

ABDUL RAOUF DARWICH

**Sur l'orthogonalité de deux lois de probabilités correspondant
à deux processus de Markov**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985__1_1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**"SUR L'ORTHOGONALITE DE DEUX LOIS DE PROBABILITES
CORRESPONDANT A DEUX PROCESSUS DE MARKOV**

Abdul Raouf DARWICH
U.E.R. de Mathématiques
Université de RENNES I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX

RESUME

Dans ce travail on donne une condition nécessaire et suffisante pour que deux lois de probabilités P et Q correspondant à deux processus de Markov soient orthogonales. Ce résultat est indépendant de l'hypothèse $P \overset{Loc}{\ll} Q$ qui a été exigée dans [5], [8], [11].

mots clés

Chaîne de Markov, matrice markovienne, matrice sous-markovienne, intégrale d'Hellinger.

MR codification 60 G 30, 62 E

INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit (Ω, \mathcal{a}) un espace mesurable, P et Q deux probabilités sur (Ω, \mathcal{a}) l'intégrale d'Hellinger d'ordre α $0 < \alpha < 1$ de P et Q est défini par :

$$H_\alpha(P, Q) = \int_{\Omega} p^\alpha q^{1-\alpha} d\mu, \text{ où } \mu \text{ est une mesure } \sigma\text{-finie, dominant } P \text{ et } Q \text{ et } p, q \text{ sont}$$

les densités de P et Q par rapport à μ resp.

On a : $P \perp Q \Leftrightarrow H_\alpha(P, Q) = 0$

voir par exemple [2], [4], [5], [6], [7], [9], [10].

a) Si $(\mathcal{a}_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de sous σ -algèbre de \mathcal{a} qui engendre \mathcal{a} (i.e $\mathcal{a} = \sigma \left\{ \bigcup_1^n \mathcal{a}_n \right\}$)

alors on a :

$$H_\alpha(P, Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H_\alpha(P^n, Q^n)$$

P^n, Q^n sont les restrictions de P et Q à la tribu \mathcal{a}_n resp.

b) soient $(X_n)_{n \geq 1}, (Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de v.a définies sur (Ω, \mathcal{a}) à valeurs dans un espace discret E : on suppose que $(\Omega, \mathcal{a}, P, (X_n)_{n \geq 1}), (\Omega, \mathcal{a}, Q, (Y_n)_{n \geq 1})$ sont deux processus de Markov.

Notations

1*) On note par :

$$p_i = P(X_1 = i) ; q_i = Q(Y_1 = i) \text{ et pour tout } n \geq 2 :$$

$$P^n = P_{(X_1, \dots, X_n)}, Q^n = Q_{(Y_1, \dots, Y_n)}$$

$$P_{i,j}(n) = P(X_n = j / X_{n-1} = i) ; q_{i,j}(n) = Q(Y_n = j / Y_{n-1} = i)$$

$$r_i = p_i^\alpha q_i^{1-\alpha} ; r_{i,j}(n) = [P_{i,j}(n)]^\alpha [q_{i,j}(n)]^{1-\alpha}.$$

Soit $\mathbb{R}(n)$ une matrice définie par :

$$n \geq 2 ; \mathbb{R}(n) = (r_{i,j}(n))_{i,j \in E} \text{ et } \mathbb{R}^{(n)} = \mathbb{R}(2) \times \dots \times \mathbb{R}(n)$$

$$(\mathbb{R}^{(n)})_{i,j} = r_{i,j}^{(n)}$$

2*) Pour tout $n \geq 2$, soit g_n une fonction définie sur E comme suit :

$$\text{pour tout } i \in E, g_n(i) = \sum_{j \in E} r_{i,j}^{(n)}$$

on suppose que : $p_i > 0, q_i > 0$ pour tout $i \in E$.

1 - Proposition 1

Pour que $P \perp Q$, il est nécessaire et suffisant que pour tout $i \in E$ on a : $g_n(i) \rightarrow 0$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration :

On a : $P \perp Q \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} H_\alpha(P^n, Q^n) = 0 ; 0 < \alpha < 1$.

$$\begin{aligned} H_\alpha(P^n, Q^n) &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in E^{(n)}} [P^n(i_1, \dots, i_n)]^\alpha [Q^n(i_1, \dots, i_n)]^{1-\alpha} \\ &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in E^{(n)}} (p_{i_1}^\alpha q_{i_1}^{1-\alpha}) \times \dots \times [P(n)]^\alpha [q(n)]^{1-\alpha} \end{aligned}$$

"Car les suites $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ sont deux chaînes de Markov".

