JEAN MEMIN

Contiguïté et complète séparabilité Décompositions de Raoult ; comportement asymptotique sous hypothèse de contiguïté

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1982, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982___1_A9_0>

Séminaires de Probabilités 1982
Université de Rennes I

CONTIGUITE ET COMPLETE SEPARABILITE

Décompositions de Raoult ; comportement asymptotique sous hypothèse de contiguité

Jean MEMIN.

1 - INTRODUCTION :

Soit $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces mesurables ; pour chaque n, on considère un couple (P_n, Q_n) de probabilités définies sur $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$.

(1-1) Définition : *On dit que* (Q_n) *est contigue relativement à* (P_n) $((Q_n) \lhd P_n)$ *si pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *avec* $A_n \in \mathcal{F}_n$ *on a l'implication :*

(1) $\quad P_n[A_n] \to 0 \quad \Rightarrow \quad Q_n[A_n] \to 0.$

(1-2) Définition : *On dit que* (P_n) *et* (Q_n) *sont complètement séparables si on peut trouver une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $A_n \in \mathcal{F}_n$ *telle que l'on ait :*

(2) $\quad P_n[A_n] \to 1 \quad \text{et} \quad \liminf_n Q_n[A_n] = 0.$

(1-3) Définition : *On dit que* (P_n) *et* (Q_n) *sont asymptotiquement singulières si on peut trouver* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $A_n \in \mathcal{F}_n$ *telle que :*

(3) $\quad P_n[A_n] \to 1 \quad \text{et} \quad Q_n[A_n] \to 0.$

La contiguité introduite par Le Cam [3] généralise la notion d'absolue continuité ; ainsi si on pose $(\Omega_n, \mathcal{F}_n) = (\Omega, \mathcal{F})$, $P_n = P$ et $Q_n = Q$ alors $(Q_n) \lhd (P_n)$ est équivalent à Q absolument continue par rapport à P $(Q \ll P)$. La séparabilité complète et la singularité asymptotique généralisent la notion de singularité de deux mesures ; ainsi dans l'exemple précédent, (P_n) et (Q_n) sont complètement séparables $((P_n) \,\Delta\, (Q_n))$ si et seulement si P et Q sont étrangères $(P \perp Q)$.

On aura une illustration du rapport entre contiguité et absolue continuité (resp : complète séparabilité et singularité) dans les paragraphes 2 et 4. Dans le paragraphe 2 nous étudierons le comportement asymptotique des lois des densités de Lebesgue de Q_n relativement à P_n ; il s'agit de résultats relativement classiques, lorsqu'on s'intéresse uniquement à la contiguité, voir par exemple [2].
Dans le paragraphe 4 nous nous intéressons au rapport entre le comportement de la suite (P_n) et de la suite (Q_n) lorsque (Q_n) est contigue relativement à (P_n).

(1-4) <u>Définition</u> : *On appelle décomposition faible (resp : forte) de Raoult de (Q_n) relativement à (P_n), une décomposition pour chaque n de Q_n sous la forme :*

(4) $\quad Q_n = \alpha_n \overline{Q}_n + (1 - \alpha_n) \hat{Q}_n \qquad \alpha_n \in [0,1]$

vérifiant les propriétés a) et b) (resp : a) et b')) suivantes :

a) $(\overline{Q}_n)$ est contigue relativement à (P_n)

b) (resp : b')) : $(\hat{Q}_n)$ et (P_n) sont complètement séparables (resp : asymptotiquement singulières).

Raoult a étudié dans [4] le problème de l'existence d'une décomposition forte lorsqu'au lieu de probabilités on considère une suite de couples de mesures σ-finies ; il obtient une condition nécessaire et suffisante faisant usage d'outils topologiques, mais ne se prêtant pas facilement à des vérifications. Toutefois, il montre que dans le cadre abordé ici ($(P_n,Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de couples de probabilités), il existe une décomposition forte de Raoult de (Q_n) relativement à (P_n) lorsque la suite des lois pour (P_n) des densités de Lebesgue de Q_n relativement à P_n converge.

Nous nous proposons de montrer dans le paragraphe 3 par une méthode directe et simple le résultat de Raoult, d'en déduire l'existence d'une décomposition faible dans tous les cas, et de donner un critère de décomposabilité forte.

2 - POINTS LIMITES DES DENSITES DE LEBESGUE, CRITERES DE CONTIGUITE ET DE COMPLETE SEPARABILITE.

Pour chaque n, on note Z_n la densité de Lebesgue de Q_n relativement à P_n : autrement dit Z_n est une variable aléatoire définie sur $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ P_n-intégrable, à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}}^+, B_{\overline{\mathbb{R}}^+})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ on ait :

(5) : $Q_n[A] = \int_A Z_n \, d\, P_n + Q_n[A \cap \{Z_n = \infty\}]$.

La relation (5) permet donc d'écrire : $Q_n = a_n\, Q'_n + (1 - a_n)\, Q''_n$

où Q'_n est absolument continue par rapport à P_n et où Q''_n est étrangère à P_n ; cependant en général une telle décomposition (de Lebesgue) n'est pas une décomposition de Raoult car si (Q''_n) et (P_n) sont aymptotiquement étrangères, il n'y a aucune raison pour que (Q'_n) soit contigue à (P_n).

Mentionnons pour commencer deux critères de contiguité et de complète séparabilité.

(2-1) Lemme ([1], [2])

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) (Q_n) *est contigue relativement à* (P_n)

b) (Z_n) *est* P_n*-uniformément intégrable et* $Q_n[Z_n=\infty] \to 0$

c) (Z_n)- *est* Q_n*-tendue (propriété qui se traduit ici par :* $\lim_{K\uparrow\infty}(\limsup_n Q_n[Z_n>K]) = 0$.)

(2-2) Lemme ([1])

Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

a) (P_n) *et* (Q_n) *sont complètement séparables*

b) pour tout $K>0$ $\limsup_n Q_n\,[Z_n>K] = 1$

La propriété c) du lemme 2-1 permet d'exprimer la contiguité d'une autre manière :
La suite des lois de Z_n pour Q_n est un ensemble de probabilités sur l'ensemble compact $(\overline{\mathbb{R}}^+, B_{\overline{\mathbb{R}}^+})$, cette suite est donc relativement compacte ; la propriété c) exprime que les points limites de toute sous-suite extraite sont des probabilités sur $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}^+})$.

On notera $\mathcal{M}$ (resp : $\mathcal{N}$) l'ensemble des probabilités sur $(\overline{\mathbb{R}}^+, B_{\overline{\mathbb{R}}^+})$ points limites de sous-suites extraites de la suite (μ_n) (resp : (ν_n)) où μ_n (resp : ν_n) est la loi de Z_n pour P_n (resp : Q_n).

De l'inégalité $E_{P_n}[Z_n] \leq 1$, on déduit immédiatement que la suite (Z_n) est P_n-tendue et donc que $\mathcal{M}$ ne contient que des lois de probabilité sur $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}^+})$.

L'examen des ensembles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ va nous permettre d'obtenir des critères simples de contiguité, de séparabilité complète ou de singularité asymptotique . Si la méthode est nouvelle, les critères eux-mêmes ne sont pas essentiellement originaux et peuvent être déduits de résultats proches que l'on peut trouver par exemple pour la contiguité dans [2] et pour la singularité asymptotique dans [4] .

