PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN JACOD

Processus de Hellinger, absolue continuité, contiguïté

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1983, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1983___1_A3_0>

PROCESSUS DE HELLINGER, ABSOLUE CONTINUITE, CONTIGUITE

Jean JACOD

Université de Paris VI
Labo. Probabilités Tour 46-56
4 place Jussieu
75005 PARIS

Ce qui suit résulte de discussions avec J. Mémin et A. Shiryayev, lors de la visite de ce dernier à Rennes. L'auteur ne fait que rédiger des idées dues pour l'essentiel à ces deux personnes.

1 - INTRODUCTION

Cet article propose une démonstration nouvelle, et à notre avis plus simple que les précédentes, pour des résultats connus, avec quelques améliorations et compléments de détail: il s'agit d'abord des critères d'absolue continuité ou de singularité obtenus dans [5] (cas quasi-continu à gauche) et [6] (cas général; voir aussi [4], chap. VIII); ensuite des critères de contiguité ou d'entière séparabilité dus à Eagleson et Mémin [2], Liptcer, Pukelsheim et Shiryayev [8], Liptcer et Shiryayev [7] (voir aussi [3] et [9]).

Dans tous les cas, il s'agit de comparer deux probabilités P et P', ou deux suites de probabilités. Ce qui suit repose sur deux idées: la première, déjà présente dans [7] ou [3], consiste à utiliser une mesure auxiliaire qui domine P et P' (au lieu de la décomposition de Lebesgue de P' par rapport à P, comme dans [4]); la seconde consiste à introduire une famille de "processus de Hellinger" indicée par $\alpha\in]0,1[$ (à la manière de [7] pour $\alpha = 1/2$) et à caractériser le comportement relatif de P et P' par la limite en 0 de ces processus de Hellinger: l'étude de cette limite remplace (et simplifie) l'étude fine du comportement à l'infini des semimartingales ou des martingales exponentielles.

Avant de considérer des espaces filtrés, et pour montrer comment les choses marchent dans un cas simple, nous rappelons quelques propriétés élémentaires des intégrales de Hellinger. Soit donc P et P' deux probabilités sur l'espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}})$. Soit Q une autre probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$, vérifiant:

1.1 $$P \ll Q \quad , \qquad P' \ll Q \quad .$$

Soit alors

1.2 $$z = \frac{dP}{dQ} \, , \qquad z' = \frac{dP'}{dQ} \, ,$$

et, pour $\alpha \in]0,1[$

1.3 $$h_\alpha(P,P') = E_Q(z^\alpha z'^{1-\alpha}) \, .$$

Il est extrêmement facile de vérifier que $h_\alpha(P,P')$ ne dépend pas de la probabilité Q vérifiant 1.1. D'après l'inégalité de Jensen, on a

1.4 $$h_\alpha(P,P') \leq 1 \, .$$

Les rapports avec la distance de Hellinger sont les suivants: la <u>distance de Hellinger</u> de P et P' est

$$d(P,P') := E_Q[(\sqrt{z} - \sqrt{z'})^2] = 2[1 - h_{1/2}(P,P')] .$$

1.5 LEMME : a) <u>Il y a équivalence entre</u>: (i) $P' \ll P$
(ii) $P'(z>0) = 1$
(iii) $\lim_{\alpha \downarrow 0} h_\alpha(P,P') = 1$.

b) <u>Il y a équivalence entre</u>: (i) $P' \perp P$
(ii) $P'(z>0) = 0$
(iii) $\lim_{\alpha \downarrow 0} h_\alpha(P,P') = 0$.

<u>Preuve</u>. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) est trivial dans les deux cas (a) et (b). On a $\lim_{\alpha \downarrow 0} z^\alpha z'^{1-\alpha} = z' 1_{\{z>0\}}$, et $0 \leq z^\alpha z'^{1-\alpha} \leq z + (1-\alpha) z'$, donc

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} h_\alpha(P,P') = E_Q(z' 1_{\{z>0\}}) = P'(z>0) \, ,$$

et on en déduit (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) dans les deux cas (a) et (b). ∎

Passons à la contiguité. Pour chaque n $\mathbb{N}$, soit (P^n, P'^n) un couple de probabilités sur $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n)$. Soit

1.6 $$Q^n = \frac{1}{2}(P^n + P'^n)$$

1.7 $$z^n = \frac{dP^n}{dQ^n} \, , \qquad z'^n = \frac{dP'^n}{dQ^n} \, ,$$

de sorte que $z^n + z'^n = 2$. On a

1.8 $$P^n(z^n \leq \varepsilon) = E_{Q^n}(z^n 1_{\{z^n \leq \varepsilon\}}) \leq \varepsilon \, ,$$

donc

1.9 La suite $(\frac{1}{z^n}, P^n)$ est tendue (i.e., $\lim_{N\uparrow\infty} \limsup_n P^n(\frac{1}{z^n} \geq N) = 0$).

Rappelons que <u>la suite</u> (P'^n) <u>est contigue à la suite</u> (P^n) (on écrit $(P'^n) \lhd (P^n)$) si pour tous $A^n \in \underline{\underline{F}}^n$ vérifiant $P^n(A^n) \longrightarrow 0$ on a $P'^n(A^n) \longrightarrow 0$. On dit que <u>les deux suites</u> (P'^n) <u>et</u> (P^n) <u>sont entièrement séparées</u> (et on écrit $(P'^n) \Delta (P^n)$) s'il existe une sous-suite (n_k) et $A^{n_k} \in \underline{\underline{F}}^{n_k}$ tels que

$$1.10 \qquad P^{n_k}(A^{n_k}) \longrightarrow 1 , \quad P'^{n_k}(A^{n_k}) \longrightarrow 0 .$$

1.11 LEMME : a) <u>Il y a équivalence entre</u>: (i) $(P'^n) \lhd (P^n)$
(ii) <u>la suite</u> $(\frac{1}{z^n}, P'^n)$ <u>est tendue</u>
(iii) $\lim_{\alpha\downarrow 0} \liminf_n h_\alpha(P^n, P'^n) = 1$.

b) <u>Il y a équivalence entre</u>: (i) $(P'^n) \Delta (P^n)$
(ii) $\liminf_n P'^n(z^n \geq \varepsilon) = 0$ <u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$
(iii) $\lim_{\alpha\downarrow 0} \liminf_n h_\alpha(P^n, P'^n) = 0$.

Les implications (i)$\Longleftrightarrow$ (iii) du lemme 1.5 sont des cas particuliers car, si $P^n = P$ et $P'^n = P'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(P'^n) \lhd (P^n) \Longleftrightarrow P' \ll P$, et $(P'^n) \Delta (P^n) \Longleftrightarrow P' \perp P$. Rappelons qu'ici on a 1.6 (les équivalences (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) seraient fausses si on supposait seulement 1.1).

<u>Preuve</u>. (α) Supposons qu'on n'ait pas (a-ii). Il existe alors $n_k \uparrow \infty$ et $\theta > 0$ tels que $P'^{n_k}(z^{n_k} \leq \frac{1}{k}) \geq \theta$ pour tout k. D'après 1.8, on a $P^{n_k}(z^{n_k} \leq \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k} \longrightarrow 0$, ce qui contredit $(P'^n) \lhd (P^n)$. Donc (a-i) $\Rightarrow$ (a-ii).

(β) Supposons (a-ii), et soit $A^n \in \underline{\underline{F}}^n$ avec $P^n(A^n) \longrightarrow 0$. On a

$$P'^n(A^n) \leq P'^n(z^n \leq \varepsilon) + E_{Q^n}(z'^n 1_{A^n \cap \{z^n > \varepsilon\}})$$
$$\leq P'^n(z^n \leq \varepsilon) + \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} E_{Q^n}(z^n 1_{A^n}) = P'^n(z^n \leq \varepsilon) + \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} P^n(A^n)$$

(car $z^n + z'^n = 2$). Donc $\limsup_n P'^n(A^n) \leq \limsup_n P'^n(z^n \leq \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Comme (a-ii) équivaut à: $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_n P'^n(z^n \leq \varepsilon) = 0$, on a $P^n(A^n) \longrightarrow 0$, d'où (a-i).

(γ) Supposons que $(P'^n) \Delta (P^n)$, et soit (n_k, A^{n_k}) vérifiant 1.10; on a

$$P'^{n_k}(z^{n_k} \geq \varepsilon) \leq P'^{n_k}(A^{n_k}) + E_{P^{n_k}}(1_{(A^{n_k})^c} \frac{z'^{n_k}}{z^{n_k}} 1_{\{z^{n_k} \geq \varepsilon\}})$$
$$\leq P'^{n_k}(A^{n_k}) + \frac{2}{\varepsilon} P^{n_k}((A^{n_k})^c),$$

donc $P'^{n_k}(z^{n_k} \geq \varepsilon) \longrightarrow 0$ et on a (b-ii).

(δ) Supposons (b-ii). Il existe une suite $n_k \uparrow \infty$ avec $P'^{n_k}(z^{n_k} \geq \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}$. Comme $P^{n_k}(z^{n_k} \geq \frac{1}{k}) \geq 1 - \frac{1}{k}$ on a 1.10 avec $A^{n_k} = \{z^{n_k} \geq \frac{1}{k}\}$, d'où (b-i).

