PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

A. KISSAMI

Théorème de convergence vers des lois stables pour une classe de chaînes de Markov

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 62-77
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___1_62_0>

Publications de l'I.R.M.A.R. - RENNES 1985

THEOREME DE CONVERGENCE VERS DES LOIS STABLES POUR UNE CLASSE DE CHAINES DE MARKOV

A. KISSAMI

RESUME

Ce travail est consacré essentiellement à l'étude de la convergence vers une loi stable d'une somme normalisée de variables aléatoires en dépendance markovienne.

Sous une condition de type Doeblin, le résultat obtenu dit que ces variables aléatoires peuvent être assimilées à des variables aléatoires indépendantes, ayant pour loi l'image par la fonctionnelle de la mesure invariante de la chaîne de Markov.

Mots-Clés

- Domaine normal d'attraction
- Fonctions Lipshitziennes
- Perturbations d'opérateurs.

MR Codification 60 J 10 - 60 E 07.

THEOREME DE CONVERGENCE VERS DES LOIS STABLES

POUR UNE CLASSE DE CHAINES DE MARKOV

INTRODUCTION

On considère un espace métrique compact, une mesure de probabilités π sur X, un noyau markovien noté P(x,dy) et une fonction f définie sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que f [π] est dans le domaine normal d'attraction d'une loi stable. Sous certaines conditions relatives à la fonction f et au noyau P(x,dy), on montrera que $\frac{S_n}{A_n} - B_n$ converge en loi vers une loi stable, où $S_n = f(x_1) + \dots + f(x_n)$ avec $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de noyau P(x,dy) et A_n, B_n des constantes convenablement choisies. La méthode utilisée est la méthode des transformées de Fourier.

Ces théorèmes ont été énoncés par Nagaev [5], sous des hypothèses différentes.

Ce type de méthode a été utilisé pour démontrer des théorèmes limites pour des chaînes de Markov dans le cas où le moment d'ordre 2 existe par Y. GUIVARC'H [4].

Dans la situation classique de la convergence vers une loi stable d'une somme normalisée de variables aléatoires indépendantes, on peut se reférer à [3] ; [2] ; [1].

THEOREME DE CONVERGENCE VERS DES LOIS STABLES

POUR UNE CLASSE DE CHAINES DE MARKOV

1 - LOIS STABLES et DOMAINES NORMAUX d'ATTRACTION

On considère un nombre réel α et des lois de probabilités μ telles que :

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} \mu[t,+\infty) = C_{\mu}^{+}$$

et

$$\lim_{t \to -\infty} |t|^{\alpha}\mu(-\infty, t] = C_{\mu}^{-}$$

où C_{μ}^{+}, C_{μ}^{-} sont des constantes positives finies associées à μ et $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$

A chaque couple $C_{\mu} = (C_{\mu}^{+}, C_{\mu}^{-})$ est associée une unique loi stable $\sigma_{C_{\mu}}$ (centrée si $\alpha > 1$) dont la transformée de Fourier $\hat{\sigma}_{C_{\mu}}$ est définie par : $\hat{\sigma}_{C_{\mu}}(\lambda) = e^{\overline{C}_{\mu}|\lambda|^{\alpha}}$ où $\overline{C}_{\mu}$ est une constante, combinaison linéaire de C_{μ}^{+} et de C_{μ}^{-}, dépend du signe de λ et dont la partie réelle est négative.

On montre que si μ est centré on a pour λ petit

$$\operatorname{Log} \hat{\sigma}_{C_{\mu}}(\lambda) = \overline{C}_{\mu}|\lambda|^{\alpha} [1 + \varepsilon(\lambda)]$$

avec $$\lim_{\lambda \to 0} \varepsilon(\lambda) = 0$$

Plus généralement, notons par m_{α} l'nesemble des mesures bornées telles que :

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha}\mu[t,+\infty) = C_{\mu}^{+}$$

et

$$\lim_{t \to -\infty} |t|^{\alpha} \mu(-\infty, t] = C_{\mu}^{-}$$

On a donc pour μ centré, $\alpha \neq 1$ et λ petit

$$\hat{\sigma}_{C_{\mu}}(\lambda) - \hat{\sigma}_{C_{\mu}}(0) = \overline{C}_{\mu}|\lambda|^{\alpha} (1 + \varepsilon_1(\lambda)) \text{ avec } \lim_{\lambda\to 0} \varepsilon_1(\lambda) = 0$$