(2-3) <u>Proposition</u> :

1) *Etant donnée une probabilité* ν *sur* $(\overline{\mathbb{R}}^+, B_{\overline{\mathbb{R}}^+})$, $\nu \in \mathcal{N}$ *si et seulement si il existe* $\mu \in \mathcal{M}$ *avec pour tout* $A \in B_{\overline{\mathbb{R}}^+}$

(6) $$\nu(A) = \int_A x \, d\mu(x) + \nu[A \cap \{\infty\}]$$

2) *Etant donnée une probabilité* μ *sur* $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}^+})$, $\mu \in \mathcal{M}$ *si et seulement si il existe* $\nu \in \mathcal{N}$ *tel que le couple* (ν, μ) *vérifie* (6)

3) *La correspondance établie entre* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{N}$ *par* (6) *est une bijection.*

<u>Démonstration</u> :

1) Soit d'abord ν une probabilité sur $(\overline{\mathbb{R}}^+, B_{\overline{\mathbb{R}}^+})$, ν appartenant à $\mathcal{N}$; il existe une suite (ν_{n_k}) convergeant en loi vers ν , comme la suite (μ_{n_k}) est relativement compacte pour la topologie associée à la convergence des lois de probabilités sur $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}^+})$, on peut extraire

de la suite (μ_{n_k}) une sous-suite qui converge vers une probabilité μ sur $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}^+})$; pour ne pas compliquer la notation, on notera encore (μ_{n_k}) cette sous-suite.

Pour tout $F \in B_{\overline{\mathbb{R}}^+}$ on a la décomposition de Lebesgue :

$$\nu_{n_k}(F) = \int_F x \, d\,\mu_{n_k}(x) + \nu_{n_k}[F \cap \{\infty\}] .$$

On veut donc montrer que l'on a encore cette relation à la limite.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des $A \in B_{\overline{\mathbb{R}}^+}$ tels que $\mu(\delta A) = \nu(\delta A) = 0$,

où δA est la frontière de A ; il est facile de voir que $\mathcal{A}$ forme une algèbre et que la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est $B_{\overline{\mathbb{R}}^+}$.

Soit (a_p) une suite de nombres réels positifs convergeant vers l'infini et tels que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\mu\{a_p\} = \nu\{a_p\} = 0$.

Soit $A \in \mathcal{A}$, $A \cap [0,a_p] \in \mathcal{A}$ et $A \cap [a_p,+\infty] \in \mathcal{A}$

On a donc : $\nu_{n_k}[A \cap [0,a_p]] \to \nu[A \cap [0,a_p]]$

$\mu_{n_k}[A \cap [0,a_p]] \to \mu[A \cap [0,a_p]]$

et de même $\displaystyle\int_{A \cap [0,a_p]} x \, d\mu_{n_k}(x) \to \int_{A \cap [0,a_p]} x \, d\mu(x)$

on a donc $\displaystyle\nu[A] = \int_{A \cap [0,a_p]} x \, d\mu(x) + \nu[A \cap [a_p,+\infty]]$

comme lorsque $p \to \infty$ $\displaystyle\int_{A \cap [0,a_p]} x \, d\mu(x) \to \int_A x \, d\mu(x)$ et que $\nu[A \cap [a_p,+\infty]] \to \nu[A \cap \{\infty\}]$, on en déduit que pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a la relation cherchée (6).

Maintenant la famille des élèments de $B_{\overline{\mathbb{R}}^+}$ qui vérifie (6) est une classe monotone. Elle contient $\mathcal{A}$, elle contient donc la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ qui est $B_{\overline{\mathbb{R}}^+}$ d'où le résultat.

Réciproquement soit ν une probabilité sur $(\overline{\mathbb{R}}^+, B_{\overline{\mathbb{R}}^+})$, et μ un élément de $\mathcal{M}$ tels que l'on ait la relation (6) pour le couple (ν,μ).

On peut trouver une suite (μ_{n_k}) convergeant vers μ ; la suite (ν_{n_k}) est relativement compacte dans l'ensemble compact des lois de probabilités sur $(\overline{\mathbb{R}}^+, B_{\overline{\mathbb{R}}^+})$, de sorte qu'en extrayant une sous-suite que l'on note encore (ν_{n_k}), il existe $\nu' \in \mathcal{N}$ avec $(\nu_{n_k}) \to \nu'$ ($\to$pour convergence en loi).

On peut appliquer ce qui précède à ν' et à μ. On a pour tout $A \in B_{\overline{\mathbb{R}}^+}$: $\nu'(A) = \int_A x \, d\mu(x) + \nu' \, [A \cap \{\infty\}]$

on en déduit $\nu = \nu'$ et le résultat final de 1).

Remarquons que la correspondance $\nu \to \mu$ considérée définit μ comme l'unique élèment de $\mathcal{M}$ tel que l'on ait (6).

En effet soit μ' un autre élèment de $\mathcal{M}$ tel que (ν, μ') vérifie (6):

On a $\int_A x \, d\mu'(x) = \int_A x \, d\mu(x)$ pour tout $A \in B_{\mathbb{R}^+}$ et par conséquent $\mu \equiv \mu'$.

2) Soit $\mu \in \mathcal{M}$, et (μ_{n_k}) une suite extraite de (μ_n) convergeant vers μ. On peut extraire de (ν_{n_k}) une sous-suite qui converge vers un élément $\nu \in \mathcal{N}$; d'après ce qui précède (ν, μ) vérifie (6) et on a le résultat voulu.

Réciproquement soit μ une probabilité sur $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}^+})$ telle qu'il existe $\nu \in \mathcal{N}$ avec (ν, μ) vérifiant (6) ; en appliquant le 1) de la proposition on peut trouver $\mu' \in \mathcal{M}$ tel que (ν, μ') vérifie (6) d'où $\mu = \mu'$, et $\mu \in \mathcal{M}$.

3) On a déjà montré que $\nu \to \mu$ avec (ν, μ) vérifiant (6) définit μ de façon unique parmi les éléments de $\mathcal{M}$. Le résultat réciproque a aussi été vu dans la démonstration du 1), à μ on sait associer $\nu \in \mathcal{N}$ de façon unique avec (ν, μ) vérifiant (6), d'où le résultat final.

(2-4) Corollaire : (Voir [2] pour des énoncés proches).

Les énoncés suivants sont équivalents.

(*a*) (Q_n) *est contigue relativement à* (P_n)

(*b*) *pour tout* $\mu \in \mathcal{M}$ *on a* $E[\mu] = 1$

(*c*) *tout* $\nu \in \mathcal{N}$ *est une probabilité sur* $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}^+})$

(*d*) *l'application* $\mu \to \nu$ *définie par* $\nu(A) = \int_A x d\mu$ *pour* $A \in B_{\mathbb{R}^+}$ *applique bijectivement* $\mathcal{M}$ *sur* $\mathcal{N}$.

Démonstration : En effet (*a*) et (*c*) sont équivalents d'après le lemme (2-1), (*c*) et (*d*) sont équivalents et (*c*) et (*b*) sont équivalents d'après la proposition (2-3).

(2-5) Corollaire :

Les énoncés suivants sont équivalents :

(*a*) (Q_n) *et* (P_n) *sont complètement séparables*

(*b*) *il existe* $\mu \in \mathcal{M}$ *avec* $E[\mu] = 0$

(*c*) *il existe* $\nu \in \mathcal{N}$ *avec* $\nu[\{\infty\}] = 1$.