(γ) Etant donnée la forme des fonctions: $z \rightsquigarrow z^{\alpha}(2-z)^{1-\alpha}$ on voit facilement qu'il existe trois fonctions $\beta, \gamma_1, \gamma_2 :]0,1[\longrightarrow]0,\infty[$, croissantes, tendant vers 0 lorsque la variable tend vers 0, et vérifiant $\gamma_1 \leq \gamma_2$ et

1.12 $$-\beta(\alpha) - 2.1_{\{z \leq \gamma_2(\alpha)\}} \leq z^{\alpha}(2-z)^{1-\alpha} - (2-z) \leq \beta(\alpha) - 2.1_{\{z \leq \gamma_1(\alpha)\}}.$$

Comme $z^n + z'^n = 2$ et $E_{Q^n}(z^n) = 1$, il vient

$$-\beta(\alpha) - P^n(z^n \leq \gamma_2(\alpha)) - P'^n(z^n \leq \gamma_2(\alpha))$$

$$\leq h_{\alpha}(P^n, P'^n) - 1 \leq \beta(\alpha) - P^n(z^n \leq \gamma_1(\alpha)) - P'^n(z^n \leq \gamma_1(\alpha)).$$

On a $\lim_{\alpha \downarrow 0} \beta(\alpha) = 0$ et $\lim_{\alpha \downarrow 0} \limsup_n P^n(z^n \leq \gamma_1(\alpha)) = 0$ par 1.8, donc

1.13 $$-\lim_{\alpha \downarrow 0} \limsup_n P'^n(z^n \leq \gamma_2(\alpha)) \leq \lim_{\alpha \downarrow 0} \liminf_n h_{\alpha}(P^n, P'^n) - 1$$
$$\leq -\lim_{\alpha \downarrow 0} \limsup_n P'^n(z^n \leq \gamma_1(\alpha)).$$

Etant donné 1.4, l'équivalence (a-ii) $\Leftrightarrow$ (a-iii) découle de 1.13 (car $\gamma_1(\alpha) \to 0$ et $\gamma_2(\alpha) \to 0$ quand $\alpha \to 0$). De même (b-ii) $\Leftrightarrow$ (b-iii) découle de 1.13, une fois remarqué que (b-ii) équivaut à: $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_n P'^n(z^n \leq \varepsilon) = 1$. ∎

2 - LE PROCESSUS DE HELLINGER

On considère maintenant un espace filtré $(\Omega, \underline{\underline{F}}, (\underline{\underline{F}}_t), P)$ avec $\underline{\underline{F}} = \bigvee \underline{\underline{F}}_t$, muni de deux probabilités P et P'. Pour tout temps d'arrêt R on note P_R et P'_R (resp. P_{R-} et P'_{R-}) les restrictions de P et P' à $\underline{\underline{F}}_R$ (resp. $\underline{\underline{F}}_{R-}$). Notre objectif est de construire un processus croissant prévisible $\hat{H}(\alpha)$, nul en 0, tel que

2.1 $$h_{\alpha}(P_R, P'_R) = h_{\alpha}(P_0, P'_0) - E_Q(\hat{H}(\alpha)_R)$$

pour tout temps d'arrêt R, avec Q vérifiant 1.1.

Soit donc Q vérifiant 1.1; appelons z et z' les Q-martingales (uniformément intégrables et positives) de variables terminales

$$z_{\infty} = \frac{dP}{dQ}, \quad z'_{\infty} = \frac{dP'}{dQ},$$

de sorte que pour tout temps d'arrêt R on a

2.2 $$z_R = \frac{dP_R}{dQ_R}, \quad z'_R = \frac{dP'_R}{dQ_R}.$$

Si R est prévisible, on a aussi:

2.3 $$z_{R-} = \frac{dP_{R-}}{dQ_{R-}}, \quad z'_{R-} = \frac{dP'_{R-}}{dQ_{R-}}.$$

Posons

2.4 $$\begin{cases} T_k = \inf(t: z_t \leq 1/k), & T'_k = \inf(t: z'_t \leq 1/k) \\ \Gamma = \bigcup_k [\![0,T_k]\!], & \Gamma' = \bigcup_k [\![0,T'_k]\!] \\ S_k = T_k \wedge T'_k, \quad S = \lim_k \uparrow S_k, & T = \lim_k \uparrow T_k. \end{cases}$$

Les propriétés suivantes sont bien connues (voir par exemple [4]):

2.5 $$\Gamma = \{z_- > 0\}, \qquad [\![0,T[\![= \{z > 0\}$$

2.6 $\left\{\begin{array}{l}\text{Si } X \text{ est càdlàg adapté, on a: } X \text{ est une P-martingale locale si} \\ \text{et seulement si } Xz \text{ est une Q-martingale locale.}\end{array}\right.$

2.7 LEMME : $Y(\alpha) = z^\alpha z'^{1-\alpha}$ <u>est une</u> Q-<u>surmartingale de classe (D) si</u> $\alpha \in]0,1[$.

<u>Preuve</u>. On a $0 \leq Y(\alpha) \leq \alpha z + (1-\alpha)z'$, donc $Y(\alpha)$ est de classe (D). Soit $s \leq t$ et V une variable bornée positive $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable. Soit $Z = \frac{z'}{z} 1_{\{z>0\}}$. On a

$$E_P(Z_t V) = E_Q(z'_t V 1_{\{z_t > 0\}}) \leq E_Q(z'_t V 1_{\{z_s > 0\}}) \qquad \text{(par 2.5)}$$
$$= E_Q(z'_s V 1_{\{z_s > 0\}}) = E_P(Z_s V).$$

Donc Z est une P-surmartingale. De plus

$$E_Q(VY(\alpha)_t) = E_Q(V z_t^\alpha z_t'^{1-\alpha}) = E_P(V Z_t^{1-\alpha}) \leq E_P(V Z_s^{1-\alpha}) \qquad \text{(Jenssen)}$$
$$= E_Q(VY(\alpha)_s),$$

d'où le résultat. ∎

2.8 THEOREME : <u>Il existe un processus croissant prévisible</u> $H(\alpha)$ <u>à valeurs dans</u> $[0,\infty]$, <u>unique à un ensemble</u> Q-<u>évanescent près, tel que</u> $H(\alpha)_0 = 0$ <u>et</u>

2.9 $$H(\alpha) = 1_{\Gamma \cap \Gamma'} \cdot H(\alpha)$$

2.10 $Y(\alpha) + Y(\alpha)_- \cdot H(\alpha)$ est une Q-martingale uniformément intégrable.

Comme d'habitude, le point "." signifie: intégrale (stochastique, ou de Stieltjes). $H(\alpha)$ est appelé le Q-α-<u>processus de Hellinger</u> relatif au couple (P,P').

<u>Preuve</u>. La décomposition de Doob-Meyer de $Y(\alpha)$ est notée $Y(\alpha) = M - A$, où M est une Q-martingale uniformément intégrable, et A est un processus croissant prévisible nul en 0, Q-intégrable. Par 2.5 on a (car $\Gamma\cap\Gamma'$ est prévisible):

$$\begin{aligned} 1_{(\Gamma\cap\Gamma')^c}\bullet M &= 1_{(\Gamma\cap\Gamma')^c}\bullet Y(\alpha) + 1_{(\Gamma\cap\Gamma')^c}\bullet A \\ &= 1_{(\Gamma\cap\Gamma')^c}\bullet A. \end{aligned}$$

L'unicité de la décomposition de Doob-Meyer entraine

$$1_{(\Gamma\cap\Gamma')^c}\bullet A = 0 \qquad \text{Q-p.s.}$$

Soit alors $H(\alpha) = [\frac{1}{Y(\alpha)_-} 1_{\Gamma\cap\Gamma'}]\bullet A$: il est facile de voir que $H(\alpha)$ vérifie toutes les conditions du théorème (on a $A = Y(\alpha)_-\bullet H(\alpha)$). Enfin si $H(\alpha)$ est un processus prévisible croissant nul en 0, la condition 2.10 caractérise $H(\alpha)^{S_k}$ (processus arrêté en S_k) pour tout k, donc aussi $1_{\Gamma\cap\Gamma'}\bullet H(\alpha)$, tandis que 2.9 entraine que $1_{(\Gamma\cap\Gamma')^c}\bullet H(\alpha) = 0$: on en déduit l'unicité de $H(\alpha)$. ∎

2.2 et 2.10 entrainent que pour tout temps d'arrêt R,

2.11 $$h_\alpha(P_R,P'_R) = h_\alpha(P_0,P'_0) - E_Q(Y(\alpha)_-\bullet H(\alpha)_R)$$

et on pourrait remplacer R par $R-$ ci-dessus si R était prévisible. On voit en particulier (cela découle aussi de 2.7) que

2.12 $$R \leq S \implies h_\alpha(P_R,P'_R) \geq h_\alpha(P_S,P'_S).$$

2.13 THEOREME : $H(\alpha)$ <u>ne dépend pas de</u> Q, <u>au sens suivant: si</u> $\tilde{Q}$ <u>vérifie</u> $Q \ll \tilde{Q}$ <u>et si</u> $\tilde{H}(\alpha)$ <u>est le</u> $\tilde{Q}$-α-<u>processus de Hellinger, on a</u>

$$\tilde{H}(\alpha) = H(\alpha) \qquad \text{Q-p.s.}$$

<u>Preuve</u>. Soit $\tilde{z}, \tilde{z}', \tilde{Y}(\alpha), \tilde{H}(\alpha)$ les processus définis relativement à $\tilde{Q}$, et soit Z la Q-martingale positive telle que $Z_t = dQ_t/d\tilde{Q}_t$. On a alors $\tilde{z} = zZ$, $\tilde{z}' = z'Z$, $\tilde{Y}(\alpha) = ZY(\alpha)$. Soit $A = Y(\alpha)_-\bullet H(\alpha)$ et $M = Y(\alpha) + A$. D'après la formule de Yoeurp [4] on a $AZ = A\bullet Z + Z_-\bullet A$, car A est prévisible. Donc

$$\tilde{Y}(\alpha) = Z(M-A) = ZM - A\bullet Z - Z_-\bullet A.$$

Comme ZM (par 2.6) et $A\bullet Z$ sont des $\tilde{Q}$-martingales locales, 2.10 appliqué à $\tilde{Y}(\alpha)$ entraine:

2.14 $$\tilde{Y}(\alpha)_-\bullet\tilde{H}(\alpha) = Z_-\bullet A = Y(\alpha)_-\bullet H(\alpha) \qquad \tilde{Q}\text{-p.s.}$$

Comme $Z>0$ Q-p.s., on a $\{Y(\alpha)_->0\} = \Gamma\cap\Gamma'$ à un ensemble Q-évanescent près, donc 2.14 et 2.9 entrainent le résultat. ■

3 - PROCESSUS DE HELLINGER: CALCUL EXPLICITE ET DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

On se place dans la même situation qu'au §2. Le calcul explicite du processus $H(\frac{1}{2})$ est déjà fait dans [7], mais nous le reprenons ici pour être complet. Nous utilisons les notations usuelles ([1] ou [4]): z^c est la partie martingale continue de z, et $[X,Y]$ est le "crochet droit" de X avec Y.

