JEAN-CLAUDE TOUGERON

Un théorème de quasi-transversalité

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 121-143
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___3_121_0>

CHAPITRE V

UN THEOREME DE QUASI-TRANSVERSALITE

TOUGERON Jean-Claude

Université de Rennes I

UER Mathématiques & Informatique

Campus de Beaulieu

35 042 - RENNES CEDEX - FRANCE

Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Y un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si Z est une sous-variété de classe C^∞ de Y, disons en première approximation qu'une application $f : X \to Y$ est "quasi-transverse" à Z s'il existe un sous-ensemble discret D de X tel que $f_{|(X\setminus D)}$ soit transverse à Z. Considérons alors une famille $(Z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de sous-variétés analytiques de Y. Si cette famille vérifie certaines conditions de type noethérien (par exemple, ce sera le cas si les Z_γ sont les sous-variétés algébriques de Y), nous montrons l'existence d'applications C^∞ $f : X \to Y$ quasi-transverses à toutes les Z_γ ; en fait, ces applications f formeront un sous-ensemble dense de $C^\infty(X,Y)$ muni de la topologie fine.

Un exemple trivial montre qu'on ne peut remplacer "quasi-transverse" par transverse. Si l'on prend dans $\mathbb{R}^3$ la famille de tous les plans affines Z_γ , n'importe quelle surface S de $\mathbb{R}^3$ ne peut être transverse à tous les Z_γ, car les plans tangents à la surface ne lui sont pas transverses. Cependant, si l'on suppose par exemple que S est une surface du second degré, S est toujours quasi-transverse à tous les Z_γ, sauf si S est une surface dégénérée, par exemple un cylindre ; mais dans ce cas, on peut toujours en déformant un peu la surface, la rendre quasi-transverse à tous les plans. Ce phénomène est beaucoup plus général et l'on peut remplacer la famille des plans affines par des familles beaucoup plus importantes. Nous étudions d'abord le cas local et donnons des applications ; puis nous énonçons les résultats dans le cas global.

Dans tout cet article, $\underline{k}$ désigne un corps de caractéristique 0 ; A une $\underline{k}$-algèbre commutative et unitaire ; Γ un sous-ensemble du spectre maximal SMA de A, les deux conditions suivantes étant satisfaites :

(a) $\forall \gamma \in \Gamma$, l'application canonique $\underline{k} \to A/\gamma$ est un isomorphisme

(b) Γ muni de la topologie induite par celle de SMA

est un espace noethérien. Nous utiliserons de manière systématique les résultats de [2] ; en particulier, si $X = (X_1,\ldots,X_m)$, le couple $(A[X],\Gamma \times \underline{k}^m)$ vérifie aussi les conditions (a) et (b) et si $\dim \Gamma < \infty$, $\dim(\Gamma \times \underline{k}^m) < \infty$ (cf [2], lemme 1.2). ($\Gamma \times \underline{k}^m$ s'identifie canoniquement à un sous-ensemble de SMA[X] : à (γ,ξ) on associe l'idéal maximal engendré par $\gamma, X_1-\xi_1,\ldots, X_m-\xi_m$).

1 - LE THEOREME DE QUASI-TRANSVERSALITE : 1ère forme locale

1.1 : Soient $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_p)$, les coordonnées canoniques de $\underline{k}^n$ et $\underline{k}^p$ respectivement. On note $J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)$ l'espace des jets d'ordre q d'applications polynomiales de $\underline{k}^n$ dans $\underline{k}^p$; ainsi, sont canoniquement associées aux coordonnées précédentes, des coordonnées $(x_i \,;\, y_j^\omega)$ $(1 \leqslant i \leqslant n \,;\, 1 \leqslant j \leqslant p \,;\, \omega \in \mathbb{N}^n$ et $|\omega| \leqslant q)$ de $J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)$ telles que $\forall$ f et $\forall\, x_o \in \underline{k}^n$, le jet $J^q f(x_o)$ de f en x_o ait pour coordonnées $x = x_o$ et $y_j^\omega = (D^\omega f_j)(x_o)$. On note $J^\infty(\underline{k}^n,\underline{k}^p)$ l'espace des jets d'ordre infini, limite projective des $J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)$; si $q' \geqslant q$, $\Pi_{q,q'}$ désigne la projection canonique de $J^{q'}(\underline{k}^n,\underline{k}^p)$ sur $J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)$ et on pose $\Pi_{q,\infty} = \Pi_q$; enfin $J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$ désigne le sous-ensemble de $J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)$ formé des jets d'origine 0 : bien entendu, $J^\infty(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$ s'identifie à $\underline{k}[[x]]^p$.