Démonstration : D'après la proposition (2-3) : (*b*) $\Longleftrightarrow$ (*c*).

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) : soit $\mu \in \mathcal{M}$ tel que $E[\mu] = 0$; on a alors $\mu = \delta_0$ où δ_0 est la mesure de Dirac en 0 ; considérons une sous-suite (μ_{n_k}) convergeant vers μ; pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mu_{n_k} [0, 1/p] \to \delta_0 [0, 1/p]$$

On peut donc trouver une sous sous-suite $(n_{k(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ croissant vers $+\infty$ telle que

$$n_k \geq n_{k(p)} \quad \text{implique} \quad \mu_{n_k} [0, 1/p] \geq 1 - 1/p$$

Ce qui signifie $P_{n_k} [Z_{n_k} \leq 1/p] \geq 1 - 1/p$

pour $n_k \in [\, n_{k(p)}, n_{k(p+1)} [$ on pose $A_{n_k} = \{Z_{n_k} \leq 1/p\}$

pour $n \neq n_k$ on pose $A_n = \Omega_n$.

On a alors $P_n[A_n] \to 1$, mais $Q_{n_k}[A_{n_k}] = \int_{\{Z_{n_k} \leq 1/p\}} Z_{n_k} \, dP_{n_k} \leq 1/p$

pour $n_k \in [n_{k(p)}, n_{k(p+1)}[$

quand $k \to \infty$ $n_k \to \infty$ $n_{k(p)} \to \infty$ et $p \to \infty$ de sorte que

$Q_{n_k}[A_{n_k}] \to 0$. D'où la complète séparabilité.

(a) $\Rightarrow$ *(c)* : d'après le lemme (2-2) on a la propriété :
pour tout $K \in \mathbb{N}^*$ $\lim \sup_n Q_n [Z_n \geq K] = 1$; donc on peut trouver pour chaque K n_K tel que :
$n_K \uparrow +\infty$ avec $\lim_K Q_{n_K} [Z_{n_K} \geq K] = 1$.

Ce qui s'écrit encore $\lim_K \nu_{n_K} [K,+\infty] = 1$.

On peut extraire de la suite (ν_{n_K}) une sous-suite (notée encore (ν_{n_K})) qui converge vers un élément $\nu \in \mathcal{N}$.

$[K,\infty]$ est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}^+$ et donc pour tout K_o fixé, on a :

$$\nu[K_o,+\infty] \geq \lim \mathrm{Sup}_K \; \nu_{n_K} [K_o,+\infty] = 1$$

pour tout K_o on a donc $\nu[K_o,+\infty] = 1$, d'où $\nu[\{\infty\}] = 1$.

(2-6) <u>Corollaire</u> :

Les énoncés suivants sont équivalents :

(a) (P_n) *et* (Q_n) *sont asymptotiquement singulières*
(b) *pour tout* $\mu \in \mathcal{M}$ *on a* $E[\mu] = 0$
(c) *la suite* (μ_n) *converge vers* δ_0 *la probabilité de Dirac en* 0.

<u>Démonstration</u> :

(c) $\Rightarrow$ *(b)* de façon triviale ; maintenant *(b)* $\Rightarrow$ *(c)* : en effet soit $\mu \in \mathcal{M}$, $E[\mu] = 0$ est équivalent à $\mu = \delta_0$, donc $\mathcal{M}$ ne contient qu'un seul élément d'où la propriété *(c)*.

$(c) \Rightarrow (a)$; pour le voir il suffit de reprendre la démonstration de la partie $(b) \Rightarrow (a)$ du corollaire (2-5) en remplaçant la sous-suite $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ par la suite (μ_n), et en posant :

$$A_n = \{Z_n \leq 1/p\} \quad \text{pour} \quad n \in [n(p), n(p+1)[\ .$$

$(a) \Rightarrow (b)$; on va montrer, ce qui est équivalent que $\mathcal{N}$ ne contient que l'élément ν avec $\nu[\{\infty\}] = 1$; soit en effet $\nu \in \mathcal{N}, \nu$ est limite d'une suite $(\nu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$; d'après l'hypothèse (Q_{n_k}) et (P_{n_k}) sont complètement séparables et donc en procédant comme la partie $(a) \Rightarrow (c)$ de la démonstration du corollaire (2-5) on en déduit que $\nu\ [\{\infty\}] = 1$ d'où le résultat.

3 - THEOREMES DE DECOMPOSITION :

Remarque préliminaire : Compte-tenu du lemme (2-1), la décomposition de Lebesgue $Q_n = a_n Q'_n + (1-a_n) Q''_n$ de (Q_n) relativement à (P_n) fournit une décomposition forte de Raoult lorsque la suite (Z_n) est P_n-uniformément intégrable ; en effet on a

$$Q'_n(A) = \frac{1}{E[Z_n]} \int_A Z_n \, d\, P_n \qquad \text{lorsque}$$

$E[Z_n] \neq 0$ et $Q'_n = P_n$ sinon ;

En posant $Z'_n = \frac{dQ'_n}{dP_n}$ on a $Q'_n[Z'_n = \infty] = 0$.

De sorte que l'on a $(Q'_n) \lhd (P_n)$.

(3-1) Théorème ([4])

Sous l'hypothèse de la convergence en loi de la suite (μ_n) *vers* μ, (Q_n) *admet une décomposition forte de Raoult relativement à* (P_n).

Démonstration : On a évidemment le résultat si (Q_n) est contigue relativement à (P_n), ou si (P_n) et (Q_n) sont asymptotiquement singulières ; on supposera donc que l'on est dans aucun de ces cas et par conséquent d'après les corollaires (2-4) et (2-6), on a :

$$0 < E[\mu] < 1.$$

On peut trouver une suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs possédant les propriétés : a) $(Y_p) \uparrow +\infty$ (quand $p \uparrow \infty$)

b) $\mu[\{Y_p\}] = 0$.

Comme $(\mu_n) \to \mu$ on a pour chaque p : $\int_0^{Y_p} d\mu_n(x) \to \int_0^{Y_p} x\, d\,\mu(x)$.

Ensuite, comme $\lim_{p\uparrow\infty} \int_0^{Y_p} x\, d\,\mu(x) = E[\mu] = \alpha$, on peut extraire de la suite (μ_n) une sous-suite $(\mu_{n(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ telle que :

$n \geq n(p) \Rightarrow \left|\int_0^{Y_p} x\, d\,\mu_n(x) - \alpha\right| \leq 1/p$.

Considérons la suite $(\bar{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des mesures suivantes sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$

$\bar{\mu}_n = \mu_n$ en restriction à l'intervalle $[0, Y_p]$ lorsque $n \in [n_{(p)}, n_{(p+1)}[$

On obtient facilement les propriétés :

(*) $\|\bar{\mu}_n - \mu_n\| \to 0$ (distance en variation des mesures)
(Cette propriété découlant directement du fait que la suite (μ_n) est tendue).

(**) $(\bar{\mu}_n) \to \mu$ (conséquence de (*))

(***) $\left(\int_0^{\infty} x\, d\,\bar{\mu}_n(x)\right) \to \int_0^{\infty} x\, d\,\mu(x) = \alpha$.