Soit f_k une fonction C^2 sur $\mathbb{R}$, telle que $f_k(x)=x^\alpha$ pour $x\geq 1/k$. On a $f_k(z)=z^\alpha$ sur $[\![0,S_k[\![$, donc d'après la formule d'Ito il vient

$$f_k(z)^{S_k} = f_k(z_0) + \alpha z_-^{\alpha-1}\cdot z^{S_k} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z_-^{\alpha-2}\cdot\langle z^c,z^c\rangle^{S_k} + \sum_{s\leq S_k\wedge .}\left[f_k(z_s) - z_{s-}^\alpha - \alpha z_{s-}^{\alpha-1}\Delta z_s\right].$$

En regardant ce qui se passe en S_k, on en déduit que

3.1 $$(z^\alpha)^{S_k} = z_0^\alpha + \alpha z_-^{\alpha-1}\cdot z^{S_k} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z_-^{\alpha-2}\cdot\langle z^c,z^c\rangle^{S_k} + \sum_{s\leq S_k\wedge .} z_{s-}^\alpha\left[\left(1+\frac{\Delta z_s}{z_{s-}}\right)^\alpha - 1 - \alpha\frac{\Delta z_s}{z_{s-}}\right]$$

et de même

3.2 $$(z'^{1-\alpha})^{S_k} = z_0'^{1-\alpha} + (1-\alpha)z_-'^{-\alpha}\cdot z'^{S_k} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} z_-'^{-1-\alpha}\cdot\langle z'^c,z'^c\rangle^{S_k} + \sum_{s\leq S_k\wedge .} z_{s-}'^{1-\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta z'_s}{z'_{s-}}\right)^{1-\alpha} - 1 - (1-\alpha)\frac{\Delta z'_s}{z'_{s-}}\right].$$

On a aussi

$$Y(\alpha) = z_-^\alpha\cdot(z'^{1-\alpha}) + z_-'^{1-\alpha}\cdot(z^\alpha) + [(z^\alpha),(z'^{1-\alpha})],$$

donc 3.1 et 3.2 entrainent

3.3 $$\begin{aligned}Y(\alpha)^{S_k} = {} & Y(\alpha)_0 + (1-\alpha)\frac{Y(\alpha)_-}{z'_-}\cdot z'^{S_k} + \frac{Y(\alpha)_-}{z_-}\cdot z^{S_k} \\ & - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} Y(\alpha)_-\cdot\left[\frac{1}{z_-'^2}\cdot\langle z'^c,z'^c\rangle^{S_k} + \frac{1}{z_-^2}\cdot\langle z^c,z^c\rangle^{S_k} - \frac{2}{z_-z'_-}\cdot\langle z^c,z'^c\rangle^{S_k}\right] \\ & + \sum_{s\leq S_k\wedge .} Y(\alpha)_{s-}\left\{\left(1+\frac{\Delta z'_s}{z'_{s-}}\right)^{1-\alpha} - 1 - (1-\alpha)\frac{\Delta z'_s}{z'_{s-}} + \left(1+\frac{\Delta z_s}{z_{s-}}\right)^\alpha - 1 \right. \\ & \left. - \alpha\frac{\Delta z_s}{z_{s-}} + \left[\left(1+\frac{\Delta z_s}{z_{s-}}\right)^\alpha - 1\right]\left[\left(1+\frac{\Delta z'_s}{z'_{s-}}\right)^{1-\alpha} - 1\right]\right\}.\end{aligned}$$

Soit aussi la fonction $\varphi_\alpha : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

3.4 $$\varphi_\alpha(u,v) = \alpha u + (1-\alpha)v - u^\alpha v^{1-\alpha}$$

et le processus croissant à valeurs dans $[0,\infty]$:

3.5 $$H'(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left[\frac{1}{z_-^2}\bullet\langle z^c,z^c\rangle - \frac{2}{z_-z'_-}\bullet\langle z^c,z'^c\rangle + \frac{1}{z'^2_-}\bullet\langle z'^c,z'^c\rangle\right] + \sum_{s\leq .}\varphi_\alpha\left(1+\frac{\Delta z_s}{z_{s-}},1+\frac{\Delta z'_s}{z'_{s-}}\right).$$

3.6 PROPOSITION : <u>Pour chaque</u> $k\in\mathbb{N}^*$ <u>on a</u> $E_Q(H'(\alpha)_{S_k})<\infty$, <u>et</u> $H(\alpha)$ <u>est l'unique processus vérifiant 2.9 et, pour chaque</u> $k\in\mathbb{N}^*$,

3.7 $H(\alpha)^{S_k}$ est la Q-projection prévisible duale de $H'(\alpha)^{S_k}$.

<u>Preuve</u>. Le processus $M(k)=Y(\alpha)_0+(1-\alpha)\frac{Y(\alpha)_-}{z'_-}\bullet z'^{S_k}+\alpha\frac{Y(\alpha)_-}{z_-}\bullet z^{S_k}$ est une martingale locale pour Q , et d'après 3.3 et 3.5 on a

$$Y(\alpha)^{S_k} = M(k) - Y(\alpha)_-\bullet H'(\alpha)^{S_k} .$$

Par suite 2.8 entraine que $Y(\alpha)_-\bullet H(\alpha)^{S_k}$ est la Q-projection prévisible duale de $Y(\alpha)_-\bullet H'(\alpha)^{S_k}$. Comme $Y(\alpha)_-\geq\frac{1}{k}$ sur $[\![0,S_k]\!]$, on a $E_Q(H'(\alpha)_{S_k})\leq k\,E_Q[Y(\alpha)_-\bullet H'(\alpha)_{S_k}]<\infty$. On en déduit 3.7. ∎

3.8 COROLLAIRE : <u>Supposons que</u> $Q=\frac{1}{2}(P+Q)$, <u>et soit</u> ν <u>la mesure de Lévy pour</u> Q <u>du processus</u> z (ou : Q-projection prévisible duale de la mesure associée aux sauts de z). <u>Alors</u>

3.9 $$H(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\frac{1}{z_-}+\frac{1}{z'_-}\right)^2\bullet\langle z^c,z^c\rangle + \varphi_\alpha\left(1+\frac{x}{z_-},1-\frac{x}{z'_-}\right)*\nu\ ,\ \text{avec}\ z+z'=2$$

(ici, $W*\nu$ désigne comme d'habitude le processus intégral: $W*\nu_t = \int W(\omega,s,x)\,1_{\{s\leq t\}}\nu(\omega;ds\times dx)$).

<u>Preuve</u>. Si μ désigne la mesure associée aux sauts de z , on a d'après 3.5:

3.10 $$H'(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\frac{1}{z_-}-\frac{1}{z'_-}\right)^2\bullet\langle z^c,z^c\rangle + \varphi_\alpha\left(1+\frac{x}{z_-},1-\frac{x}{z'_-}\right)*\mu\ ,$$

car $z+z'=2$, donc $z^c+z'^c=0$ et $\Delta z+\Delta z'=0$. Comme $1_{(\Gamma\cap\Gamma')^c}\bullet z=0$, on a $1_{(\Gamma\cap\Gamma')^c}\bullet\langle z^c,z^c\rangle=0$, et $1_{(\Gamma\cap\Gamma')^c}*\nu=0$. On déduit alors 3.9 de 3.10 et de 3.6. ∎

Voici un autre exemple de calcul explicite. On suppose que

3.11 $$P'_t \ll P_t \ \text{pour tout}\ t\geq 0\ ;\ \text{soit}\ Z_t = \frac{dP'_t}{dP_t} .$$

Alors Z est une P-martingale (on en prend une version càdlàg), et on considère:

3.12 $$M = \frac{1}{Z_-} \cdot Z \qquad , \qquad \nu^M = \text{P-mesure de Lévy du processus } M .$$

3.13 COROLLAIRE : <u>Sous l'hypothèse 3.11 on a</u>

3.14 $$H(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \langle M^c, M^c \rangle + [\alpha + (1-\alpha)(1+x) - (1+x)^{1-\alpha}] * \nu^M$$

P-<u>p.s. et</u> P'-<u>p.s.</u>

<u>Preuve</u>. On applique 3.6 avec $Q = P$: on n'a pas nécessairement $P' \ll Q$, mais $H(\alpha)_t$ est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable, et $P'_t \ll Q_t = P_t$; donc on peut utiliser $Q = P$ pour calculer $H(\alpha)$. On a alors $z' = Z$ et $z = 1$, donc 3.5 entraine

$$H'(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c, Z^c \rangle + \sum_{s \leq .} \varphi_\alpha(1, 1 + \frac{\Delta Z_s}{Z_{s-}}) .$$

Mais $\frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c, Z^c \rangle = \langle M^c, M^c \rangle$ et $\frac{\Delta Z}{Z_-} = \Delta M$ par 3.12, sur l'ensemble $\Gamma \cap \Gamma' = \{Z_- > 0\}$. Si μ^M est la mesure des sauts de M, on en déduit:

3.15 $$H'(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \langle M^c, M^c \rangle + \varphi_\alpha(1, 1+x) * \mu^M \quad \text{sur } \Gamma \cap \Gamma' ,$$

et 3.14 découle immédiatement de 3.15 et 3.6, une fois observé que $1_{\{Z_- = 0\}} \cdot \langle M^c, M^c \rangle = 0$ et $1_{\{Z_- = 0\}} * \nu^M = 0$. ∎

On va maintenant donner une décomposition multiplicative, qui se trouve déjà dans [9] ou [10], et qui pourrait se déduire des résultats généraux de [4]. Dans le but de rester aussi élémentaire que possible, nous en proposons une démonstration. On commence par un lemme.

3.16 LEMME : <u>On a</u> $\Delta H(\alpha) \leq 1$, <u>et</u> $\Delta H(\alpha) < 1$ <u>sur</u> $[\![0, S[\![$, <u>en dehors d'un ensemble</u> Q-<u>évanescent</u>.