2 - FONCTIONS α-REGULIERES

On considère un espace métrique compact X, un noyau markovien noté P(x,dy), une mesure de probabilité notée π et une fonction f définie sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On note par C(X) l'espace des fonctions continues et par L(X) l'espace des fonctions défini par :

$$L(X) = \{ \phi \,/\, \sup_{\substack{x,y \\ x \neq y}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d^{1/2}(x,y)} < +\infty \}$$

on normera L(X) par :

$$||\phi||_L = ||\phi||_\infty + m(\phi)$$

où

$$||\phi||_\infty = \sup_{x \in X} |\phi(x)| \quad \text{et} \quad m(\phi) = \sup_{\substack{x,y \\ x \neq y}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d^{1/2}(x,y)}$$

Il est aisé de vérifier que $|| \; ||_L$ est une norme sur L(X) et que $(L(X) \,; || \; ||_L)$ est une algèbre de Banach, $(||\phi g||_L \leq ||\phi||_L \, ||g||_L)$

Psons $S = f^{-1}\{ \pm \infty \}$ et notons $\phi \cdot \pi$ la mesure produit de la fonction ϕ par π et par $f[\phi \cdot \pi]$ la mesure image de $\phi \cdot \pi$ par f.

Définition

On dit que f est α-régulière si et seulement si pour toute fonction ϕ de C(X) on a $f[\phi \cdot \pi] \in m_\alpha$.

Notons par π_t^+ et π_t^- les restrictions de π respectivement a $\{f > t\}$ et à $\{f < -t\}$.

De la définition découle la conséquence immédiate suivante :

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha}\, \pi_t^+ = \rho^+ \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} t^{\alpha}\, \pi_t^- = \rho^- \quad \text{où}$$

ρ^+ et ρ^- sont des mesures de Radon bornées portées par S et définies par :

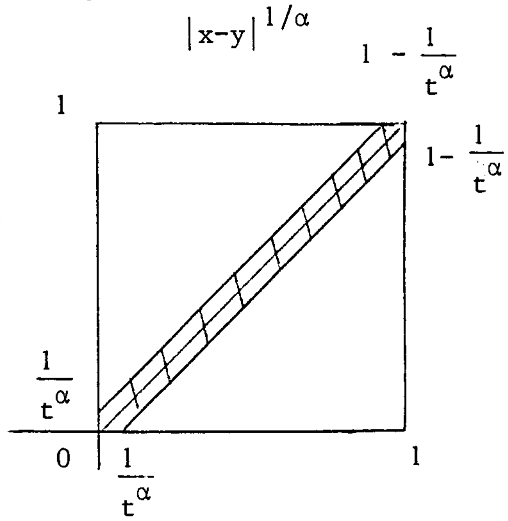
$$\rho^+\phi = C_{f\,[\phi\cdot\pi]}^+ \qquad \rho^-\phi = C_{f\,[\phi\cdot\pi]}^-$$

D'ailleurs on a équivalence et ceci résulte de la relation

$$\pi_t^+\, \phi = f\,[\phi\cdot\pi]\;[t,+\infty) \quad \text{et} \quad \pi_t^-\, \phi = f[\phi\cdot\pi]\;(-\infty, -t]\,.$$

Exemple

$X = [\,0,1]^2$, π la mesure de Lebesgue sur X et $f(x,y) = \dfrac{1}{|x-y|^{1/\alpha}}$



on a alors $\rho^- = 0$ et $\rho^+\phi = 2\displaystyle\int_0^1 \phi(x,x)\,dx$

En effet pour t positif

Posons $B_t^+ = \{f > t\}$

et $B_t^- = \{f < -\,t\}$

On a $B_t^- = \phi$ donc $\rho^- = 0$

$$B_t^+ = \{(x,y)\in X \;/\; f(x,y) > t\}$$

$$= \{(x,y)\in X \;/\; y - \frac{1}{t^\alpha} < x < y + \frac{1}{t^\alpha}\}$$

B_t^+ est le domaine hachuré.