Comme à $n \in \mathbb{N}$ correspond un intervalle $[n(p), n(p+1)[$ on notera $Y_{p(n)}$ le Y_p correspondant.

On remarque que $\bar{\mu}_n$ est l'image par Z_n de la mesure P_n restreinte à $\{Z_n \leq Y_{p(n)}\}$.

On pose pour $A \in \Omega_n$.

$$\overline{Q}_n(A) = Q_n\,[A \mid Z_n \leq Y_{p(n)}]$$

$\overline{Q}_n(A)$ s'écrit $\int_A \overline{Z}_n\, d\, P_n$ où $\overline{Z}_n = \dfrac{\mathbb{1}_{\{Z_n \leq Y_{p(n)}\}}\, Z_n}{Q_n\,[Z_n \leq Y_{p(n)}]}$

quand le second membre de cette égalité a un sens, ce qui est le cas pour n assez grand, puisque
$Q_n\,[Z_n \leq Y_{p(n)}] = \int_0^\infty x\, d\, \overline{\mu}_n(x)$ et que d'après (***) $\int_0^\infty x\, d\,\overline{\mu}_n(x)$

converge vers $\alpha > 0$. Lorsque $Q_n\,[Z_n \leq Y_{p(n)}] = 0$, on pose $\overline{Z}_n = 1$.
Pour tout n $\overline{Q}_n$ est une probabilité absolument continue par rapport à P_n, de densité de Radon-Nikodym $d\,\overline{Q}_n/d\,P_n = \overline{Z}_n$.

On va montrer que la suite des lois de $\overline{Z}_n$(sous P_n) converge vers une probabilité $\overline{\mu}$ et que $E[\overline{\mu}] = 1$, ce qui d'après le corollaire (2-4), donnera la contiguité de $(\overline{Q}_n)$ relativement à (P_n).

Notons $\alpha_n = Q_n\,[Z_n \leq Y_{p(n)}]$, et prenons n tel que $\alpha_n > 0$.

$$\begin{aligned}
P_n\,[\overline{Z}_n \leq x\,] &= P_n\,[\mathbb{1}_{\{Z_n \leq Y_{p(n)}\}}\, Z_n \leq \alpha_n\, x] \\
&= P_n\,[Z_n > Y_{p(n)}] + P_n\,[Z_n \leq \alpha_n\, x \wedge Y_{p(n)}] \\
&= \mu_n\{]\,Y_{p(n)},\infty[\} + \overline{\mu}_n\,\{[0,\alpha_n\, x]\}
\end{aligned}$$

Soit x tel que $\mu\{\alpha x\} = 0$ on a :

$\mu_n\,\{[Y_{p(n)},\infty[\} \to 0$ d'après la propriété de tension de (μ_n)

$\overline{\mu}_n\,\{[0,\alpha_n\, x]\} \to \mu\{[0,\alpha x]\}$ d'après (**) et (***).

Ainsi la suite des lois de $\overline{Z}_n$ (pour P_n) converge vers $\overline{\mu}$ avec $\overline{\mu}\,\{[o,x]\} = \mu\,\{[o,\alpha x]\}$; il est claire que $E[\overline{\mu}] = 1$, d'où le résultat annoncé de contiguité pour $(\overline{\alpha}_n)$.

On définit alors pour tout n, $\hat{Q}_n$ par :

$$\hat{Q}_n = \frac{Q_n - \alpha_n \overline{Q}_n}{1 - \alpha_n} \quad \text{quand} \quad \alpha_n \neq 1.$$

(On remarque que $\alpha_n < 1$ dès que n est assez grand)
et $\hat{Q}_n = Q_n$ quand $\alpha_n = 1$.

Lorsque $\alpha_n \neq 1$, on vérifie que Q_n est une probabilité.

$$(1 - \alpha_n)\, \hat{Q}_n(A) = \int_A Z_n \, 1\!\!1_{\{Z_n > Y_{p(n)}\}} \, d\, P_n + Q_n\, [A \cap \{Z_n = \infty\}].$$

La densité de Lebesgue de $\hat{Q}_n$ par rapport à P_n est $\hat{Z}_n$ avec :

$$\hat{Z}_n = \frac{1}{1-\alpha_n} Z_n \, 1\!\!1_{\{Z_n > Y_{p(n)}\}} \quad \text{si} \quad \alpha_n \neq 1$$

$$= Z_n \quad \text{si} \quad \alpha_n = 1.$$

enfin $(\hat{Q}_n)$ et (P_n) sont asymptotiquement singulières car
$P_n\,[Z_n > Y_{p(n)}] \to 0$ alors que $\hat{Q}_n\,[Z_n > Y_{p(n)}] = 1$ dès que $\alpha_n \neq 1$.

(3-2) Théorème :

Pour toute suite (P_n, Q_n) *de couples de probabilités sur* $(\Omega_n, \mathfrak{F}_n)$, (Q_n) *admet au moins une décomposition faible de Raoult relativement à* (P_n).

Démonstration : Supposons que l'on ne soit pas dans le cas où (Q_n) est contigue à (P_n), ou dans le cas (Q_n) et (P_n) complètement séparables, alors on peut trouver $\mu \in \mathcal{M}_0$ avec $0 < E[\mu] < 1$ d'après les corollaires (2-4) et (2-5). Considérons une sous-suite (μ_{n_k}) qui converge vers μ ; on peut appliquer le théorème (3-1) à la suite $(P_{n_k}, Q_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

On a donc : $Q_{n_k} = \alpha_{n_k} \overline{Q}_{n_k} + (1 - \alpha_{n_k})\, \hat{Q}_{n_k}$ où $(\overline{Q}_{n_k})$ est contigue relativement à (P_{n_k}) et où $(\hat{Q}_{n_k})$ et (P_{n_k}) sont asymptotiquement singulières.

Posons pour $n \neq n_k$ $\overline{Q}_n = P_n$, $\alpha_n = 0$ et donc $\hat{Q}_n = Q_n$, $1 - \alpha_n = 1$; donc $(\overline{Q}_n)$ contigue relativement à P_n (avec $\mathcal{M}$ contenant les deux mesures μ et δ_1) puis $(\hat{Q}_n)$ et (P_n) sont complètement séparables, puisque $(\hat{Q}_{n_k})$ et (P_{n_k}) le sont d'où le résultat □

Dans ce qui suit, on va supposer que (P_n) et (Q_n) ne sont pas complètement séparables et sous cette hypothèse donner un critère de décomposabilité forte.

(3.3) __Théorème__ :

On suppose que (P_n) *et* (Q_n) *ne sont pas complètement séparables et que sur* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ *existe une probabilité* $\hat{P}_n$ *étrangère à* P_n .

Pour que (Q_n) *admette une décomposition forte de Raoult relativement à* (P_n) *il faut et il suffit qu'il existe pour tout* n , $K_n \in \mathcal{F}_n$ *avec les deux propriétés :*

(i) $P_n[K_n] \to 1$

(ii) $(Z_n \mathbb{1}_{K_n})$ *est* P_n*-uniformément intégrable.*

Pour la démonstration de ce résultat, on a besoin du lemme.