On a :

$$H_\alpha(P^n, Q^n) = \sum_{i,j \in E} r_i r_{i,j}^{(n)} = \sum_{i \in E} r_i g_n(i)$$

comme pour tout $i \in E ; r_i g_n(i) \leq r_i$ et $\sum_{i \in E} r_i \leq 1$, alors

on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in E} r_i g_n(i) = \sum_{i \in E} r_i \{ \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(i) \}$$

"Th de convergence dominée".

En remarquant que $0 \leq g_n(i) \leq 1, \forall i \in E, \forall n \geq 2$ et $g_n(i) \searrow$ lorsque $n \nearrow$ pour tout

$i \in E$.

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_\alpha(P^n, Q^n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(i) = 0 \text{ pour tout } i \in E.$$

Remarque (1)

Dans le cas où p_i et q_i peuvent être nuls, alors on a:

$P \perp Q \Leftrightarrow g_n(i) \rightarrow 0$, lorsque $n \rightarrow +\infty$, pour tout $i \notin A$.

$$A = \{i \in E \mid p_i = 0 \text{ ou } q_i = 0\}.$$

Remarque (2)

S'il existe un nombre $0 < \delta < 1$, tel que, pour n assez grand on a :

$g_n(i) \leq \delta g_{n-1}(i)$ pour tout $i \in E$, alors $P \perp Q$.

Remarque (3)

S'il existe un nombre $0 < \delta < 1$, tel que, pour n assez grand on a :

$\sum_{k \in E} [R(n) \times R(n+1)]_{i,k} \leq \delta \sum_{k \in E} [R(n)]_{i,k}$ pour tout $i \in E$, alors $P \perp Q$.

Remarque (4)

Si pour n assez grand on a :

$\sum_{j \in E} [R(n)]_{i,j} \leq \delta$, pour tout $i \in E$, où $0 < \delta < 1$, alors $P \perp Q$.

Cas fini :

Corollaire 1 :

$$P \perp Q \Leftrightarrow R^{(n)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Corollaire 2 :

Si : 1) $M[R(k)] \geq \delta > 0$, pour tout $k = 2, 3, 4, \dots$

2) Il existe un nombre $0 < \gamma < 1$, tel que, pour tout $k \geq 2$, il existe $i(k) \in E$ tel que :

$$\sum_{j \in E} [R(k)]_{i(k),j} \leq \gamma, \text{ alors } P \perp Q.$$

où $M[R(k)] = \min_{C \subseteq E} \max_{i \in C} \sum_{j \in F} [R(k)]_{i,j}$, et $|C| + |F| = |E|$, ($|F|$ et $|C|$, $|E|$ sont les

cardinaux de F , C , et E resp.

Démonstration :

En appliquant le corollaire (1) et le th(1) de [3]

II – LE CAS où les DEUX CHAINES SONT HOMOGÈNES

Dans ce cas, on a :

$$R^{(n)} = [R(2)]^{n-1}, \text{ on note par } R(2) = R, \text{ et } (R)_{i,j} = r_{i,j}. \text{ Si } f \text{ est}$$

une fonction bornée sur E, alors Rf est une fonction sur E définie par :

$$(Rf)(i) = \sum_{j \in E} r_{i,j} f(j)$$

On a :

$$g_n = R^{(n-1)} 1 \quad (ici f \equiv 1), \text{ en remarquant que :}$$

$$R(R1) = R1, \dots, R(R^{(n-1)} 1) = R^{(n)} 1.$$

Théorème 1 :

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1) $P \perp Q$

2) Pour toute fonction g sur E telle que :

$$0 \leq g \leq 1, \text{ et } Rg = g, \text{ on a : } g \equiv 0$$

3) Pour toute fonction g bornée sur E telle que :

$$Rg = g, \text{ on a, } g \equiv 0.$$

Démonstration :

1) \Leftrightarrow 2) :

d'après la proposition (1) on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_{\alpha}(P^n, Q^n) = 0 \Leftrightarrow (g_n(i) \rightarrow 0 \text{ pour tout } i \in E$$

mais $g_n(i) = \sum_{j \in E} r_{i,j}^{(n)} = (R^{(n-1)} 1)(i)$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_{\alpha}(P^n, Q^n) = 0 \Leftrightarrow R^{(n-1)} 1 \rightarrow 0.$

Il est clair que $R^{(n-1)} 1 \rightarrow 0$ est équivalent à 2) d'où 1) \Leftrightarrow 2).