$$t^\alpha\, \pi_t^+\, \phi - \rho^+\phi = t^\alpha \int_{B_t^+} \phi(x,y)\,dxdy - 2\int_0^1 \phi(y,y)\,dy$$

or $$2\int_0^1 \phi(y,y)\,dy = t^\alpha \int_0^1 dy \int_{y-\frac{1}{t^\alpha}}^{y+\frac{1}{t^\alpha}} \phi(y,y)\,dx$$

et donc en vertu du théorème de Fubini et de la continuité de ϕ on en déduit que :

$$|t^\alpha \pi_t^+ \phi - \rho^+\phi| = |t^\alpha \int_0^1 dy \, [\int_{y-\frac{1}{t^\alpha}}^{y+\frac{1}{t^\alpha}} (\phi(x,y) - \phi(y,y))dx]|$$

$$\leq \varepsilon \int_0^1 dy \, (t^\alpha \int_{y-\frac{1}{t^\alpha}}^{y+\frac{1}{t^\alpha}} dx) = 2\varepsilon$$

Donc $t^\alpha \pi^+ \phi \longrightarrow \rho^+\phi$

3 - THEOREME de CONVERGENCE

On suppose $P(x,dy) = P(x,y)\, d\pi(y)$ avec $P(x,y)$ une fonction Lipschitzienne, strictement positive et bornée, f une fonction α-régulière et centrée si $\alpha > 1$, i.e $\int_X f(y)\, d\pi(y) = 0$.

On note par S_n la somme $f(x_1) + \ldots\ldots + f(x_n)$ où (x_i) désigne une chaîne de Markov de noyau $P(x, dy)$.

Théorème A $(\alpha \neq 1)$

Avec les mêmes notations précédentes la loi de $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}$ *sous* π *converge vers la loi stable associée à* $f[\pi]$.

Remarque

Dans le théorème A tout se passe comme si les variables aléatoires $(f(x_i))$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $f[\pi]$.

La preuve du théorème repose sur la relation de base

$$E_\pi(e^{i\lambda \frac{S_n}{n^{1/\alpha}}}) = \langle P^n_{\frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}} \cdot e, \pi \rangle$$

où P_λ est l'opérateur défini par :

$$P_\lambda\ \phi(x) = \int e^{i\lambda f(y)}\phi(y)\ P(x,y)d\pi(y).$$

Pour étudier la convergence de $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}$, on est donc amené à étudier les propriétés spectrales de P_λ et la perturbation de la valeur propre dominantes $k(\lambda)$ de P_λ.

Pour avoir le développement de $k(\lambda)$ on doit avoir la convergence en norme de $\frac{P_\lambda - P}{|\lambda|^\alpha}$ vers $A^\pm$ où A^+ et A^- sont des opérateurs linéaires qu'on définira ultérieurement.

4 - CONVERGENCE VAGUE et CONVERGENCE en NORME

Proposition 4.1

Soit X un espace métrique compact, μ_n une suite de mesures de Radon sur X telles que $||\mu_n|| \leq M$ et μ_n converge vaguement vers μ alors $\mu_n(\phi)$ converge uniformément vers $\mu(\phi)$ sur $\{\phi\ ;\ ||\phi||_L \leq 1\}$

Preuve

Supposons le contraire, il existe alors une sous-suite ϕ_n qui converge uniformément vers ϕ avec $||\phi_n||_L \leq 1$ et $\mu_n(\phi_n)$ ne converge pas vers $\mu(\phi)$.

Or $\quad |\mu_n(\phi_n) - \mu_n(\phi)| \leq M||\phi_n - \phi||_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et $\quad \mu_n(\phi) \longrightarrow \mu(\phi)$ ce qui est impossible.

Notons par ν_λ la mesure définie par :

$$\nu_\lambda \psi = \begin{cases} \displaystyle\int_X \frac{e^{i\lambda f(y)} - 1}{|\lambda|^\alpha} \psi(y) d\pi(y) & \text{si } \alpha < 1 \\ \displaystyle\int_X \frac{e^{i\lambda f(y)} - 1 - i\lambda f(y)}{|\lambda|^\alpha} \psi(y) d\pi(y) & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

on a :

$$\nu_\lambda \psi = \frac{f\,\widehat{[\psi\cdot\pi]}(\lambda) - f\,\widehat{[\psi\cdot\pi]}(0)}{|\lambda|^\alpha} \qquad \text{si } \alpha < 1$$

$$\nu_\lambda \psi = \frac{f\widehat{[\psi\cdot\pi]}\;(\lambda) - f\,\widehat{[\psi\cdot\pi]}(0) - \lambda(f\,\widehat{[\psi\cdot\pi]})'\,(0)}{|\lambda|^\alpha} \qquad \text{si } \alpha > 1$$

Comme ν_λ est linéaire en ψ et que $f\,[\psi\cdot\pi] \in m_\alpha$ i.e dans le domaine normal d'attraction d'une loi stable, alors ν_λ est une mesure de Radon complexe bornée qui converge quand $\lambda \to 0$. Notons par ν^+ et ν^- les mesures définies par :

$$\nu^+\phi = \lim_{\lambda \to 0^+} \nu_\lambda \phi \qquad\qquad \nu^-\phi = \lim_{\lambda \to 0^-} \nu_\lambda \phi$$

ν^+ et ν^- sont des mesures de Radon bornées portées par S et combinaison linéaire de ρ^+ et ρ^-.