(3.4) __Lemme__ :

Si (P_n) *et* (Q_n) *ne sont pas complètement séparables, il existe* $\alpha > 0$ *avec la propriété :*

Pour toute suite (K_n) *où* $K_n \in \mathcal{F}_n$ *et* $P_n[K_n] \to 1$ *on a*

$$\liminf_n E_{P_n}[Z_n \mathbb{1}_{K_n}] \geq \alpha$$

__Démonstration__ : Reprenant les notations du paragraphe 2, on va d'abord montrer que'il existe $\alpha > 0$, avec $\liminf_{\mu \in \mathcal{M}} E[\mu] \geq \alpha$. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver une suite $(\mu^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$

avec $E[\mu^{(p)}] \to 0$; comme $\mathcal{M}$ est compact, on peut extraire une sous-suite $(\mu^{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers μ^∞ élément de $\mathcal{M}$.

On a : $\lim_p E[\mu^{(p)}] \geq \liminf_k E[\mu^{p_k}] \geq E[\mu^\infty]$

Ceci implique $E[\mu^\infty] = 0$; d'après le corollaire (2.5) (Q_n) et (P_n) seraien alors complètement séparables d'où la contradiction. Montrons maintenant le lemme ; en notant toujours μ_n la loi de Z_n pour P_n, puis μ'_n la loi de $Z_n 1\!\!1_{K_n}$ pour μ'_n, on a $\|\mu_n - \mu'_n\| \leq 2 P_n [K_n^c]$ de sorte que $\|\mu_n - \mu'_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$; $\mathcal{M}$ est aussi l'ensemble des points limites des suites extraites de (μ'_n).

Supposons que $\liminf_n E_{P_n}[Z_n 1\!\!1_{K_n}] < \alpha$

on peut alors trouver une suite (μ'_{n_k}) extraite de (μ'_n) telle que

$$E[\mu'_{n_k}] \to a < \alpha \text{ , avec } \mu'_{n_k} \to \mu \in \mathcal{M}$$

mais $\liminf_k E[\mu'_{n_k}] \geq E[\mu] \geq \alpha$ d'après ce qui précède, d'où la contradiction et le résultat annoncé.

<u>Démonstration du théorème (3.3)</u> :

A) <u>condition suffisante</u> :

D'après le lemme précédent, il existe $\alpha > 0$ et n_0 tel que pour $n \geq n_0$ $E_{P_n}[Z_n 1\!\!1_{K_n}] \geq \alpha$. Posons alors :

$$\overline{Q}_n(F) = \frac{\int_F Z_n 1\!\!1_{K_n} dP_n}{E_{P_n}[Z_n 1\!\!1_{K_n}]} = \int_F \overline{Z}_n \, dP_n \text{ avec } \overline{Z}_n = \frac{Z_n 1\!\!1_{K_n}}{E_{P_n}[Z_n 1\!\!1_{K_n}]}$$

D'après l'hypothèse et le lemme (3.4) $(\overline{Z}_n)$ et P_n-uniformément intégrable, et $\overline{Q}_n[\overline{Z}_n = \infty] = 0$, on a donc d'après le lemme (2.1) $(\overline{Q}_n) \triangleleft (P_n)$.

Posons alors $\hat{Q}_n[\,.\,] = Q_n[\,.\,|\,K_n^c\,]$ lorsque $Q_n[\,K_n^c\,] \neq 0$

$= \hat{P}_n[\,.\,]$ lorsque $Q_n[\,K_n^c] = 0$

en posant $\alpha_n = E_{P_n}\,[Z_n\,\mathbb{1}_{K_n}\,]$, on a $Q_n[K_n^c] = (1-\alpha_n)$

et $Q_n(.) = \alpha_n\,\overline{Q}_n(.) + (1-\alpha_n)\,\hat{Q}_n(.)$

enfin on a $\hat{Q}_n(K_n) = 0$ d'où le résultat de décomposition.

B) <u>condition nécessaire</u> : (on s'inspire de [4])

Soit $Q_n = \alpha_n\overline{Q}_n + (1-\alpha_n)\,\hat{Q}_n$ une décomposition forte de (Q_n).
On note (K_n,K_n^c) la décomposition de Hahn de Ω_n pour la mesure $\hat{Q}_n - P_n$.

Considérons $A_n \in \mathfrak{F}_n$ tel que $P_n[A_n] \to 1$ et $\hat{Q}_n(A_n) \to 0$

$$(P_n - \hat{Q}_n)(A_n) \to 1$$

de sorte que pour n assez grand $A_n \subset K_n$.

On a donc $P_n[K_n] \to 1$ et $P_n[K_n^c] \to 0$.

Soit maintenant $B_n \in \mathfrak{F}_n$ avec $P_n[B_n] \to 0$

$$P_n[B_n \cap K_n] \geq \hat{Q}_n(B_n \cap K_n)$$

et donc $\hat{Q}_n(B_n \cap K_n) \to 0$.

Comme $\overline{Q}_n[B_n \cap K_n] \to 0$, on en déduit

$$Q_n[B_n \cap K_n] \to 0.$$

On pose $Q_n^1[\,.\,] = Q_n[\,.\,|\,K_n]$ si $Q[K_n] \neq 0$

$= P_n[\,.\,]$ si $Q[K_n] = 0$

$$\begin{aligned} Q_n^2[\,.\,] &= Q_n[\,.\,|\,K_n^{\,c}\,] && \text{si } Q[K_n^{\,c}] \neq 0 \\ &= \hat{P}_n[\,.\,] && \text{si } Q[K_n^{\,c}] = 0 \end{aligned}$$

On a alors la décomposition forte

$$Q_n[\,.\,] = a_n\, Q_n^1[\,.\,] + (1-a_n)\, Q_n^2[\,.\,]$$

avec $a_n = Q[K_n]$ et $1 - a_n = Q[K_n^{\,c}]$; en effet, comme $Q_n[K_n] \geq E_{P_n}[Z_n \mathbb{1}_{K_n}]$ on a en utilisant le lemme (3.4) $(Q_n^1) \lhd (P_n)$, d'autre part (Q_n^2) est asymptotiquement singulière à (P_n) car $P_n[K_n] \to 1$ et $Q_n^2[K_n] = 0$.

D'après le lemme (2.1) (Z_n^1) est P_n-uniformément intégrable avec

$Z_n^1 = \dfrac{Z_n \mathbb{1}_{K_n}}{Q_n[K_n]}$ (densité de Lebesgue de Q_n par rapport à P_n)

comme $Z_n \mathbb{1}_{K_n} \leq Z_n^1$, $(Z_n \mathbb{1}_{K_n})$ est aussi P_n-uniformément intégrable, d'où le résultat final.

(3.5) <u>Remarque</u> : Les deux cas d'existence d'une décomposition forte de Raoult rentrent dans le cadre d'application du théorème (3.3). C'est évident avec la décomposition de Lebesgue lorsque (Z_n) est P_n-uniformément intégrable ; (par contre on n'a pas besoin alors de supposer (Q_n) et (P_n) non complètement séparables).

Dans le deuxième cas (celui du théorème (3.7)), posons $K_n = \{Z_n \leq y_{p(n)}\}$; alors si $\mu_n \to \mu$ et en posant μ'_n la loi de $Z_n \mathbb{1}_{K_n}$ pour P_n on a, d'après la démonstration du théorème (3.1) $\mu'_n \to \mu$ et $E[\mu'_n] \to E[\mu]$ de sorte que $(Z_n \mathbb{1}_{K_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est P_n-uniformément intégrable d'où le résultat.