1) \Rightarrow 3)

Puisque g est une fonction bornée sur E , alors il existe $B > 0$ tel que :

$$-B \leq g \leq B \quad \text{et} \quad B(\mathbb{R}^{(n)} - 1) \leq \mathbb{R}^{(n)} g \leq B(\mathbb{R}^{(n)} - 1)$$

$$\text{donc} \quad -B \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{R}^{(n)} - 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{R}^{(n)} g \leq B \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{R}^{(n)} - 1$$

ce qui implique $g = 0$.

3) \Rightarrow 1)

La fonction F définie sur E par :

$$F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{R}^{(n)} - 1 \quad \text{vérifie :$$

$$0 \leq F \leq 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{R}F = F, \quad \text{donc cette fonction vérifie 3) par conséquent}$$

$F = 0$, d'où le résultat.

Cas fini :

Théorème 2 :

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1) $P \perp Q$

2) $\mathbb{R}^{(n)} \rightarrow 0$
 $n \rightarrow +\infty$

3) $\text{Det}(I - R) \neq 0$

où I est la matrice unité d'ordre $|E|$.

Démonstration :

En appliquant le corollaire (1) et le th. (1).

Critère simple de dichotomie dans le cas fini :

Avec les hypothèses de (8), on a :

Corollaire 3 :

Si, le σ -algèbre \mathcal{F} est P -triviale (Th (1) de (8)), alors on a :

$$P \perp Q \iff \text{Det}(I - R) \neq 0$$

$$P \ll 0 \iff \text{Det}(I - R) = 0$$

où $F = \bigcap \sigma \{ \log S_{k+1} - \log S_k / k \geq n \}$ et $S_n = (dQ/a_n) / (dP/a_n)$

Exemples :

Ex (1) :

$$\text{Soient } P^* = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} ; Q^* = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\text{Det}(I - R) \neq 0$ donc $P \perp Q$.

Ex (2) :

$$\text{Soient } P^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} ; Q^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On a $\text{Det}(I - R) = 0$, donc P et Q ne sont pas orthogonales.

P^* , Q^* sont les matrices de transition associés à P et Q resp.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. R. DARWICH : La séparation asymptotique dans les chaînes de Markov.
Colloque sur la séparation asymptotique et l'estimation,
CHAMBERY 1984 FRANCE.
- [2] A. HILLION : Sur l'intégrale de Hellinger et la séparation asymptotique
C.R.A.S., 283, série A 1976.
- [3] D. J. HARTIFIEL : On infinite products of non-negative matrices. STAM. JAPPL.
MATH. VOL. 26, n° 2 (1974) p. 297-301,
- [4] J. JACOD : Processus de Hellinger, absolue continuité, contiguïté.
Publications des séminaires de Mathématiques
(Séminaires de Probabilités RENNES 1983).
- [5] KABANOV, R.S. LIPCER and A.N. SIRJAEV : Absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous
probability distribution.
I. MATH. USSR SBORNIK, VOL 35 (1979) n° 5
II., VOL 36 (1980) n° 1
- [6] S. KAKUTANI : On equivalence of infinite product measures.
ANN of MATH 49 (1948) p. 214-224.
- [7] C. KRAFT : "Some conditions for consistency and uniform consistency of
statistical procedures".
PUB. UNIV. CALIFORNIA. VOL. 2 n° 6 p. 125-142.
- [8] R. LEPAGE and V. MANDREKAR : "On likelihood ratio of measures given by Markov chains"
PROC. AMER. MATH. SOC. VOL. 52 (1975) p. 377-380.
- [9] J. MEMIN et A.N. SHIRYAYEV : "Distance, d'Hellinger-Kakutani des lois correspondant à deux
processus à accroissement indépendant". Preprint.
- [10] T. NEMETZ : "Equivalence-orthogonality dichotomies of probability theory"
Colloquium on limite theorem of probability theory.
KESZITHELY (1974).
- [11] A. SPATARU : "On absolute continuity and singularity of probability measures".
REV. ROUM. MATH. PUR et APPL. TOME XXVII n° 2 (1983)
p. 171-193.