<u>Proposition 4.2</u>

Il existe $\varepsilon(\lambda)$ avec $\lim_{\lambda \to 0} \varepsilon(\lambda) = 0$ tel que

$$|\nu_\lambda \phi - \nu^\pm \phi| \leq \varepsilon(\lambda)\ ||\phi||_L$$

<u>Preuve</u>

Ceci découle de la proposition précédente car ν_λ converge et pour $||\phi||_\infty \leq 1$.

si $\alpha < 1$

$$|\nu_\lambda \phi| \leq ||\phi||_\infty \int \left|\frac{e^{i\lambda f(y)} - 1}{|\lambda|^\alpha}\right| d\pi(y)$$

$$\leq \text{ constante}$$

si $\alpha > 1$

$$|\nu_\lambda \phi| \leq ||\phi||_\infty \int \left|\frac{e^{i\lambda f(y)} - i\lambda f(y) - 1}{|\lambda|^\alpha}\right| d\pi(y)$$

$$\leq \text{ constante.}$$

5 - DEVELOPPEMENT de P_λ et $k(\lambda)$

Notons par A^+ (respectivement A^-) les opérateurs linéaires définis par le noyau $P(x, y)\, d\, \nu^+(y)$ (respectivement $P(x,y) d\, \nu^-(y)$) i.e

$$A^+\phi(x) = \nu^+ \; [P_x \; \phi]$$

$$A^-\phi(x) = \nu^- \; [P_x \; \phi]$$

On note aussi par P, P_λ et M les opérateurs linéaires de $C(X)$ définis par :

$$P\phi(x) = \int_X P(x,y)\phi(y)\; d\pi(y)$$

$$P_\lambda\phi(x) = \int_X e^{i\lambda f(y)} P(x,y)\phi(y) d\pi(y)$$

$$= \text{Transformée de Fourier de } f\,[P_x \cdot \pi]$$

$$= f\,[\widehat{P_x \phi \cdot \pi}]\,(\lambda)$$

$$M\phi(x) = \int f(y)\; P(x,y)\phi(y) d\pi(y) = -i\,(f\,[\widehat{P_x \phi \cdot \pi}])'\,(0)$$

M est un opérateur de moyenne.

On a alors le :

Théorème

si $\alpha < 1$ $$\lim_{\lambda \to 0^{\pm}} \left\|\frac{P_\lambda - P}{|\lambda|^\alpha} - A^{\pm}\right\|_L = 0$$

si $\alpha > 1$ $$\lim_{\lambda \to 0^{\pm}} \left\|\frac{P_\lambda - P - i\lambda M}{|\lambda|^\alpha} - A^{\pm}\right\|_L = 0$$

Etablissons d'abord lemme suivant.

Lemme 5.1

On suppose que P(x,y) est une fonction Lipshitzienne sur X compact on a alors :

$$B = \sup_{\substack{x,x' \\ x \neq x'}} \left\|\frac{P_x - P_{x'}}{d^{1/2}(x,x')}\right\|_L < +\infty$$

Preuve

$$B = \sup_{x,x'} \left\|\frac{P_x - P_{x'}}{d^{1/2}(x,x')}\right\|_\infty + \sup_{x,x'} m\left(\frac{P_x - P_{x'}}{d^{1/2}(x,x')}\right)$$

or

$$\sup_{x,x'} \left\|\frac{P_x - P_{x'}}{d^{1/2}(x,x')}\right\|_\infty = \sup_{x,x'} \sup_{y} \left|\frac{P(x,y) - P(x',y)}{d^{1/2}(x,x')}\right|$$