(3.6) <u>Remarque</u> : On peut préciser dans l'esprit du paragraphe 2, l'ensemble $\overline{\mathcal{M}}$ des points limites des lois $\overline{\mu}$ des densités de Lebesgue $\overline{Z}_n$ (pour P_n) de $\overline{Q}_n$ relativement à P_n, dans le cas d'une décomposition forte, $\mathcal{M}$ désignant comme précédemment l'ensemble des points limites des lois μ des densités Z_n (pour P_n) de Q_n relativement à P_n.

Comme on l'a vu, $\mathcal{M}$ est encore l'ensemble des points limites des lois de $Z_n \mathbb{1}_{K_n}$ (pour P_n) de sorte que $\overline{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des lois $\overline{\mu}$ définies par $\overline{\mu}\{[0,x]\} = \mu\{[0, E[\mu]\, x]\}$ pour $\mu \in \mathcal{M}$.

4 - CONTIGUITE ET ABSOLUE CONTINUITE ASYMPTOTIQUE

Dans ce paragraphe nous supposons que les suites (P_n) et (Q_n) sont définies sur le même espace $(\Omega,\mathcal{F})$, où, jusqu'à la remarque (4.3) compris, Ω est polonais, $\mathcal{F}$ étant sa tribu borélienne. Nous étudions d'abord la question suivante : supposons que $(P_n) \overset{f}{\to} P$ au sens de la convergence étroite des probabilités sur Ω, que peut-on dire de la suite (Q_n) lorsqu'on a contiguité de (Q_n) par rapport à (P_n).

Dans la deuxième partie du paragraphe $(\Omega,\mathcal{F})$ est quelconque et on s'intéresse au cas où $(P_n) \overset{m}{\to} P$ (au sens où pour tout $A \in \mathcal{F}$, $(P_n(A) \to P(A))$. On termine par un résultat de convergence stable.

(4.1) Lemme :

Si (P_n) est relativement compacte (dans l'espace des probabilités sur $(\Omega,\mathcal{F})$ muni de la topologie de la convergence faible des mesures et si (Q_n) est contigue relativement à (P_n), (Q_n) est relativement compacte.

Démonstration : Pour que (Q_n) soit relativement compacte, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact K de Ω tel que $Q_n[K^c] \leq \varepsilon$ pour tout n. soit ε, d'après la contiguité de (Q_n) relativement à (P_n), il existe α, n_o tel que, pour tout $F_n \in \mathcal{F}$ pour $n \geq n_o$, on ait $P_n[F_n] \leq \alpha \Rightarrow Q_n[F_n] \leq \varepsilon$.

Comme (P_n) est relativement compact, il existe K_o compact avec $P_n[K_o^c] \leq \varepsilon$; d'après ce qui précède, on a :

pour $n \geq n_o$ $\quad Q_n[K_o^c] \leq \varepsilon$

pour $n = 1 \ldots n_o-1$, il existe $K_1, \ldots, K_{n_o-1}$ avec

$Q_i[K_i^c] \leq \varepsilon$ pour $i = 1 \ldots n_o-1$

De sorte que en posant $K = (\bigcup_{i=1}^{n_o-1} K_i) \cup K_o$ on a pour tout n,

$Q_n[K] \leq \varepsilon$, et le résultat annoncé.

(4.2) Théorème :

On suppose que $(P_n) \overset{f}{\to} P$ *et que* (Q_n) *est contigue à* (P_n) ; *alors, toute probabilité* Q *point limite de la suite* (Q_n) *est absolument continue par rapport à* P.

Démonstration : On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des $A \in \mathcal{F}$ tels que $P(\delta A) = Q(\delta A) = 0$, (comme dans la démonstration de la proposition (2.3) $\mathcal{A}$ est une algèbre et $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$; soit $(Q_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de (Q_n) qui converge vers Q, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $Q(A) = \lim_k Q_{n_k}(A)$ et $P(A) = \lim_k P_{n_k}(A)$ ainsi :

$$Q(A) = \lim_k \int_A Z_{n_k} \, dP_{n_k} + \lim_k Q_{n_k}[A \cap \{Z_{n_k} = \infty\}] \; .$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $k_o \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq k_o$ implique $Q_{n_k}[Z_{n_k} = \infty] \leq \varepsilon$ d'après la contiguité et il existe K tel que $\int_{A \cap \{Z_{n_k} > K\}} dP_{n_k} \leq \varepsilon$

d'après le lemme (2.1) ; ainsi pour $k \geq k_o$ on a la relation :

$$Q(A) \leq K \, P_{n_k}(A) + 2\,\varepsilon \qquad \text{d'où à la limite :}$$

$$(7) \qquad Q(A) \leq K \, P(A) + 2\,\varepsilon$$

(Notons que K dépend de ε mais pas de A).

Soit alors $\mathcal{C}$ la famille des éléments A de $\mathcal{F}$ pour lesquels (7) est vraie ; $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ est une classe monotone, d'où $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{F}$.

On prend maintenant $A \in \mathcal{F}$ avec $P(A) = 0$, on déduit de (7) $Q(A) \leq 2\,\varepsilon$, où ε est arbitraire, d'où le résultat d'absolue continuité de Q par rapport à P.

(4.3) <u>Remarque</u> : Le résultat obtenu ici est beaucoup plus faible que le corollaire (2-4) où est obtenue une propriété d'absolue continuité des points limites des lois des densités de Lebesgue ; soulignons en quelques différences :

a) alors que P est l'unique point limite de la suite (P_n), Q n'est pas nécessairement unique (ex : soit $\tilde{P}$ une probabilité absolument continue par rapport à une probabilité P, prenons :

$P_n = P$, $Q_{2n} = P$, $Q_{2n+1} = \tilde{P}$ on a $(Q_n) \triangleleft (P_n)$ avec deux points limites pour (Q_n).)

b) soit $(P_n) \xrightarrow{f} P$ et $(Q_n) \xrightarrow{f} Q$, l'absolue continuité $Q << P$ n'implique pas la contiguité de (Q_n) relativement à (P_n) ; (ex : prenons $P_n = \delta_{1-1/n}$ $Q_n = \delta_{1+1/n}$, on a $P = Q = \delta_1$ alors que pour tout n $P_n \perp Q_n$ et donc(P_n) et (Q_n) sont complètement séparables.

Les résultats (4-1) et (4-2) de ce paragraphe sont connus : (4-1) figure par exemple dans Roussas [5] ; pour (4-2) la méthode de démonstration est celle employée par Gihman Skorokhod ([6] chap. 7 p. 444) pour obtenir une propriété d'absolue continuité ; je remercie G.K. Eagleson de m'avoir signalé cette référence.

On considère maintenant $(\Omega,\mathcal{F})$ quelconque.

(4-4) <u>Théorème</u> :

On suppose que $(P_n) \stackrel{\text{m}}{\Rightarrow} P$ *(pour tout* $A \in \mathcal{F}, P_n(A) \to P(A)$ *) et que* (Q_n) *est contigue relativement à* (P_n)*, alors on peut trouver une sous-suite* $(Q_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *et une probabilité* Q *sur* $(\Omega,\mathcal{F})$ *telles que* $(Q_{n_k}) \stackrel{\text{m}}{\Rightarrow} Q$ *.*
De plus Q *est absolument continue par rapport à* P*.*

<u>Démonstration</u> : La seconde assertion est évidente lorsque l'on a la première : en effet soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) = 0$; on a $P_n(A) \to 0$ et donc par contiguité $Q_n(A) \to 0$ donc $Q_{n_k}(A) \to 0$; d'où $Q(A) = 0$.
Montrons la première assertion ; soit $\tilde{P}$ défini sur $(\Omega,\mathcal{F})$ par $\tilde{P} = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} P_n$; pour tout n, P_n est absolument continue par rapport à $\tilde{P}$, de sorte que en posant $\tilde{P}_n = \tilde{P}$, on a $(P_n) \lhd (\tilde{P}_n)$.