<u>Preuve</u>. Soit $M = Y(\alpha) + Y(\alpha)_- \cdot H(\alpha)$ la martingale apparaissant dans 2.10. On a

$$Y(\alpha) = \Delta M + Y(\alpha)_- [1 - \Delta H(\alpha)] \geq 0 .$$

Notons ${}^pX$ la projection prévisible pour Q d'un processus quelconque X. On sait que ${}^p(\Delta M) = 0$, donc ${}^p(Y(\alpha)) = Y(\alpha)_- [1 - \Delta H(\alpha)]$, et ${}^p(Y(\alpha)) \geq 0$ en dehors d'un ensemble Q-évanescent. Comme $Y(\alpha)_- > 0$ sur $\Gamma \cap \Gamma'$ et $\Delta H(\alpha) = 0$ sur $(\Gamma \cap \Gamma')^c$, on a $\Delta H(\alpha) \leq 1$ Q-p.s. Soit enfin $R = \inf(t : \Delta H(\alpha)_t = 1)$, qui est un temps prévisible. On a ${}^p(Y(\alpha))_R = 0$ sur $\{R < \infty\}$, donc $E_Q[Y(\alpha)_R 1_{\{R < \infty\}}] = 0$, donc $R \geq S$ Q-p.s. ∎

On note $H(\alpha)^c$ la "partie continue" $H(\alpha)^c_t = H(\alpha)_t - \sum_{s \leq t} \Delta H(\alpha)_s$ de $H(\alpha)$, et

3.17 $$\mathcal{E}[-H(\alpha)]_t = e^{-H(\alpha)^c_t} \prod_{s \leq t} [1 - \Delta H(\alpha)_s] .$$

D'après 2.8 et 3.16, $\mathcal{E}[-H(\alpha)]$ est un processus prévisible décroissant, à valeurs dans $[0,1]$, égal à 1 pour $t=0$. En restriction à chaque intervalle $[\![0,S_k]\!]$, c'est l'exponentielle de Doléans-Dade de $-H(\alpha)$, et

3.18 $$\mathcal{E}[-H(\alpha)] > 0 \quad \text{sur } [\![0,S[\![, \quad Q\text{-p.s.}$$

3.19 PROPOSITION : Il existe une décomposition

3.20 $$Y(\alpha) = N(\alpha)\,\mathcal{E}[-H(\alpha)]$$

où $N(\alpha)\geq 0$ et $N(\alpha)^R$ est une Q-martingale locale pour tout temps d'arrêt R qui vérifie: $\mathcal{E}[-H(\alpha)]_- > 0$ sur $[\![0,R]\!]$.

Preuve. Soit $Y=Y(\alpha)$, $H=H(\alpha)$ et $W=\mathcal{E}(-H)$. Soit $\tau_k=\inf(t: W_t\leq \frac{1}{k})$ et $\tau=\lim_k\uparrow\tau_k$. Comme W est prévisible décroissant, chaque τ_k est prévisible et on a $\{W_->0\}=\bigcup_k [\![0,\tau_k]\!]$. D'après 2.9, 3.16 et 3.17, on a aussi

3.21 $$(\tau\geq S,\ \tau<\infty) \Longrightarrow \tau=S\ ;\quad (\tau<\infty, W_{\tau-}>0) \Longleftrightarrow (\tau<\infty, \Delta H_\tau=\Delta H_S=1)$$

et

3.22 $$W_t = 1 - W_-\bullet H_t$$

(en effet, si $\sigma=\inf(t: H_t=+\infty)$, on a 3.22 sur $[\![0,\sigma[\![$ d'après 3.17 et l'équation de Doléans-Dade; on a aussi 3.22 en $t=\sigma$ si $\sigma<\infty$, car $W_{\sigma-}=0$ d'après 3.17 encore; enfin $W_s=W_{s-}=0$ si $s>\sigma$, donc on a 3.22 pour $t>\sigma$). Posons

$$N_t = \begin{cases} Y_t/W_t & \text{si } W_t\neq 0 \\ Y_{\tau-}/W_{\tau-} & \text{si } W_{\tau-}\neq 0,\ t\geq\tau \\ 0 & \text{si } W_{\tau-}=0,\ t\geq\tau. \end{cases}$$

On a $N\geq 0$, et 3.20 avec $N(\alpha)=N$. D'après 3.22 et la formule d'Ito, on a

3.21 $$t<\tau \Longrightarrow \frac{1}{W_t} = 1 + \frac{1}{W_-(1-\Delta H)}\bullet H_t$$

Soit M la Q-martingale $M=Y+Y_-\bullet H$; soit f_k une fonction décroissante de classe C^2, avec $f_k(x)=1/x$ pour $x\geq 1/k$. Comme $f_k(W)$ est croissant et prévisible, on a

$$\begin{aligned} Y^{\tau_k} f_k(W)^{\tau_k} &= Y_0 + f_k(W)\bullet Y^{\tau_k} + Y_-\bullet f_k(W)^{\tau_k} \\ &= Y_0 + f_k(W)\bullet M^{\tau_k} - [Y_-f_k(W)]\bullet H^{\tau_k} + Y_-\bullet f_k(W)^{\tau_k}. \end{aligned}$$

On a $W=W_-(1-\Delta H)$ par 3.17, et $f_k(W)=1/W$ sur $[\![0,\tau_k[\![$, donc 3.21 entraine

3.22 $$t<\tau_k \implies N_t = \frac{Y_t}{W_t} = Y_0 + (\frac{1}{W} 1_{[\![0,\tau_k[\![})\cdot M^{\tau_k} .$$

Soit $\tau'_k = \tau_k$ (resp. $=+\infty$) si $\tau_k < \tau$ (resp. $\tau_k = \tau$). Le processus $K^k = \frac{1}{W}(1_{[\![0,\tau_k[\![} + 1_{[\![\tau'_k]\!]})$ est prévisible et localement borné, donc $K^k\cdot M$ est une Q-martingale locale. D'après 3.22 on a

3.23 $$N_t = Y_0 + K^k\cdot M_t$$

si $t<\tau_k$. Si $t=\tau_k=\tau$ on a $K^k_t = 0$ et $\Delta N_t = 0$ par construction, donc 3-23 reste vrai; si $t=\tau_k<\tau$ on a $\Delta H_t<1$ par 3.16 et 3.21, et

$$\Delta N_t = \frac{Y_t}{W_t} - \frac{Y_{t-}}{W_{t-}} = \frac{Y_{t-}+\Delta Y_t}{W_{t-}(1-\Delta H_t)} - \frac{Y_{t-}}{W_{t-}} = \frac{\Delta Y_t + Y_{t-}\Delta H_t}{W_{t-}(1-\Delta H_t)} = \frac{\Delta M_t}{W_t} = K^k_t \Delta M_t$$

de sorte qu'on a encore 3.23. Finalement, on a 3.23 pour $t\le\tau_k$, donc N^{τ_k} est une Q-martingale locale.

Enfin, soit R un temps d'arrêt vérifiant $[\![0,R]\!] \subset \{W_- > 0\}$. Si $\tau''_k = \tau_k$ (resp. $=+\infty$) sur $\{\tau_k < R\}$ (resp. $\{\tau_k = R\}$) on a $(N^R)^{\tau''_k} = (N^{\tau_k})^R$ qui est une martingale locale, et $\tau''_k \uparrow \infty$: par suite N^R est aussi une martingale locale.∎

La formule 2.11 indique qu'on peut calculer $h_\alpha(P,P')$ par "morceaux". Nous faisons ci-dessous une évaluation de deux de ces morceaux.

3.24 **LEMME :** <u>Il existe une constante</u> $C>0$ <u>telle que pour tous</u> $\eta\in]0,\frac{1}{2}]$, $\alpha\in]0,1[$, <u>et tout temps d'arrêt prévisible</u> R <u>tel que</u>

3.25 $$H(\alpha)_{R-} \le \eta$$

<u>on ait, si</u> $Q=\frac{1}{2}(P+P')$:

3.26 $$0 \le h_\alpha(P_0,P'_0) - h_\alpha(P_{R-},P'_{R-}) \le 2(e^{C\eta}-1)$$

<u>Preuve</u>. La première inégalité 3.26 a déjà été mentionnée (voir après 2.11). Il est facile de voir qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout processus croissant D avec $D_0=0$, $\Delta D\le 1$ on ait

3.27 $$D_t \le \frac{1}{2} \implies \mathcal{E}(-D)_t \ge e^{-C D_t}$$

où $\mathcal{E}(-D)$ est donné par 3.17: il suffit de choisir C de sorte que $x - \mathrm{Log}(1-x) \le Cx$ pour $0\le x\le 1/2$.

On a $[\![0,R]\!] \subset \{\mathcal{E}[-H(\alpha)]_- > 0\}$ d'après 3.25; d'après 3.19, le processus $N' = 1_{[\![0,R[\![}\cdot N(\alpha)^R$ est une Q-martingale locale, qui coïncide avec $N(\alpha)$ sur $[\![0,R[\![$, et qui vérifie $N'_t = N'_{R-}$ si $t\ge R$. Comme $Y(\alpha) = N(\alpha)\,\mathcal{E}[-H(\alpha)]$

et comme $Y(\alpha) \leq 2$, il découle alors de 3.25 et 3.27 que $N' \leq 2\,e^{C\eta}$, et en particulier N' est une martingale. Il vient alors

$$h_\alpha(P_{R-},P'_{R-}) = E_Q(Y(\alpha)_{R-}) = E_Q(N'_{R-}\,\mathcal{E}(-H(\alpha))_{R-})$$
$$= E_Q(N'_{R-}) + E_Q(N'_{R-}[\mathcal{E}(-H(\alpha))_{R-} - 1]) .$$

Mais $E_Q(N'_{R-}) = E_Q(N'_0) = E_Q(Y(\alpha)_0) = h_\alpha(P_0,P'_0)$. D'après 3.25 et 3.27 on a aussi $\mathcal{E}(-H(\alpha))_{R-} - 1 \geq \exp(-C\eta) - 1$, tandis que $N'_{R-} \leq 2\exp(C\eta)$. Il vient alors

$$h_\alpha(P_{R-},P'_{R-}) \geq h_\alpha(P_0,P'_0) + 2\,e^{C\eta}\,(e^{-C\eta} - 1)$$

et on en déduit la seconde inégalité 3.26. ∎

Soit β et γ_1 les fonctions introduites en 1.12. On a

3.28 LEMME : <u>Soit</u> R <u>un temps d'arrêt prévisible, et</u> $\varepsilon \geq 0$. <u>Si</u> $Q = \frac{1}{2}(P+P')$ <u>on a</u>

$$0 \leq h_\alpha(P_{R-},P'_{R-}) - h_\alpha(P,P') \leq E_Q[Y(\alpha)_0\,1_{\{z_0<\varepsilon\}}] + 2\,\beta(\alpha)$$
$$+ \frac{2}{2-\gamma_2(\alpha)}\,P'(R<\infty, z_0 \geq \varepsilon) .$$