et

$$\sup_{x,x'} m\left(\frac{P_x - P_{x'}}{d^{1/2}(x,x')}\right) = \sup_{x,x'} \sup_{y,y'} \left|\frac{P(x,y) + P(x',y') - P(x,y') - P(x',y)}{d^{1/2}(x,x')\, d^{1/2}(y,y')}\right|$$

comme P(x,y) est de Lipshitz on a :

$$|P(x,y) - P(x',y)| \leq kd(x,x') \text{ où } k \text{ est le rapport de Lipshitz}$$

et

$$|P(x,y)+P(x',y')-P(x',y)-P(x,y')| \leq 2k \operatorname{Inf}[d(x,x'), d(y,y')]$$

finalement on a :

$$B \leq k \sup_{x,x'} d^{1/2}(x,x') + 2k \frac{\text{Inf}\,[d(x,x'),\, d(y,y')]}{d^{1/2}(x,x')d^{1/2}(y,y')}$$

or pour deux nombres positifs u et v $\text{Inf}(u,v) \leq u^{1/2}\, v^{1/2}$ et comme X est compact $\sup_{x,x'} d^{1/2}(x,x') = M < \infty$.

Par suite $\quad B \leq Mk + 2k = (M+2)k < +\infty$

Preuve du théorème

On a :

si $\alpha < 1$ $\quad \dfrac{P_\lambda - P}{|\lambda|^\alpha}\ \phi(x) = \nu_\lambda\ (P_x\phi)$

et

si $\alpha > 1$ $\quad \dfrac{P_\lambda - i\lambda M - P}{|\lambda|^\alpha}\ \phi(x) = \nu_\lambda(P_x\phi)$.

Il suffit donc de démontrer le théorème dans le cas $\alpha < 1$, on a :

$$\left|\left|\frac{P_\lambda - P}{|\lambda|^\alpha}\ \phi - A^{\pm}\ \phi\right|\right|_L = \left|\left|\frac{P_\lambda - P}{|\lambda|^\alpha}\ \phi - A^{\pm}\phi\right|\right|_\infty + m\left(\frac{P_\lambda - P}{|\lambda|^\alpha}\ \phi - A^{\pm}\phi\right)$$

or

$$\left|\left|\frac{P_\lambda - P}{|\lambda|^\alpha}\ \phi - A^{\pm}\phi\right|\right|_\infty = \sup_{x \in X}\ |\ \nu_\lambda(P_x\phi) - \nu^{\pm}(P_x\phi)|$$

d'après la proposition 4.2 ceci

$$\leq \varepsilon(\lambda) \sup_{x \in X}\ ||P_x\phi||_L$$

comme $||P_x\phi||_L \leq ||P_x||_L\ \ ||\phi||_L \leq \text{Const}||\phi||_L$ on a:

$$\left|\left|\frac{P_\lambda - P}{|\lambda|^\alpha}\ \phi - A^{\pm}\phi\right|\right|_\infty \leq \text{Const}\varepsilon(\lambda)||\phi||_L$$

De même :

$$m\left(\frac{P_\lambda - P}{|\lambda|^\alpha}\phi - A^{\pm}\phi\right) = \sup_{x,x'} \left|\nu_\lambda\left(\frac{P_x - P_{x'}}{d^{1/2}(x,x')}\phi\right) - \nu^{\pm}\left(\frac{P_x - P_{x'}}{d^{1/2}(x,x')}\phi\right)\right|$$

$$\leq \varepsilon(\lambda) \sup_{x,x'} \left|\left|\frac{P_x - P_{x'}}{d^{1/2}(x,x')}\phi\right|\right|_L$$

$$\leq \varepsilon(\lambda) \sup_{x,x'} \left|\left|\frac{P_x - P_{x'}}{d^{1/2}(x,x')}\right|\right|_L \; ||\phi||_L$$

d'après le lemme 5.1 ceci

$$\leq (M + 2k)\; \varepsilon(\lambda)\; ||\phi||_L.$$

Finalement :

$$\left|\left|\frac{P_\lambda - P}{|\lambda|^\alpha}\phi - A^{\pm}\phi\right|\right|_L \leq (M + 2k + \text{const})\; \varepsilon(\lambda)||\phi||_L$$

Soit

$$\left|\left|\frac{P_\lambda - P}{|\lambda|^\alpha} - A^{\pm}\right|\right|_L \leq (M + 2k + \text{const})\; \varepsilon(\lambda)$$

D'où le théorème

<u>Proposition 5.1</u>

L'opérateur P_λ est compact au sens de la norme $||\;||_L$ et la valeur propre dominante $k(\lambda)$ de P_λ vérifie

$$\lim_{\lambda \to 0^{\pm}} \frac{k(\lambda) - 1}{|\lambda|^\alpha} = \langle A^{\pm}e, \pi \rangle = \overline{C}_f\,[\pi]$$

Etablissons le lemme suivant.