En effet, notons $z_n = dP_n/d\tilde{P}$ et $z = dP/d\tilde{P}$ (il est évident que l'on a $P \ll \tilde{P}$). On a pour tout $A \in \mathcal{F}$:

$$\int_A z_n \, d\tilde{P} \to \int_A z \, d\tilde{P},$$

donc d'après un résultat classique (z_n) est une suite $\tilde{P}$-uniformément intégrable et $P_n[z_n = \infty] = 0$ de sorte que le critère *b)* du lemme (2-1) fournit la contiguité $(P_n) \lhd (\tilde{P}_n)$.

Par transitivité on trouve $(Q_n) \triangleleft (\tilde{P}_n)$. Soit $\tilde{Z}_n$ la densité de Lebesgue de Q_n par rapport à $\tilde{P}$; $(\tilde{Z}_n)$ est $\tilde{P}$-uniformément intégrable ; d'après le critère de compacité de Dunford-Pettis (voir par exemple [9] chap. 1 théorème 25), on peut extraire de $(\tilde{Z}_n)$ une sous-suite $(\tilde{Z}_{n_k})$ qui converge au sens de la topologie $\sigma(\mathbb{L}^1(\tilde{P}), \mathbb{L}^\infty(\tilde{P}))$, il existe donc $Z \in \mathbb{L}^1(\tilde{P})$ avec, pour tout $A \in \mathcal{F}$

$$\int_A \tilde{Z}_{n_k} \, d\tilde{P} \to \int_A Z \, d\tilde{P}.$$

Comme (toujours d'après le *b)* du lemme (2-1)) $Q_{n_k}[A \cap \{\tilde{Z}_{n_k} = \infty\}] \to 0$ on a donc pour tout $A \in \mathcal{F}$:

$$Q_{n_k}(A) \to Q(A) = \int_A Z \, d\tilde{P}.$$

D'après le théorème de Vitali-Hahn-Saks, Q est une probabilité et la démonstration est terminée.

Le théorème (4-4) va nous permettre de faire le lien entre contiguité et convergence "stable" (voir, pour cette notion introduite par Renyi, par exemple [7]).
Commençons par un critère élémentaire de contiguité :

(4-5) Lemme :

Etant donné $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ espaces mesurables quelconques et (P_n, Q_n) couple de probabilités sur $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, (Q_n) est contigue relativement à (P_n) si et seulement si pour toute suite (g_n) de fonctions bornées par 1, où g_n est mesurable de $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ dans $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$, on a l'implication :

$$P_n(g_n) \to 0 \Rightarrow Q_n(g_n) \to 0.$$

Démonstration : Seule la partie nécessaire demande une démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$; $P_n(g_n) \geq P_n(g_n \mathbb{1}_{\{g_n > \varepsilon\}}) \geq \varepsilon P_n\{g_n > \varepsilon\}$

donc $P_n(g_n) \to 0$ implique $P_n[g_n > \varepsilon] \to 0$.

$(Q_n) \lhd (P_n)$ entraîne $Q_n[g_n > \varepsilon] \to 0$.

$$\text{Maintenant } Q_n(g_n) = Q_n(g_n \mathbb{1}_{\{g_n \leq \varepsilon\}}) + Q_n(g_n \mathbb{1}_{\{g_n > \varepsilon\}})$$
$$\leq \varepsilon + Q_n[g_n > \varepsilon]$$

d'où le résultat.

(4-6) <u>Lemme</u> :

pour chaque $n \in \mathbb{N}$ *on considère* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, $(\mathcal{X}_n, \mathcal{B}_n)$, (P_n, Q_n) *couple de probabilités sur* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, $T_n(\omega_n, dx_n)$ *probabilité de transition de* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ *dans* $(\mathcal{X}_n, \mathcal{B}_n)$, *on note* R_n (resp: $\tilde{R}_n$) *les probabilités* $R_n(d\omega_n, dx_n) = P_n(d\omega_n)\, T_n(\omega_n, dx_n)$ (resp : $\tilde{R}_n(d\omega_n, dx_n) = Q_n(d\omega_n)\, T_n(\omega_n, dx_n)$) *définies sur* $(\Omega_n \times \mathcal{X}_n, \mathcal{F}_n \otimes \mathcal{B}_n)$; $R_n^{\mathcal{X}_n}$ (resp : $\tilde{R}_n^{\mathcal{X}_n}$) *désignent les marginales de* R_n (resp : $\tilde{R}_n$) *sur* $(\mathcal{X}_n, \mathcal{B}_n)$.

alors sous l'hypothèse : (Q_n) *contigue relativement à* (P_n)

on a :
a) $(\tilde{R}_n)$ *contigue relativement à* (R_n)
b) $(\tilde{R}_n^{\mathcal{X}_n})$ *contigue relativement à* $(R_n^{\mathcal{X}_n})$

<u>Démonstration</u> : Elle est immédiate : puisque pour tout $B_n \in \mathcal{B}_n$ (resp : $A_n \in \mathcal{F}_n \otimes \mathcal{B}_n$) on a $R_n^{\mathcal{X}_n}(B_n) = P_n(T_n(\cdot, B_n))$ (resp : $R_n(A_n) = P_n(\int_{\mathcal{X}_n} \mathbb{1}_{A_n}(\cdot, x_n)\, T_n(\cdot, dx_n))$.

On obtient le résultat désiré en appliquant le lemme (4-5) à $g_n(\cdot) = T_n(\cdot, B_n)$ (resp : $g_n(\cdot) = \int_{\mathcal{X}_n} \mathbb{1}_{A_n}(\cdot, x_n)\, T_n(\cdot, dx_n)$).

□

On considère maintenant $(P_n, Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie sur un espace $(\Omega,\mathcal{F})$ et $(\mathfrak{X},\mathcal{B})$ un espace polonais muni de sa tribu borélienne.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(\mathfrak{X},\mathcal{B})$.

(4-7) <u>Définition</u> :

On dira que (X_n) converge de façon stable pour (P_n) si pour tout $A \in \mathcal{F}$, toute fonction f continue bornée de $\mathfrak{X}$ dans $\mathbb{R}^+$ la suite $(E_{P_n}[\mathbb{1}_A f(X_n)])_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On sait montrer alors (voir [8]) qu'il existe une probabilité R sur $(\Omega\times\mathfrak{X},\mathcal{F}\otimes\mathcal{B})$ telle que :

$$E_{P_n}[\mathbb{1}_A f(X_n)] \to R(\mathbb{1}_A \otimes f).$$

Cette notion de convergence est intermédiaire entre la convergence en loi de (X_n) et la convergence en probabilité ; on dira que R est la limite <u>stable</u> de (X_n) pour (P_n).
On peut tirer de [8] (théorème (2-8) et proposition (2-10), le résultat suivant :

(4-8) <u>Proposition</u> :

Si $\mathcal{F}$ est séparable, si (X_n) converge en loi pour (P_n) et si $P_n \overset{m}{\to} P$, on peut extraire de (X_n) une sous-suite (X_{n_k}) qui converge de façon stable pour (P_{n_k}).