Un élément $f = (f_1,\dots,f_p) \in \underline{k}[[x]]^p$ s'interprète aussi comme un morphisme formel $f : (\underline{k}^n,o) \to (\underline{k}^p,f(o))$ et f se prolonge en un morphisme $J^q(f) : (\underline{k}^n,o) \to (J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)\ ,\ J^q f(o)$; ainsi $J^q(f)^*$ est l'homomorphisme de $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leqslant q$, dans $\underline{k}[[x]]$, qui envoie x_i sur x_i et y_j^ω sur $D^\omega f_j(x) - D^\omega f_j(o)$.

__1.2__: Un sous-ensemble F d'un espace $\underline{k}^N$ est un __Γ-ensemble__ s'il existe un sous-ensemble constructible C de $\Gamma \times \underline{k}^m \times \underline{k}^N$ tel que $F = \Pi(C)$, $\Pi : \Gamma \times \underline{k}^m \times \underline{k}^N \to \underline{k}^N$ désignant la projection canonique. Bien entendu, $\Gamma \times \underline{k}^m \times \underline{k}^N$ est muni de la topologie induite par celle de SMA[x], $x = (x_1,\dots,x_{m+N})$, et un ensemble constructible est une réunion finie de différences de deux fermés.

Un sous-ensemble Ω' de $\underline{k}[[x]]^p$ est un __Γ-pro-ensemble__ si $\Omega' = \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \Pi_q^{-1}(\Omega'_q)$, chaque Ω'_q étant un Γ-sous-ensemble de $J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$ vérifiant $\Pi^{-1}_{q,q'}(\Omega'_q) \supset \Omega'_{q'}$, $\forall\ q\ ,\ q' \in \mathbb{N}$, $q' \geqslant q$. Bien entendu, toute réunion finie de Γ-ensembles (resp. de Γ-pro-ensembles) est un Γ-ensemble (resp. un Γ-pro-ensemble).

__1.3__ : Supposons $\underline{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; supposons que A est une sous-algèbre contenant $\underline{k}[x]$ de l'algèbre des fonctions $\underline{k}$-analytiques au voisinage d'un sous-ensemble analytique et localement fermé W de $\underline{k}^p$ et que $\Gamma = W$ (chaque point de W s'identifie à l'idéal maximal de A formé des fonctions nulles en ce point). Alors un W-sous-ensemble F de $\underline{k}^N$ est l'image par Π d'un ensemble analytique, et donc c'est une réunion au plus dénombrable de variétés analytiques connexes F_i. On pose alors $\operatorname{codim} F = \inf_i \operatorname{codim} F_i$. Enfin, si $\Omega' \subset \underline{k}[[x]]^p$ est un W-pro-ensemble, on pose $\operatorname{codim} \Omega' = \sup_q \operatorname{codim} \Omega'_q$.

Soit I un idéal de $A[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leqslant q$; pour chaque $\gamma \in \Gamma$, notons I_γ l'idéal $\varphi_\gamma(I)$ de $\underline{k}[[x ; y_j^\omega]]$ où φ_γ désigne le morphisme canonique: $A[[x ; y_j^\omega]] \to A/\gamma[[x ; y_j^\omega]] \simeq \underline{k}[[x ; y_j^\omega]]$.

PROPOSITION 1.4

Avec les notations précédentes, supposons que $\forall \gamma \in \Gamma$, ht $I_\gamma \geq n$, et soit $\Omega(I)$ l'ensemble des $f \in \underline{k}[[x]]^p$ tel que $\mathrm{ht}(J^q f)^* I_\gamma \geq n$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ (donc $(J^q f)^* I_\gamma$ contient une puissance de l'idéal maximal $\underline{m}$ de $\underline{k}[[x]]$). Alors :

(1) $\Omega(I)$ est le complémentaire d'un Γ-pro-ensemble Ω'.