<u>Preuve</u>. L'inégalité de gauche est évidente (cf. 2.11). On a aussi

$$h_\alpha(P_{R-},P'_{R-}) - h_\alpha(P,P') = E_Q[Y(\alpha)_{R-} - Y(\alpha)_\infty]$$

3.29 $$= E_Q[1_{\{z_0<\varepsilon\}}[Y(\alpha)_{R-} - Y(\alpha)_\infty]] + E_Q[1_{\{z_0\geq\varepsilon\}}[Y(\alpha)_{R-} - Y(\alpha)_\infty]] .$$

D'après 2.7 il est évident que

3.30 $$E_Q[1_{\{z_0<\varepsilon\}}[Y(\alpha)_{R-} - Y(\alpha)_\infty]] \leq E_Q[1_{\{z_0<\varepsilon\}}\,Y(\alpha)_{R-}] \leq E_Q[1_{\{z_0<\varepsilon\}}\,Y(\alpha)_0] .$$

D'après 1.12 on a $|z^\alpha(2-z)^{1-\alpha} - (2-z)| \leq \beta(\alpha)$ si $z > \gamma_2(\alpha)$. Par suite $Z = Y(\alpha)_{R-} - Y(\alpha)_\infty - z'_{R-} + z'_\infty$ vérifie $|Z| \leq 2\beta(\alpha)$ si $z_{R-} > \gamma_2(\alpha)$ et $z_\infty > \gamma_2(\alpha)$; on a aussi $Z=0$ si $R=\infty$, et dans tous les cas $|Z| \leq 2$ (vérification immédiate). Il vient alors

$$0 \leq E_Q[1_{\{z_0\geq\varepsilon\}}(Y(\alpha)_{R-} - Y(\alpha)_\infty)$$
$$= E_Q(1_{\{z_0\geq\varepsilon\}}Z) + E_Q(1_{\{z_0\geq\varepsilon\}}E[z'_{R-} - z'_\infty \mid \underline{\underline{F}}_0]) = E_Q(1_{\{z_0\geq\varepsilon\}}Z)$$
$$\leq 2\beta(\alpha) + 2\,Q(z_0\geq\varepsilon, R<\infty, z_\infty \leq \gamma_2(\alpha) < z_{R-}) + 2\,Q(z_0\geq\varepsilon, R<\infty, z_{R-} \leq \gamma_2(\alpha))$$
$$\leq 2\beta(\alpha) + \frac{2}{2-\gamma_2(\alpha)}\Big\{E_Q(z'_\infty\,1_{\{z_0\geq\varepsilon, R<\infty, z_\infty\leq\gamma_2(\alpha)<z_{R-}\}})$$
$$+ E_Q(z'_{R-}\,1_{\{z_0\geq\varepsilon, R<\infty, z_{R-}\leq\gamma_2(\alpha)\}})\Big\}$$

$$= 2\beta(\alpha) + \frac{2}{2-\gamma_2(\alpha)} \{P'(z_0 \geq \varepsilon, R<\infty, z_\infty \leq \gamma_2(\alpha) < z_{R-}) + P'(z_0 \geq \varepsilon, R<\infty, z_{R-} \leq \gamma_2(\alpha))\}$$

$$\leq 2\beta(\alpha) + \frac{2}{2-\gamma_2(\ )} P'(z_0 \geq \varepsilon, R<\infty).$$

En ajoutant ceci à 3.29 et 3.30, on obtient le résultat. ∎

4 - CONTINUITE ABSOLUE ET SINGULARITE.

Voici le résultat principal de cet article. La situation est encore la même qu'au 2: on a deux probabilités P et P' sur l'espace filtré $(\Omega, \underline{\underline{F}}, (\underline{\underline{F}}_t), P)$ avec $\underline{\underline{F}} = \bigvee \underline{\underline{F}}_t$. Soit $Q = \frac{1}{2}(P+P')$ et $H(\alpha)$ le Q-α-processus de Hellinger du couple (P,P').

4.1 THEOREME : <u>Pour que</u> $P' \ll P$ <u>il faut et il suffit que</u>

(i) $P'_0 \ll P_0$,

(ii) $P'[H(\frac{1}{2})_\infty < \infty] = 1$,

(iii) $P'(1_{\{x=-z_-\}} * \nu_\infty > 0) = 0$.

Dans (iii), ν est la Q-projection prévisible duale de la mesure des sauts de z (ou, "Q-mesure de Lévy" de z) et on a par définition:

$$1_{\{x=-z_-\}} * \nu_\infty = \int_0^\infty \nu(.;ds \times \{-z_{s-}(.)\}).$$

Les deux conditions (ii) et (iii) s'expriment en termes "prévisibles". Noter que d'après 2.13, $H(\frac{1}{2})$ est unique à un ensemble $(P+P')$-évanescent près, donc pour calculer $H(\frac{1}{2})$ on peut utiliser n'importe quelle probabilité Q qui vérifie 1.1. On verra ci-dessous que (iii) équivaut à

(iii') $\qquad P'(S<\infty,\ z_{S-} > z_S = 0) = 0$

(attention, l'équivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (iii') nécessite que $Q = \frac{1}{2}(P+P')$). Et il est facile de vérifier que (iii') ne dépend pas non plus de la probabilité Q vérifiant 1.1.

<u>Preuve</u>. a) <u>Condition nécessaire</u>. Supposons que $P' \ll P$. (i) est évident. Soit

$$\begin{cases} A = \{z_\infty > 0\} = \bigcup_k \{T_k = \infty\} \\ A' = \{z'_\infty > 0\} = \bigcup_k \{T'_k = \infty\} . \end{cases}$$

On a $P(A) = P'(A') = 1$, et comme $P' \ll P$ on a aussi $P'(A) = 1$, donc $P'(A \cap A') = 1$. En particulier $P'(S=\infty) = 1$, donc on a (iii'). On a aussi $E_Q[Y(1/2)_- \cdot H(1/2)_\infty] < \infty$ par 2.13, donc $H(1/2)_\infty < \infty$ Q-p.s. sur $A \cap A' = \bigcup_k \{S_k = \infty\}$, d'où (ii). Il reste à montrer que (iii) $\Leftrightarrow$ (iii'). On a:

4.2 $$E_{P'}(1_{\{x=-z_-\}}*\nu_\infty) = E_Q(z'_\infty 1_{\{x=-z_-\}}*\nu_\infty)$$

$$= E_Q[(z'_- 1_{\{x=-z_-\}})*\nu_\infty] \quad \text{(car } 1_{\{x=-z_-\}}*\nu \text{ est prévisible)}$$

$$= E_Q(\textstyle\sum_{s>0} z'_{s-} 1_{\{\Delta z_s = -z_{s-} \neq 0\}}) \quad \text{(par définition de } \nu \text{)}$$

$$= E_Q(z'_{S-} 1_{\{S<\infty, z_{S-}>0=z_S\}}),$$

et cette dernière expression est nulle si et seulement si $z'_{S-}=0$ Q-p.s. sur l'ensemble $\{S<\infty, z_S=0<z_{S-}\}$. Comme $z+z'=2$ et comme $z'_S=0$ sur l'ensemble $\{z'_{S-}=0\}$, on a $z'_{S-}>0$ sur $\{S<\infty, z_S=0<z_{S-}\}$. Par suite (iii), qui revient à la nullité de 4.2, équivaut à: $Q(S<\infty, z_S=0<z_{S-})=0$. Comme $P(S<\infty, z_S=0<z_{S-}) \le P(z_\infty=0)=0$, cela équivaut aussi à (iii').

b) <u>Condition suffisante</u>. On va d'abord étudier quelques propriétés de la fonction φ_α définie en 3.4. Soit

$$g_\alpha(w) := \varphi_\alpha(w,1) = \alpha w + 1 - \alpha - w^\alpha \qquad (w \ge 0).$$

On vérifie aisément que

4.3 $g_\alpha(1)=0$, $g_\alpha(0)=1-\alpha$, g_α décroit entre 0 et 1, et croit entre 1 et $+\infty$.

D'après la formule de Taylor, on a

$$g_\alpha(w) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}(w-1)^2 - \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{6}(w-1)^3\, \tilde{w}^{\alpha-3}, \quad \tilde{w} \text{ entre } 1 \text{ et } w.$$

Soit d'abord $\varepsilon \in]0,1[$. Si $w \in [\varepsilon,1]$ il existe $w',w'' \in [w,1]$ avec

4.4 $$\frac{g_\alpha(w)}{g_{1/2}(w)} = 4\alpha(1-\alpha)\frac{1-(2-\alpha)(w-1)w'^{\alpha-3}/3}{1-(w-1)w''^{-5/2}/2} \le 4\alpha(1-\alpha)\left[1+\frac{2-\alpha}{3}\varepsilon^{-3}\right].$$

Soit ensuite $w \in [1,2]$. Il existe $w',w'' \in [1,w]$ avec

4.5 $$\frac{g_\alpha(w)}{g_{1/2}(w)} = 4\alpha(1-\alpha)\frac{1-(2-\alpha)(w-1)w'^{\alpha-3}/3}{1-(w-1)w''^{-5/2}/2} \le \frac{4\alpha(1-\alpha)}{1-\sup_{1<u<2}(u-1)/2} \le 8\alpha(1-\alpha).$$

Enfin si $w \ge 2$ on a (car $g_{1/2}(w) = (\sqrt{w}-1)^2/2$):

4.6 $$\frac{g_\alpha(w)}{g_{1/2}(w)} = \frac{\alpha(w-1)+1-w^\alpha}{(\sqrt{w}-1)^2/2} \le 2\,\frac{\alpha(w-1)}{(\sqrt{w}-1)^2} = 2\alpha\frac{\sqrt{w}+1}{\sqrt{w}-1} \le 2\,\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

