(V(\omega))$  entraîne que pour tout borélien  $B$  on a

$$(2.9) \quad E[1_B(V) \sum_{s \leq t} 1_A(\Delta Z_s)] = t H'(A) \eta(B).$$

Soit  $V_s = -\int_s^\infty e^{-rh} dZ_r$ ; soit  $T_0 = 0$  et  $T_{n+1} = \inf(t > T_n : \Delta Z_t \in A)$ . On a  $V = V_{T_n^-} + e^{-T_n h} (-\Delta Z_{T_n} + X_{T_n})$  d'après (2.3) si  $T_n < \infty$ , et  $(T_n)$  croît vers  $+\infty$ , chaque  $T_n$  étant p.s. fini. D'après (2.9), on a

$$\begin{aligned} t H'(A) \eta(B) &= E\left[\sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}} 1_B(V)\right] \\ &= \sum_{n \geq 1} E\left[1_{\{T_n \leq t\}} 1_B(V_{T_n^-} + e^{-T_n h} (-\Delta Z_{T_n} + X_{T_n}))\right] \\ &= \sum_{n \geq 1} \int \eta(dz) E\left[1_{\{T_n \leq t\}} 1_B(V_{T_n^-} + e^{-T_n h} (-\Delta Z_{T_n} + z))\right] \end{aligned}$$

car  $X_{T_n}$  est indépendante de  $\underline{F}_{T_n}$  et de loi  $\eta$  d'après (2.3). Soit alors  $W_z(\omega, s, x) = 1_B(V_{s^-}(\omega) + e^{-sh}(-x+z)) 1_A(x)$ : cette fonction est  $\underline{P}(\underline{F}) \otimes \underline{B}(\mathbb{R}^d)$ -mesurable positive, donc (2.6) entraîne:

$$\begin{aligned} t H'(A) \eta(B) &= \int \eta(dz) E\left[\sum_{s \leq t} W_z(s, \Delta Z_s)\right] \\ &= \int \eta(dz) E\left[\int_0^t ds \int H(dx) W_z(s, x)\right] \\ (2.10) \quad &= \int_0^t ds \int_A H(dx) \int \eta(dz) E[1_B(V_s + e^{-sh}(z-x))]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour toute fonction borélienne positive sur  $\mathbb{R}^d$  et tout  $s \geq 0$  on a

$$\eta(f) = E[f(V)] = E[f(V_s + e^{-sh}(X_s))] = \int \eta(dz) E[f(V_s + e^{-sh}(z))]$$

car  $X_s$  est indépendant de  $\underline{F}_s$  et de loi  $\eta$ . En remplaçant dans (2.10) avec  $f(z) = 1_B(z - e^{-sh}(x))$ , on obtient

$$\int_0^t ds \int_A H'(dx) \int_B \eta(dz) = \int_0^t ds \int_A H(dx) \int \eta(dz) 1_B(z - e^{-sh}(x)).$$

En prenant d'abord  $B = \mathbb{R}^d$ , on en déduit que  $H'(A) = H(A)$  pour tout  $A$ , donc  $H' = H$ . On en déduit ensuite que pour  $ds \times H(dx)$ -presque tout  $(s, x)$ ,

$$\int \eta(dz) 1_B(z - e^{-sh}(x)) = \eta(B) \quad \forall B \in \underline{B}(\mathbb{R}^d).$$

Donc  $\eta$  est invariante par la translation  $-e^{-sh}(x)$ : ce n'est possible pour une probabilité qu'à condition que  $e^{-sh}(x) = 0$ , donc si  $H$  ne charge que 0, donc si  $H=0$ . ■

§3. Démonstration du théorème (1.6).

Commençons par démontrer une partie de la condition nécessaire. On suppose que les valeurs propres de  $h$  ont toutes leur partie réelle strictement négative.

(3.1) LEMME : Si l'équation (1.1) est réversible, le processus  $Z$  est continu.

Démonstration. Supposons (1.1) réversible, et considérons la solution  $X$  stationnaire (pour laquelle  $X_0 = V$  suit la loi stationnaire  $\eta$ ). Nous allons faire un retournement du temps à un temps fixe  $T$ . Soit  $t \leq T$  et

$$\hat{X}_t = X_{T-t}, \quad \hat{Z}_t = Z_{T-t} - Z_T.$$

On a  $X_T = e^{Th}(V + \int_0^T e^{-sh}.dZ_s)$  et  $X_{T-t} = e^{(T-t)h}(V + \int_0^{T-t} e^{-sh}.dZ_s)$ , donc