<u>Lemme 5.2</u>

Soit A *un opérateur admettant* a *comme valeur propre simple et isolée,* $e \otimes \pi$ *le projecteur correspondant et* α (B) *la valeur propre perturbée de* a. *Alors* α (B) *est différentiable en* A *et de différentielle* $\varepsilon \longrightarrow \langle \varepsilon e, \pi \rangle$.

Preuve

Notons $(e + \varepsilon) \otimes (\pi + \eta)$ le projecteur de $e \otimes \pi$ on a alors :

$$< e,\pi > = < e + \varepsilon, \pi + \eta > = 1 \text{ et donc}$$

$$< e,\eta > + < \varepsilon, \pi > + < \varepsilon, \eta > = 0 \qquad \text{d'où}$$

$$< e,\eta > + < \varepsilon, \pi > = - < \varepsilon, \eta > \text{ est du second ordre.}$$

De même on a :

$$\alpha(A + u) = (A + u) < e + \varepsilon, \pi + \eta >$$

$$= < Ae, \pi > + < A\varepsilon, \pi > + < Ae, \eta > + < A\varepsilon,\eta > + < ue,\pi >$$

$$+ < u\varepsilon, \eta > + < u\varepsilon, \pi > + < ue, \eta >$$

$$= \alpha(A) + < ue, \pi > + < A\varepsilon, \pi > + < Ae, \eta > + \phi(u)$$

où $\phi(u)$ est du second ordre en u

or

$$< A\varepsilon, \eta > + < Ae, \eta > = A(< \varepsilon, \pi > + < e, \eta >)$$

$$= - A < \varepsilon, \eta >$$

donc $< A\varepsilon, \eta > + < Ae, \eta >$ est du second ordre.

Finalement on a :

$$\alpha(A + u) = \alpha(A) + < ue, \pi > + h(u) \text{ où } h(u) \text{ est du second ordre.}$$

Preuve de la proposition Pour simplifier les notations la compacité de P_λ sera établie pour $\lambda = 0$.

Puisque $P(x,y)$ est de Lipshitz on a :

$$|P\phi(x) - P\phi(x')| = |\int \phi(y) (P(x,y) - P(x',y)) d\pi(y)|$$

$$\leq kd(x,x') ||\phi||_\infty$$

pour $||\phi||_L \leq 1$ on a :

$$|P\phi(x) - P\phi(x')| \leq kd(x,x') \text{ donc la famille } P\phi,\ ||\phi||_L \leq 1 \text{ est}$$

équicontinue.

Comme X est compact, $\{ P\phi(x) \mid x \in X\}$ est compact, donc relativement compact et par suite, d'après le théorème d'Ascoli $\{ P\phi \mid \|\phi\|_L \leq 1\}$ est relativement compact en norme uniforme. Soit $(P\phi)_n$ une suite de $\{P\phi \mid \|\phi\|_L \leq 1\}$, il existe alors une sous-suite $(P\phi)_{(n_k)}$ extraite de $(P\phi)_n$ telle que $\|(P\phi)_{(n_k)} - \psi\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour montrer que P est compact au sens de $\| \ \|_L$, il suffit de montrer que

$$\|(P\phi)_{(n_k)} - \psi\|_L \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\|(P\phi)_{(n_k)} - \psi\|_L = \|(P\phi)_{(n_k)} - \psi\|_\infty + \sup_{x,y} \frac{|(P\phi)_{(n_k)}(x) - \psi(x) - (P\phi)_{(n_k)}(y) + \psi(y)|}{d^{1/2}(x,y)}$$

comme $\|(P\phi)_{(n_k)} - \psi\|_\infty \longrightarrow 0$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout (n_k) assez grand on a :

$$\|(P\phi)_{(n_k)} - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$$

De plus comme $(P\phi)_{(n_k)}$ est Lipshitzienne de rapport k, ψ l'est aussi et de même rapport.