Par suite si

$$\psi_\varepsilon(\alpha) = 2\alpha \max\left\{2(1-\alpha)\left(1+\frac{2-\alpha}{3\varepsilon^3}\right),\ 4(1-\alpha),\ \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right\}$$

on a:

4.7 $$\lim_{\alpha\downarrow 0} \psi_\varepsilon(\alpha) = 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon \in]0,1[,$$

et comme $\varphi_\alpha(u,v) = v\, g_\alpha(u/v)$ pour $v>0$, d'après 4.4, 4.5 et 4.6 il vient:

4.8 $$\frac{u}{v} \geq \varepsilon\ ,\ v \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \varphi_\alpha(u,v) \leq \varphi_{1/2}(u,v)\,\psi_\varepsilon(\alpha)\ .$$

Enfin, si $C' = g_{1/2}(\frac{1}{2})^{-1}$, 4.3 implique que

4.9 $$\frac{u}{v} \leq \frac{1}{2}\ ,\ v \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \varphi_\alpha(u,v) \;\leq\; v \;\leq\; C'\varphi_{1/2}(u,v)\ .$$

Passons à la condition suffisante proprement dite. On suppose qu'on a (i), (ii), (iii). Si $N \geq 2$ on pose

4.10 $$K(N) \;=\; C'\varphi_{1/2}(1+\frac{x}{z_-}, 1-\frac{x}{z_-})1_{\{N(1+x/z_-)<1-x/z_-\}} * \nu\ .$$

Par définition de ψ_ε , on a $\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \leq \frac{1}{8}\psi_\varepsilon(\alpha)$. On a 3.9, donc d'après 4.8 et 4.9 il vient, puisque $N \geq 2$:

4.11 $$H(\alpha) \;\leq\; \psi_{1/N}(\alpha)\; H(\tfrac{1}{2}) \;+\; K(N)$$

(remarquer que $\varphi_\alpha(u,0) = \alpha u \leq \frac{\alpha}{2}\varphi_{1/2}(u,0) \leq \psi_\varepsilon(\alpha)\varphi_{1/2}(u,0)$, car $\psi_\varepsilon(\alpha) \geq 2\alpha$).

Soit $B = \{H(\frac{1}{2})_\infty < \infty,\ 1_{\{x=-z_-\}} * \nu_\infty = 0\}$. D'après le théorème de Lebesgue, on a

4.12 $$\lim_{N\uparrow\infty} K(N)_\infty \;=\; C'\varphi_{1/2}(0, 1-\frac{x}{z_-})1_{\{x=-z_-\}} * \nu_\infty \;=\; 0 \quad \text{sur } B\ .$$

Soit $\eta \in]0,\frac{1}{2}]$. Comme $P'(B)=1$ par hypothèse, il existe $N \geq 2$ tel que

$$P'(H(1/2)_\infty \geq N\ ,\ \text{ ou }\ K(N)_\infty \geq \eta/2) \;\leq\; \eta\ .$$

Soit $R = \inf(t\colon H(1/2)_t \geq N$ ou $K(N)_t \geq \eta/2)$, de sorte que

4.13 $$P'(R<\infty) \;\leq\; \eta\ ,$$

et 4.11 implique

4.14 $$\psi_{1/N}(\alpha) \;\leq\; \frac{\eta}{2N} \quad\Longrightarrow\quad H(\alpha)_{R-} \;\leq\; \eta\ .$$

D'après le lemme 3.24, on a donc 3.26 dès que $\psi_{1/N}(\alpha) \leq \eta/2N$ (noter que R est un temps prévisible). Appliquons aussi le lemme 3.28 avec $\varepsilon = 0$; étant donné 4.13, cela donne

$$|h_\alpha(P_{R-}, P'_{R-}) - h_\alpha(P,P')| \;\leq\; 2\beta(\alpha) + \frac{2\eta}{2-\gamma_2(\alpha)}$$

En combinant ceci avec 3.26, on obtient:

4.15 $$\psi_{1/N}(\alpha) \leq \frac{\eta}{2N} \Longrightarrow |h_\alpha(P,P') - h_\alpha(P_0,P'_0)| \leq 2\beta(\alpha) + \frac{2}{2-\gamma_2(\alpha)} + 2(e^{C\eta}-1)\ .$$

Comme $\beta(\alpha)\downarrow 0$ et $\gamma_2(\alpha)\downarrow 0$ quand $\alpha\downarrow 0$, et comme on a 4.7, il vient

$$\limsup_{\alpha\downarrow 0} |h_\alpha(P,P') - h_\alpha(P_0,P'_0)| \;\leq\; \eta + 2(e^{C\eta}-1)$$

pour tout $\eta > 0$. Donc $h_\alpha(P,P') - h_\alpha(P_0,P'_0) \longrightarrow 0$ quand $\alpha \downarrow 0$. Mais $h_\alpha(P_0,P'_0) \longrightarrow 1$ quand $\alpha \downarrow 0$ d'après (i) et 1.5-a, donc $h_\alpha(P,P') \longrightarrow 1$ et une nouvelle application de 1.5-a implique que $P' \ll P$. ∎

Pour la singularité, les résultats sont moins satisfaisants. On suppose toujours que $Q = \frac{1}{2}(P + P')$.

4.16 THEOREME : a) <u>Si</u> $P \perp P'$ <u>on a</u>

$$P'(z_0 = 0\ , \text{ ou } H(\tfrac{1}{2})_\infty = \infty\ , \text{ ou } 1_{\{x=-z_-\}} * \nu_\infty > 0) = 1 .$$

b) <u>Chacune des conditions suivantes implique que</u> $P' \perp P$:

(i) $P_0 \perp P'_0$,

(ii) $P'(H(\frac{1}{2})_\infty = \infty) = 1$.

<u>Preuve</u>. a) On utilise les notations de la preuve précédente. On a 4.12, donc pour tout $\eta \in]0,\frac{1}{2}]$ il existe $N \geq 2$ tel que

$$P'(B \cap \{H(\tfrac{1}{2})_\infty \geq N\ , \text{ ou } K(N)_\infty \geq \tfrac{\eta}{2}\}) \leq \eta ,$$

donc

4.17 $$P'(B \cap \{R < \infty\}) \leq \eta .$$

On a encore 3.26 dès que $\psi_{1/N}(\alpha) \leq \eta/2N$, et d'après la preuve de 1.5 on a $h_\alpha(P_0,P'_0) \longrightarrow P'(z_0 > 0)$ et $h_\alpha(P_{R-},P'_{R-}) \longrightarrow P'(z_{R-} > 0)$ quand $\alpha \downarrow 0$. Comme $\{z_{R-} > 0\} \subset \{z_0 > 0\}$, 3.26 implique:

$$P'(z_{R-} = 0 < z_0) = \lim_{\alpha \downarrow 0} [h_\alpha(P_0,P'_0) - h_\alpha(P_{R-},P'_{R-})] \leq 2(e^{C\eta} - 1) .$$

Joint à 4.17, cela donne

$$\begin{aligned} P'(B \cap \{z_0 > 0\}) &\leq P'(B \cap \{z_0 > 0\} \cap \{R = \infty\}) + \eta \\ &\leq P'(B \cap \{z_{R-} > 0\} \cap \{R = \infty\}) + 2(e^{C\eta} - 1) + \eta \\ &\leq P'(z_\infty > 0) + 2(e^{C\eta} - 1) + \eta . \end{aligned}$$

Si $P' \perp P$ on a $P'(z_\infty > 0) = 0$, et $\eta \in]0,\frac{1}{2}]$ est arbitraire. Donc $P'(B \cap \{z_0 > 0\}) = 0$, ce qui donne le résultat.

b) (i) $\Longrightarrow P' \perp P$ est évident. Avec les notations A et A' du début de la preuve de 4.1, on a $A \cap A' = \{z_\infty > 0, z'_\infty > 0\}$ et (ii) entraine que $P'(A \cap A') = 0$. Comme $P'(z'_\infty > 0) = 1$, on a donc $P'(z_\infty > 0) = 0$, d'où $P' \perp P$. ∎

4.18 REMARQUE : La réciproque de 4.18-a est fausse, comme le montre l'exemple suivant. Soit σ une variable exponentielle de paramètre 1 pour une loi Q, et γ une variable indépendante de σ pour Q, prenant les valeurs $+1$ et -1 avec la probabilité $1/2$. Posons

$$z_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t<\sigma, \text{ ou } t\geq\sigma \text{ et } \sigma\geq 1 \\ 2 & \text{si } t\geq\sigma,\ \sigma<1,\ \gamma=1 \\ 0 & \text{si } t\geq\sigma,\ \sigma\ 1,\ \gamma=-1 \end{cases} \qquad z' = 2-z$$

et $\underline{\underline{F}}_t = \sigma(z_s : s\leq t)$. Alors z et z' sont des martingales positives bornées et on a

$$\nu(dt\times dx) = \frac{1}{2} 1_{[0,\sigma\wedge 1]}(t)\ dt\ (\varepsilon_1(dx) + \varepsilon_{-1}(dx)) .$$

$P = z_\infty \cdot Q$ et $P' = z'_\infty \cdot Q$ vérifient $P + P' = 2Q$ et

$$P'(z_\infty > 0) = Q(\sigma\geq 1) > 0 \implies P \text{ et } P' \text{ ne sont pas étrangères.}$$

Cependant, $1_{\{x=-z_-\}} * \nu_\infty = \frac{1}{2}(\sigma\wedge 1) > 0$ Q-p.s. ∎

Les théorèmes 4.1 et 4.16 redonnent les résultats de [6], comme on va le voir ci-dessous. On suppose qu'on a 3.11, on définit M et ν^M par 3.12, et on pose

4.19 $$B = \langle M^c, M^c\rangle + (1-\sqrt{1+x})^2 * \nu^M .$$

4.20 THEOREME [6] : Sous 3.11, on a les équivalences:

(i) $P' \ll P \iff P'(B_\infty < \infty) = 1$

(ii) $P' \perp P \iff P'(B_\infty = \infty) = 1$.