(4- 9) <u>Lemme</u> :

La proposition précédente tient sans hypothèse de séparabilité pour $\mathcal{F}$.

Démonstration :

On considère $\tilde{P}$ la probabilité $\tilde{P} = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} P_n$, comme $P_n \overset{m}{\to} P$, on a $P \ll \tilde{P}$, et on note $\tilde{Z}_n = dP_n/d\tilde{P}$, $\tilde{Z} = dP/d\tilde{P}$.

Soit $\mathcal{F}'$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les deux suites $(\tilde{Z}_n)$, (X_n) et par $\tilde{Z}$. $\mathcal{F}'$ est une tribu séparable. D'après la proposition (4-8) précédente, il existe une sous-suite (P_{n_k}) et une probabilité R sur $(\Omega\times\mathcal{X}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{B})$ telle que pour toute f continue bornée de $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ dans $(\mathbb{R}^+,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$, et toute h bornée mesurable de $(\Omega,\mathcal{F}')$ dans $(\mathbb{R}^+,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$

(i) : $P_{n_k}(h\, f(X_{n_k})) \to R(h\otimes f)$

R s'écrit $R(d\omega,dx) = P(d\omega)\, T(\omega,dx)$ où $\omega \to T(\omega,dx)$ est $\mathcal{F}'$-mesurable, de sorte que la convergence (i) s'écrit :

(ii) : $\tilde{P}(\tilde{Z}_{n_k}\, h\, f(X_{n_k})) \to \tilde{P}(\tilde{Z}\, h\, T(.,f))$.

On veut montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a :

$$P_{n_k}(\mathbb{1}_A\, f(X_{n_k})) \to R(\mathbb{1}_A \otimes f).$$

Posons $h = E_{\tilde{P}}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}']$, on a :

$$P_{n_k}(\mathbb{1}_A\, f(X_{n_k})) = \tilde{P}(\tilde{Z}_{n_k}\, \mathbb{1}_A\, f(X_{n_k})) = \tilde{P}(\tilde{Z}_{n_k}\, h\, f(X_{n_k}))$$

et d'après (ii) on a la convergence vers $\tilde{P}(\tilde{Z}\, h\, T(.,f))$, or ce dernier terme est $\tilde{P}(\tilde{Z}\, \mathbb{1}_A\, T(.,f)) = R(\mathbb{1}_A \otimes f)$; d'où le résultat.

(4-10) Théorème :

Soit $(\Omega,\mathcal{F})$, *et soit* $(\mathfrak{X},\mathcal{B})$ *un espace polonais muni de sa tribu borélienne,* $(P_n,Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suite de couples de probabilités sur* $(\Omega,\mathcal{F})$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suite de variables aléatoires de* $(\Omega,\mathcal{F})$ *dans* $(\mathfrak{X},\mathcal{B})$; *sous l'hypothèse de contiguité de* (Q_n) *relativement à* (P_n) *on a le résultat suivant :*

Si (X_n) *converge de façon stable pour* (P_n) , *alors on peut extraire de* (X_n) *une sous-suite* (X_{n_k}) *qui converge de façon stable pour* (Q_{n_k}) . *De plus soit* R *(resp :* $\tilde{R}$*) la limite stable de* (X_n) *pour* (P_n) *(resp : de* (X_{n_k}) *pour* (Q_{n_k}) *), en notant*

$R(d\omega,dx) = P(d\omega)\ T(\omega,dx)$ (resp : $\tilde{R}(d\omega,dx) = Q(d\omega)\ \tilde{T}(\omega,dx)$

on a $Q \ll P$.

Démonstration :

On va montrer que les hypothèses de (4-8) et (4-9) sont satisfaites pour une sous-suite de (X_n) pour les probabilités Q_n.

Lim stable $(X_n) = R$ implique, en prenant $f = 1$ dans la définition (4-7) que pour tout $A \in \mathcal{F}$ on a $P_n(A) \to P(A)$. D'après le théorème (4-4), on peut trouver une sous-suite $(Q_{n'})$ de (Q_n) et une probabilité $Q \ll P$ sur $(\Omega,\mathcal{F})$ telle que $Q_{n'}(A) \to Q(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

On prend maintenant $A = \Omega$, on a alors :

$E_{P_n}[f(X_n)] \to R^{\mathfrak{X}}(f)$.

Ce qui signifie que (X_n) converge en loi vers $R^{\mathfrak{X}}$ (pour P_n) ; de sorte que d'après le lemme (4-1) appliqué aux deux suites : suite des lois de $X_{n'}$ pour $P_{n'}$ et suite des lois de $X_{n'}$ pour $Q_{n'}$, cette seconde suite étant contigue relativement à la première, il existe une sous-suite $(X_{n''})$ extraite de $(X_{n'})$ telle que $(X_{n''})$ converge en loi pour $(Q_{n''})$.

Appliquant (4-8) (4-9) à la suite $(X_{n''})$ pour $(Q_{n''})$ on obtient une sous-suite $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant de façon stable pour (Q_{n_k}).

Notons $\tilde{R}$ la probabilité sur $(\Omega\times\mathfrak{X}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{B})$ limite stable de (X_{n_k}) pour (Q_{n_k}), avec $\tilde{R}(d\omega, dx) = \tilde{P}(d\omega)\ \tilde{T}(\omega,dx)$.

Pour tout $A \in \tilde{\mathcal{F}}$ on obtient $Q_{n_k}(A) \to \tilde{P}(A)$; comme d'après ce qui précède on a : $Q_{n_k}(A) \to Q(A)$ $\tilde{P} = Q$, et on a la propriété annoncée.

REFERENCES :

[1] G.K. Eagleson - J. Mémin : *Sur la contiguité de deux suites de mesures ; généralisation d'un théorème de Kabanov-Liptser-Shiryayev.* Sém. de Proba. XVI ; Lect. Notes in Maths n° 920 - Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York 1982.

[2] W.J. Hall - R.M. Loynes : *On the concept of contiguity.* The annals of Probability, 1977, vol. 5 n° 2.

[3] L. Le Cam : *Local asymptotically normal families of distributions;* Univer. Calif. Publ. Statist. 3 (1960) 37-98.

[4] J.P. Raoult : *Décomposition de Lebesgue des suites de mesures.* Bull. Sc. Math. 2ème série. 94, 1970 209-229.

[5] G.G. Roussas : *Contiguity of Probability measures : some applications of statistics.* Cambridge University Press (1972).

[6] I.I. Gihman - A.V. Skorokhod : *Theory of stochastic processes.* Tome 1. Springer Verlag - Berlin-Heidelberg - New-York 1975.

[7] D.J. Aldous - G.K. Eagleson : *On mixing and stability of limit theorems :* The annals of Probability (1978) vol. 6 n° 2 p. 325-331.

[8] J. Jacod - J. Mémin : *Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité.* Séminaire de Probabilité XV (1981). Lecture notes in Maths. n° 850 - Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York.

[9] C. Dellacherie - P.A. Meyer : *Probabilités et potentiels.* (Tome 1) Hermann, Paris (1975).