(2) Si l'on se donne un jet d'ordre r, $\xi \in J^r(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$, il existe un $r' \geq r$ et $\xi' \in \Pi^{-1}_{r,r'}(\xi)$ tels que

$$\Pi^{-1}_{r'}(\xi') \subseteq \Omega(I)$$

(3) Si dim $\Gamma < \infty$, on peut choisir r' indépendant de ξ et donc ne dépendant que de r.

(4) Avec les hypothèses de 1.3 (cas analytique), $\Omega(I)$ est le complémentaire d'un W-pro-ensemble de codimension infinie.

Cette proposition sera la conséquence de quelques lemmes.

LEMME 1.5

Soit J un idéal de $\underline{k}[[x]]$; on a $\dim_{\underline{k}}(\underline{k}[[x]]/J) \leq h$ si et seulement si $\dim_{\underline{k}}(J+\underline{m}^{n+1}/\underline{m}^{n+1}) \geq \binom{n+h}{n}-h$.

(Pour une démonstration, voir [1], ch. II).

LEMME 1.6

Soit J un idéal de $A[[x]]$; il existe un entier h tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ vérifiant ht $J_\gamma \geqslant n$, on ait $\dim_{\underline{k}}(\underline{k}[[x]]/J_\gamma) \leqslant h$.

(Pour une démonstration, voir [1]).

LEMME 1.7

Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$ ($|\omega| \leqslant q$) tel que ht $\mathfrak{J} \geqslant n$. Soit $\xi \in J^r(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$ un jet d'ordre r avec $r \geqslant q$; alors l'ensemble des $\xi' \in \Pi^{-1}_{r,r+q+1}(\xi)$ tels que $\mathrm{ht}(J^q\xi')^*\mathfrak{J} < n$ est une sous-variété algébrique propre de $\Pi^{-1}_{r,r+q+1}(\xi)$ (ξ' est identifié à un polynôme).

PREUVE

Démontrons tout d'abord que l'ensemble considéré est une sous-variété algébrique de $\Pi^{-1}_{r,r+q+1}(\xi)$. L'ensemble des idéaux $(J^q\xi')^*\mathfrak{J}$ quand ξ' décrit $\Pi^{-1}_{r,r+q+1}(\xi)$ est une famille noethérienne ; d'après 1.5 et 1.6, il existe un entier h tel que $\mathrm{ht}(J^q\xi')^*\mathfrak{J} \geqslant n$ si et seulement si $\dim_{\underline{k}}((J^q\xi')^*\mathfrak{J} + \underline{m}^{h+1}/\underline{m}^{h+1}) \geqslant \binom{n+h}{n}-h$. Dire que la condition précédente n'est pas vérifiée revient à annuler certains déterminants à coefficients polynômes sur $\Pi^{-1}_{r,r+q+1}(\xi)$, d'où le résultat.