Preuve. Soit $Q = \frac{1}{2}(P+P')$. Comme $P'_t \ll P_t$ on peut appliquer le théorème 4.1 en arrêtant tous les processus en t , et en particulier

$$P'(1_{\{x=-z_-\}} * \nu_t = 0) = 1 \qquad \text{pour tout } t\geq 0 .$$

On en déduit bien-sûr que 4.1-(iii) est satisfait. On a aussi 4.1-(i) par hypothèse, donc $P'(z_0 > 0) = 1$. Donc $P' \ll P \iff$ 4.1-(ii), et $P' \perp P \iff$ $P'(H(1/2)_\infty = \infty) = 1$ (d'après 4.16-(a), et 4.16-(b) avec (ii)). D'autre part on a 3.14 avec $\alpha = 1/2$:

$$H(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{8}\langle M^c, M^c\rangle + \frac{1}{2}(1-\sqrt{1+x})^2 * \nu^M .$$

Par suite $2H(1/2) \leq B \leq 8H(1/2)$, et le résultat est immédiat. ∎

5 - CONTIGUITE ET ENTIERE SEPARABILITE.

Pour chaque $n\in\mathbb{N}$ on considère un couple (P^n, P'^n) de probabilités sur l'espace filtré $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, (\underline{\underline{F}}^n_t))$, avec $\underline{\underline{F}}^n = \bigvee \underline{\underline{F}}^n_t$. Soit $Q^n = \frac{1}{2}(P^n + P'^n)$. Soit z^n , z'^n les Q^n-martingales, densités de P^n et P'^n par rapport à

Q^n (cf. §2) et ν^n est le Q^n-mesure de Lévy de z^n. Soit enfin $H^n(\alpha)$ le Q^n-α-processus de Hellinger du couple (P^n,P'^n).

5.1 THEOREME : Pour que $(P'^n) \lhd (P^n)$ il faut et il suffit que

(i) $(P_0'^n) \lhd (P_0^n)$

(ii) la suite $(H^n(\frac{1}{2})_\infty, P'^n)$ soit tendue, i.e.:

$$\lim_{N\uparrow\infty} \limsup_n P'^n(H^n(\tfrac{1}{2})_\infty \geq N) = 0$$

(iii) pour tout $\eta > 0$ on a

$$\lim_{N\uparrow\infty} \limsup_n P'^n\{(1-\frac{x}{z'^n_-})1_{\{N(1+x/z^n_-)<1-x/z'^n_-\}}*\nu^n_\infty > \eta\} = 0.$$

Si $(\Omega^n,\underline{\underline{F}}^n,(\underline{\underline{F}}^n_t),P^n,P'^n) = (\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t),P,P')$ pour tout n, il est clair que ces trois conditions sont, respectivement, les trois conditions de 4.1.

Preuve. On utilise les notations 2.4, avec un exposant "n": $S^n_k, T^n_k, Y^n(\alpha),..$

a) Condition nécessaire. On va d'abord montrer que si $(P'^n) \lhd (P^n)$, on a

5.2 $$\lim_{k\uparrow\infty} \limsup_n P'^n(T^n_k < \infty) = 0.$$

Si ce n'était pas le cas, il existerait $\theta > 0$ et une suite $n_k \uparrow \infty$ tels que $P'^{n_k}(T^{n_k}_k < \infty) \geq \theta$ pour tout k. Comme $P^n(T^n_k<\infty) \leq P^n(z^n_{T^n_k} \leq 1/k) \leq 1/k$ par 1.8, on a $P^{n_k}(T^{n_k}_k<\infty) \longrightarrow 0$, cela contredirait l'hypothèse $(P'^n)\lhd(P^n)$; par suite on a donc 5.2.

Passons à la démonstration proprement dite. (i) est évident. On a $P'^n(T'^n_k<\infty) \leq 1/k$ (comme ci-dessus); on $Y^n(1/2)_- \geq 1/k$ sur $[\![0,S^n_k]\!]$, donc $H^n(1/2)_{S^n_k} \leq k[Y^n(1/2)_-\cdot H^n(1/2)_{S^n_k}]$. Par suite si $\theta > 0$:

$$P'^n(H^n(\tfrac{1}{2})_\infty > \theta) \leq P'^n(S^n_k<\infty) + P'^n(Y^n(\tfrac{1}{2})_-\cdot H^n(\tfrac{1}{2})_\infty > \tfrac{\theta}{k})$$

$$\leq \frac{1}{k} + P'^n(T^n_k<\infty) + 2\frac{k}{\theta}E_{Q^n}(Y^n(\tfrac{1}{2})_-\cdot H^n(\tfrac{1}{2})_\infty)$$

5.3 $$\leq \frac{1}{k} + P'^n(T^n_k<\infty) + 8\frac{k}{\theta}$$

(utiliser $P'^n \leq 2Q^n$, puis 2.10 et la majoration $Y^n(1/2) \leq 2$). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe k tel que $1/k \leq \varepsilon/3$ et $\limsup_n P'^n(T^n_k<\infty) \leq \varepsilon/6$ (par 5.2), donc il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $P'^n(T^n_k<\infty) \leq \varepsilon/3$. Soit enfin θ tel que $8k/\theta \leq \varepsilon/3$, donc $P'^n(H^n(1/2)_\infty > N) \leq \varepsilon$ pour tous $N \geq \theta$, $n \geq n_0$: cela montre bien (ii).

Pour montrer (iii) on pose

$$\lambda^n(\omega,t,x) = 1 + x/z^n_{t-}(\omega) \quad , \quad \lambda'^n(\omega,t,x) = 1 - x/z'^n_{t-}(\omega)$$

$$U^{nN} = (\lambda'^n 1_{\{N\lambda^n < \lambda'^n\}}) * \nu^n$$

$$V^{nN} = \sum_{s \leq .} 1_{\{Nz^n_s / z^n_{s-} < z'^n_s / z'^n_{s-}\}} .$$

Si $K^n(N)$ est défini par 4.10 (avec z^n, z'^n et ν^n), pour $N \geq 2$ on a d'après 4.9:

5.4 $$U^{nN} \leq K^n(N) \leq C' H^n(\tfrac{1}{2}) .$$

Par suite $(U^{nN})^{S^n_k}$ est Q^n-intégrable et P'^n-intégrable. Pour tout temps d'arrêt $R \leq S^n_k$ on a

$$\begin{aligned} E_{P'^n}(V^{nN}_R) &= E_{Q^n}(z'^n_\infty V^{nN}_R) = E_{Q^n}[(z'^n \cdot V^{nN})_R] \\ &= E_{Q^n}(\textstyle\sum_{s \leq R} z'^n_s 1_{\{Nz^n_s/z^n_{s-} < z'^n_s/z'^n_{s-}\}}) \\ &= E_{Q^n}(\textstyle\sum_{s \leq R} z'^n_{s-} \lambda'^n(s,\Delta z^n_s) 1_{\{N\lambda^n(s,\Delta z^n_s) < \lambda'^n(s,\Delta z^n_s)\}}) \\ &= E_{Q^n}[(z'^n_- \cdot U^{nN})_R] \qquad \text{(par définition de } U^{nN}) \\ &= E_{Q^n}(z'^n_\infty U^{nN}_R) = E_{P'^n}(U^{nN}_R) . \end{aligned}$$

Par suite $(U^{nN})^{S^n_k}$ est la P'^n-projection prévisible duale de $(V^{nN})^{S^n_k}$. D'après l'inégalité de Lenglart (dans la version de Rebolledo [11]) on a pour tout $\eta > 0$:

5.5 $$P'^n(U^{nN}_{S^n_k} > \eta) \leq \frac{1}{\eta} E_{P'^n}(\sup_{s \leq S^n_k} \Delta V^{nN}_s) + P'^n(V^{nN}_{S^n_k} > 0) .$$

Sur $[0,S^n_k[$ on a $z^n/z^n_- \geq 1/2k$ et $z'^n/z'^n_- \leq 2k$, tandis que $\Delta V^{nN} \leq 1$ partout. Donc si $N \geq 4k^2$

$$V^{nN}_{(S^n_k)-} = 0 , \qquad \sup_{s \leq S^n_k} \Delta V^{nN}_s = 1_{\{V^{nN}_{S^n_k} > 0\}} \leq 1_{\{S^n_k < \infty\}} ,$$

et 5.5 entraine pour $N \geq 4k^2$.

$$P'^n(U^{nN}_\infty > \eta) \leq P'^n(U^{nN}_{S^n_k} > \eta) + P'^n(S^n_k < \infty) \leq (\tfrac{1}{\eta} + 2)[P'^n(T^n_k < \infty) + \tfrac{1}{k}]$$

(car $P'^n(T'^n_k < \infty) \leq 1/k$). L'inégalité ci-dessus, plus 5.2, entrainent à l'évidence que $\lim_{N \uparrow \infty} \limsup_n P'^n(U^{nN}_\infty > \eta) = 0$, ce qui n'est autre que (iii).

b) <u>Condition suffisante</u>. On reprend les notations de la preuve de 4.1, avec un exposant "n" partout. On a 4.11 pour chaque n , si $N \geq 2$. Soit $\eta \in]0,1/2]$. Par (ii) et (iii) il existe $N \geq 2$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

5.6 $$n \geq n_0 \longrightarrow P'^n(H^n(\tfrac{1}{2})_\infty \geq N , \text{ ou } C' U^{nN}_\infty \geq \tfrac{\eta}{2}) \leq \eta .$$

On a $K^n(N) \leq C' U^{nN}$ d'après 4.9, donc si $R^n = \inf(t: H^n(\frac{1}{2})_t \geq N$ ou $K^n(N)_t \geq \eta/2)$, 5.6 entraine que

5.7 $$n \geq n_0 \implies P'^n(R^n < \infty) \leq \eta$$

et 4.11 implique

5.8 $$\Psi_{1/N}(\alpha) \leq \frac{\eta}{2N} \implies H^n(\alpha)_{R^n-} \leq \eta.$$

On peut appliquer le lemme 3.24 si $\Psi_{1/N}(\alpha) \leq \eta/2N$, et le lemme 3.28 avec $\varepsilon = 0$, à chaque couple (P^n, P'^n) ; d'après 5.7 et 5.8 on obtient 4.15 dès que $n \geq n_0$. Par suite

$$\liminf_n h_\alpha(P^n, P'^n) \geq \liminf_n h_\alpha(P_0^n, P_0'^n) - 2\beta(\alpha) - \frac{2\eta}{2-\gamma_2(\alpha)} - 2(e^{C\eta} - 1)$$