$$X_{T-t} = e^{-th} (X_T - \int_{T-t}^T e^{(T-r)h}.dZ_r).$$

Un calcul simple, utilisant les sommes de Riemann car l'intégrand est continu, permet de montrer que

$$-\int_{T-t}^T e^{(T-r)h}.dZ_r = \int_0^t e^{sh}.d\hat{Z}_s,$$

la seconde intégrale ayant aussi un sens car  $(\hat{Z}_t)_{0 \leq t \leq T}$  est encore un PAIS. Finalement, on a

$$(3.2) \quad \hat{X}_t = e^{-th} (\hat{X}_0 + \int_0^t e^{sh}.d\hat{Z}_s)$$

pour tout  $t \leq T$ . On peut toujours prolonger  $\hat{Z}$  au delà de  $T$  de sorte que ce soit un PAIS indicé par  $\mathbb{R}_+$ , et on étend  $\hat{X}_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  par la formule (3.2): ainsi,  $\hat{X}$  est un processus donné par l'équation (1.2), avec  $\hat{Z}$  et  $-h$  au lieu de  $Z$  et  $h$ , et avec  $\hat{V} = \hat{X}_0$ : en particulier,  $-h$  vérifie (2.1). De plus, la loi de  $\hat{X}_t$  est la loi stationnaire  $\eta$  pour tout  $t \leq T$ , donc pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  comme on le voit de proche en proche sur l'équation (3.2): en effet, on a  $\hat{X}_{T+t} = e^{-th}(\hat{X}_T + \int_T^{T+t} e^{sh}.d\hat{Z}_s)$  si  $t \leq T$ , et  $\hat{X}_T$  suit la loi  $\eta$ , donc  $\hat{X}_t$  suit la loi  $\eta$  pour tout  $t \in [T, 2T]$ , et ainsi de suite...

Comme  $e^{th} \rightarrow 0$  quand  $t \uparrow \infty$ , les variables  $e^{th}(\hat{X}_t)$  convergent en loi, donc en probabilité, vers 0. Par suite  $\hat{X}_0 + \int_0^t e^{sh}.d\hat{Z}_s$  converge vers 0 en probabilité, ce qui implique que

$$\hat{X}_0 = \hat{V} := -\int_0^\infty e^{sh}.d\hat{Z}_s$$

(cette intégrale a bien un sens, car la stationnarité implique qu'on ait la condition (2.2,i)). Autrement dit, le processus  $\hat{X}$  est le processus

construit en (2.2), avec  $-h$  et  $\hat{Z}$ : d'après la proposition (2.8), le système de Lévy de  $X$  par rapport à sa filtration propre ne peut pas se mettre sous la forme  $ds \cdot H'(dx)$ , à moins que  $H' = 0$ , auquel cas  $\hat{X}$  est continu.

Mais l'hypothèse de réversibilité implique que les processus  $X$  et  $\hat{X}$  ont même loi, donc aussi même systèmes de Lévy (par rapport à leurs filtrations propres). Comme  $\Delta X = \Delta Z$ , le système de Lévy de  $X$  est  $dt \cdot H(dx)$ , et d'après ce qui précède ce n'est possible que si  $H = 0$ ; donc si  $Z$  est continu. ■

Etant donné ce résultat, dans la démonstration du théorème (1.6) on peut supposer que  $H = 0$ . Etant donnée la condition sur les valeurs propres de  $h$ , l'opérateur  $\tilde{C} = \int_0^\infty e^{sh} C e^{sh} ds$  est bien défini, et de même  $\int_0^\infty e^{sh}(b) ds = -h^{-1}(b)$ . D'après le théorème (3.1) de [1], l'unique probabilité invariante  $\eta$  admet la fonction caractéristique  $e^{\Psi(u)}$  avec

$$\Psi(u) = \int_0^\infty \int (e^{sh^*} u) ds = -i \langle u, h^{-1}(b) \rangle - \frac{1}{2} \langle u, \tilde{C}u \rangle$$

et en particulier  $\eta$  est gaussienne. Il suffit alors d'appliquer la proposition (5.2) de [1] pour obtenir que l'équation est réversible si et seulement si l'opérateur  $h\tilde{C}$  est auto-adjoint.

#### BIBLIOGRAPHIE

- 1 J.B. GRAVEREAUX: Probabilités de Lévy sur  $\mathbb{R}^d$  et équations différentielles stochastiques linéaires. Dans ce volume.
- 2 J. JACOD: Grossissement de filtration et processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé. A paraître.
- 3 Z.J. JUREK: An integral representation of operator-selfdecomposable random variables. Bull. Ac. Polonaise des Sc. XXX, 7-8, pp385-393, 1982.