Si $d(x,y) < \varepsilon$ on a :

$$\|(P\phi)_{(n_k)} - \psi\|_L \leq \|(P\phi)_{(n_k)} - \psi\|_\infty + \sup_{x,y} \frac{|(P\phi)_{(n_k)}(x) - (P\phi)_{(n_k)}(y)|}{d^{1/2}(x,y)}$$

$$+ \sup_{x,y} \frac{|\psi(x) - (y)|}{d^{1/2}(x,y)}$$

Comme $P\phi_{(n_k)}$ et ψ sont de Lipshitz de même rapport k

$$\|(P\phi)_{(n_k)} - \psi\|_L \leq \|(P\phi)_{(n_k)} - \psi\|_\infty + 2kd^{1/2}(x,y) \leq \varepsilon + 2k\, \varepsilon^{1/2}.$$

Si $d(x,y) \geq \varepsilon$ comme $(P\phi)_{(n_k)} \to \psi$ on a :

$$||(P\phi)_{(n_k)} - \psi||_L \leq \varepsilon + \operatorname{Sup}_x \frac{(P\phi)_{(n_k)}(x) - \psi(x)}{\varepsilon^{1/2}} + \operatorname{Sup}_y \frac{(P\phi)_{(n_k)} - \psi(y)}{\varepsilon^{1/2}}$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{1/2} = \varepsilon + 2\varepsilon^{1/2}$$

et donc P est compact au sens $||\ ||_L$.

D'après le lemme 5.2 si $\alpha < 1$

$k(\lambda) - 1 = \langle (P_\lambda - P)e, \pi \rangle + h(P_\lambda - P)$ où h est du second ordre en $P_\lambda - P$,

et donc d'après le théorème précédent

$$\text{si } \alpha < 1;\ \frac{k(\lambda) - 1}{|\lambda|^\alpha} \longrightarrow \langle A^{\pm} e, \pi \rangle = \overline{C}_{f\,[\pi]}$$

De même si $\alpha > 1$ on a $\int f d\pi = \langle Me, \pi \rangle = 0$ et par suite

$k(\lambda) - 1 = \langle (P_\lambda - P - i\lambda M)e, \pi \rangle + h(P_\lambda - P)$

et donc

$$\lim_{\lambda \to 0^\pm} \frac{k(\lambda) - 1}{|\lambda|^\alpha} = \langle A^{\pm} e, \pi \rangle = \overline{C}_{f\,[\pi]}$$

où $\overline{C}_{f\,[\pi]}$ est combinaison linéaire de $\rho^+(e), \rho^-(e)$, dépend du signe de λ et $\operatorname{Re} \overline{C}_{f\,[\pi]} < 0$.

<u>Preuve du théorème A</u>

On a :

$$E_\pi\left(e^{i\lambda \frac{S_n}{n^{1/\alpha}}}\right) = \langle P^n_{\frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}} \cdot e, \pi \rangle, \quad \text{et pour } \lambda \text{ petit},$$

$P_\lambda = k(\lambda)\pi_\lambda + r_\lambda$ avec $||r_\lambda||_L \leq 1 - \varepsilon$ pour λ petit

D'où

$$P^n_{\frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}} = k^n\left(\frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}\right) \times \pi_{\frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}} + r_{\frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}}$$

comme $\pi_{\frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}} \longrightarrow \pi$ et $r^n_{\frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}} \longrightarrow 0$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P^n_{\frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}} = \lim_{n \to +\infty} k^n\left(\frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}\right) \cdot \pi = e^{< A^{\pm} e,\, \pi > |\lambda|^{\alpha}} \cdot \pi$$

$$= e^{\overline{C}_{f\,[\pi]} |\lambda|^{\alpha}} \cdot \pi$$

et finalement la loi de $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}$ converge vers la loi stable associée à $\rho^{+}(e)$, $\rho^{-}(e)$.

REFERENCES

[1] L. BREIMAN (1968) : "Probability". Addison-Wesley, Reading, Mass.

[2] W. FELLER : "An introduction to probability theory and its application" Vol 2 ; New-York (1966).

[3] B.V. GNEDENKO and A.N. KOLMOGOROV (1954) : "Limit distributions for sums of Independent Random variables, Addison-Wesley, Reading, Mass.

[4] Y. GUIVARC'H (1984) : "Applications d'un théorème limite local à la transience et à la récurrence de Marches de Markov" Springer Lecture Notes, 1096, p. 301-332.

[5] S.V. NAGAEV (1957) : "Some limit theorems for stationary Markov drains" Theor. Probab. Appl. 2, 378-406.