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \liminf_n h_\alpha(P^n, P'^n) \geq \lim_{\alpha \downarrow 0} \liminf_n h_\alpha(P_0^n, P_0'^n) - \eta - 2(e^{C\eta} - 1)$$

pour tout $\eta \in]0,1/2]$. D'après (i) et 1.11 on a alors, en faisant d'abord tendre η vers 0 :

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \liminf_n h_\alpha(P^n, P'^n) \geq \lim_{\alpha \downarrow 0} \liminf_n h_\alpha(P_0^n, P_0'^n) = 1 .$$

Comme $h_\alpha(P^n, P'^n) \leq 1$, on en déduit que: $\lim_{\alpha \downarrow 0} \liminf_n h_\alpha(P^n, P'^n) = 1$, et 1.11 entraine que $(P'^n) \lhd (P^n)$. ∎

De la même manière, le théorème 4.16 se généralise ainsi:

5.9 THEOREME : a) <u>Si</u> $(P'^n) \Delta (P^n)$ <u>on a pour tous</u> $N > 0$, $\varepsilon > 0$:

5.10 $$\lim_{\eta \downarrow 0} \limsup_n P'^n\Big(z_0^n < \varepsilon, \text{ ou } H^n(\tfrac{1}{2})_\infty \geq N , \text{ ou } (1 - \tfrac{x}{z_-'^n}) 1_{\{N(1+x/z_-^n) < 1 - x/z_-'^n\}} * \nu_\infty^n \geq \eta\Big) = 1 .$$

b) <u>Chacune des conditions suivantes entraine</u> $(P'^n) \Delta (P^n)$:

(i) $(P_0'^n) \Delta (P_0^n)$ ($\iff \limsup_n P'^n(z_0^n < \varepsilon) = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$)

(ii) $\limsup_n P'^n(H^n(\frac{1}{2})_\infty \geq N) = 1$ <u>pour tout</u> N .

<u>Preuve</u>. a) On utilise les notations de 4.1, avec un exposant "n", et aussi celles de 5.1: notamment U^{nN} , $K^n(N)$,... Soit $\eta \in]0,1/2]$, $N \geq 2$, $\varepsilon > 0$. Soit R^n comme dans 5.1; on a

5.11 $$\{R^n < \infty\} \subset \{H^n(\tfrac{1}{2})_\infty \geq N , \text{ ou } C' U_\infty^{nN} \geq \tfrac{\eta}{2}\} ,$$

et on a 5.7. Donc 3.24 entraine

5.12 $\quad \psi_{1/N}(\alpha) \leq \frac{\eta}{2N} \quad \Rightarrow \quad h_\alpha(P_0^n, P_0'^n) - h_\alpha(P^n_{R^n-}, P'^n_{R^n-}) \quad \leq \quad 2(e^{C\eta}-1)$.

D'après 3.28 on a

5.13 $\quad h_\alpha(P^n_{R^n-}, P'^n_{R^n-}) - h_\alpha(P^n, P'^n) \quad \leq \quad E_{Q^n}(Y^n(\alpha)_0 \, 1_{\{z_0^n < \varepsilon\}}) + 2\beta(\alpha)$

$$+ \frac{2}{2-\gamma_2(\alpha)} P'^n(R^n < \infty, z_0^n \geq \varepsilon) .$$

Enfin par définition, $-h_\alpha(P_0^n, P_0'^n) = -E_{Q^n}(Y^n(\alpha)_0)$. En additionant avec 5.12 et 5.13, on arrive à

5.14 $\quad \psi_{1/N}(\alpha) \leq \frac{\eta}{2N} \quad \Rightarrow \quad -h_\alpha(P^n, P'^n) \quad \leq \quad 2(e^{C\eta}-1) + 2\beta(\alpha)$

$$+ \frac{2}{2-\gamma_2(\alpha)} P'^n(R^n < \infty, z_0^n \geq \varepsilon) - E_{Q^n}(Y^n(\alpha)_0 \, 1_{\{z_0^n \geq \varepsilon\}}) .$$

D'après 1.12, on a $|Y^n(\alpha)_0 - z_0'^n| \leq \beta(\alpha)$ si $z_0^n \geq \varepsilon > \gamma_2(\alpha)$. Par suite si $\gamma_2(\alpha) < \varepsilon$ et si $\psi_{1/N}(\alpha) \leq \eta/2N$, il découle de 5.14 que

5.15 $\quad -h_\alpha(P^n, P'^n) \quad \leq \quad 2(e^{C\eta}-1) + 3\beta(\alpha) + \frac{2}{2-\gamma_2(\alpha)} P'^n(R^n < \infty, z_0^n \geq \varepsilon)$

$$- E_{Q^n}(z_0'^n \, 1_{\{z_0^n \geq \varepsilon\}}) .$$

Par ailleurs, $E_{Q^n}(z_0'^n \, 1_{\{z_0^n \geq \varepsilon\}}) = P'^n(z_0^n \geq \varepsilon) = 1 - P'^n(z_0^n < \varepsilon)$. Comme $\gamma_2(\alpha) \geq 0$, on peut remplacer $2/(2-\gamma_2(\alpha))$ par 1 dans 5.15, qui entraine que si $\psi_{1/N}(\alpha) \leq \eta/2N$ et $\gamma_2(\alpha) < \varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} -h_\alpha(P^n, P'^n) &\leq 2(e^{C\eta}-1) + 3\beta(\alpha) + P'^n(R^n < \infty, z_0^n \geq \varepsilon) + P'^n(z_0^n < \varepsilon) - 1 \\ &= 2(e^{C\eta}-1) + 3\beta(\alpha) + P'^n(z_0^n < \varepsilon \text{ ou } R^n < \infty) - 1 \\ &\leq 2(e^{C\eta}-1) + 3\beta(\alpha) + P'^n(z_0^n < \varepsilon, \text{ ou } H^n(\tfrac{1}{2})_\infty \geq N, \text{ou } C' U_\infty^{nN} \geq \tfrac{\eta}{2}) - 1, \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant de 5.11. Comme $(P'^n) \triangleleft (P^n)$ on a $\lim_{\alpha \downarrow 0} \liminf_n h_\alpha(P^n, P'^n) = 0$ d'après 1.11. Comme $\psi_{1/N}(\alpha) \leq \eta/2N$ et $\gamma_2(\alpha) < \varepsilon$ pour tout α assez petit, et $\beta(\alpha) \downarrow 0$ quand $\alpha \downarrow 0$, il en découle que

$$\limsup_n P'^n(z_0^n < \varepsilon, \text{ ou } H^n(\tfrac{1}{2})_\infty \geq N, \text{ ou } C' U_\infty^{nN} \geq \tfrac{\eta}{2}) \geq 1 - 2(e^{C\eta}-1),$$

d'où

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \limsup_n P'^n(z_0^n < \varepsilon, \text{ ou } H^n(\tfrac{1}{2})_\infty \geq N, \text{ ou } U_\infty^{nN} \geq \frac{\eta}{2C'}) = 1 .$$

Mais ceci n'est autre que 5.10, avec η remplacé par $\eta/2C'$.

b) (i) $\Rightarrow (P'^n) \triangleleft (P^n)$ est évident. Supposons qu'on ait (ii). On a 5.3, donc d'après (ii) il vient

$$1 = \limsup_n P'^n(H^n(\tfrac{1}{2})_\infty > \theta) \leq \frac{1}{k} + 8\frac{k}{\theta} + \limsup_n P'^n(T_k^n < \infty)$$

pour tout $k \geq 1$, $\theta \geq 1$. En choisissant d'abord k, puis θ, on en déduit que

$$\lim_k \limsup_n P'^n(T_k^n < \infty) = 1 .$$

En particulier, cela entraine que $\limsup_n P'^n(T_k^n < \infty) = 1$ pour tout $k \geq 1$. Il existe alors une suite $n_k \uparrow \infty$ telle que $P'^{n_k}(T_k^{n_k} < \infty) \geq 1 - 1/k$. Comme $P^{n_k}(T_k^{n_k} < \infty) \leq 1/k$, la suite $A^{n_k} = \{T_k^{n_k} = \infty\}$ vérifie 1.10, et il en découle que $(P'^n) \triangleleft (P^n)$.■

Pour terminer, signalons qu'on pourrait déduire facilement les résultats de [2], [7], [9] à partir des théorèmes 5.1 ou 5.9, à condition de remplacer la condition 5.1(iii) par une version "optionnelle" (et non prévisible) analogue à la condition (iii') qui suit 4.1.

BIBLIOGRAPHIE

1 C. DELLACHERIE, P.A. MEYER: Probabilités et potentiel (II) Hermann, 1980

2 G.K. EAGLESON, J. MEMIN: Sur la contiguité de deux suites de mesures, généralisation d'un théorème de Kabanov-Liptcer-Shiryayev. Sém. Proba. XVI, 319-337, Lect. Notes in Math. 920, Springer, 1982

3 P. GREEWOOD, A.N. SHIRYAYEV: Contiguity and the statistical invariance principle. A paraitre, 1984

4 J. JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714, Springer, 1979

5 J. JACOD, J. MEMIN: Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semimartingales. Z. für Wahr. 35, 1-37, 1976

6 Y. KABANOV, R. LIPTCER, A.N. SHIRYAYEV: Absolue continuité et singularité des lois de probabilité localement absolument continues, I. Math. Sb. 107, 3, 364-415, 1978

7 R. LIPTCER, A.N. SHIRYAYEV: On the problem of "predictable" criteria of contiguity. Japan-USSR Symp. 386-418, Lect. Notes 1021, Springer 1983

8 R. LIPTCER, F. PUKELSHEIM, A.N. SHIRYAYEV: On necessary and sufficient conditions for contiguity and entire separation of probability measures. A paraitre, 1983

9 J. MEMIN: Sur la contiguité relative de deux suites de mesures, compléments. Sém. Proba. XVII, 371-376, Lect. Notes in Math. 986, Springer 1983

10 J. MEMIN, A.N. SHIRYAYEV: Distance de Hellinger-Kakutani des lois correspondant à deux processus à accroissements indépendants. A paraitre.

11 R. REBOLLEDO: La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi de processus. Mém. Soc. Math. France 62, 1-125, 1979