Démontrons que cette variété algébrique est propre. Considérons l'application polynomiale $\Gamma : \underline{k}^n \times \Pi^{-1}_{r,r+q+1}(\xi) \ni (x,\xi') \to J^q(\xi')(x) - J^q(\xi')(o) \in J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)$; on a $\Gamma^*(x_i) = x_i$ et $\Gamma^*(y_j^\omega) = D^\omega(\xi + \sum_{|\mu|=r+1}^{r+q+1} a_j^\mu \frac{x^\mu}{\mu!}) - D^\omega\xi(o)$, où les a_j^μ sont les coordonnées de ξ'. On vérifie facilement que Γ est une submersion en tout point (x,ξ') avec $x \neq 0$. Pour tout $i = 1,\dots,n$ l'application Γ^* induit donc un morphisme plat de $\underline{k}[x\ ;\ y_j^\omega]$, $|\omega| \leqslant q$, dans $\underline{k}[x\ ;\ \xi'[\ [x_i^{-1}]$ et donc un morphisme plat de $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$ dans $\underline{k}[\xi']\ [[x]]\ [x_i^{-1}]$. Soit $\Gamma^*\mathfrak{J}$ l'idéal engendré par l'image de $\mathfrak{J}$ par le morphisme $\Gamma^* : \underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]] \to \underline{k}[\xi']\ [[x]]$; si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier contenant $\Gamma^*\mathfrak{J}$ et tel que $(x_1,\dots,x_n) \not\subseteq \mathfrak{P}$, il reste un indice i tel que $x_i \notin \mathfrak{P}$ et ht $\mathfrak{P}$ = ht $\mathfrak{P}\,[x_i^{-1}] \geqslant \mathrm{ht}(\Gamma^*\mathfrak{J})[x_i^{-1}] \geqslant \mathrm{ht}\ \mathfrak{J} \geqslant n$, l'avant dernière inégalité résultant de la platitude du morphisme Γ^* de $\underline{k}[[x;y_j^\omega]]$ dans $\underline{k}[\xi']\,[[x]]\,[x_i^{-1}]$; si $(x_1,\dots,x_n) \subseteq \mathfrak{P}$, on a aussi ht $\mathfrak{P} \geqslant n$. Ainsi dans tous les cas ht $\mathfrak{P} \geqslant n$ et donc ht $\Gamma^*\mathfrak{J} \geqslant n$. Si $\xi'_o \in \Pi^{-1}_{r,r+q+1}(\xi)$, notons $\varphi_{\xi'_o}$ le morphisme canonique : $\underline{k}[\xi']\,[[x]] \to \underline{k}[[x]]$ qui envoie ξ' sur ξ'_o ; visiblement, $\varphi_{\xi'_o}(\Gamma^*\mathfrak{J}) = (J^q\xi'_o)^*\mathfrak{J}$; comme ht $\Gamma^*\mathfrak{J} \geqslant n$, il existe un ouvert dense de $\Pi^{-1}_{r,r+q+1}(\xi)$ tel que, $\forall\ \xi'_o$ dans cet ouvert, $\mathrm{ht}(\varphi_{\xi'_o}(\Gamma^*\mathfrak{J})) \geqslant n$ c.q.f.d.

LEMME 1.8

Soit I un idéal de $A[[x\ ;\ y_j^\omega]]$ ($|\omega| \leqslant q$) tel que $\forall\ \gamma \in \Gamma$, ht $I_\gamma \geqslant n$. Il existe une application $r \to r'$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $r' \geqslant r$, telle que $\forall\ \xi \in J^r(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$ et $\forall\ \gamma \in \Gamma$, il existe une sous-variété algébrique propre $V_\gamma(\xi)$ de $\Pi^{-1}_{r,r'}(\xi)$ avec pour tout $f \in \underline{k}[[x]] \setminus \Pi^{-1}_{r'}(V_\gamma(\xi))$, $\dim_{\underline{k}}\ (\underline{k}[[x]]\ /\ (J^a f)^* I_\gamma) \leqslant r'$.

PREUVE

Fixons l'entier r et soit $\xi' \in J^{r+q+1}(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$; les idéaux $(J^q\ \xi')^*\ I_\gamma$ quand γ décrit Γ et ξ' varie, forment une famille noethérienne. D'après 1.7, il existe $r' \geqslant r+q+1$ tel que $\mathrm{ht}(J^q\ \xi')^*\ I_\gamma \geqslant n$ si et seulement si $\dim_{\underline{k}}(\underline{k}[[x]]\ /\ (J^q\ \xi')^* I_\gamma) \leqslant r'$. Cet entier r' associé à r convient. En effet, soient $\xi \in J^r(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$ et $\gamma \in \Gamma$ fixés ; l'ensemble des $\xi'' \in \Pi^{-1}_{r,r'}(\xi)$ tels que $\dim_{\underline{k}}(\underline{k}[[x]]\ /\ (J^q\ \xi'')^* I_\gamma) \geqslant r'$ forment d'après 1.5 une sous-variété algébrique $V_\gamma(\xi)$ de $\Pi^{-1}_{r,r'}(\xi)$ telle que pour tout $f \in \underline{k}[[x]] \setminus \Pi^{-1}_{r'}(V_\gamma(\xi))$, on ait $\dim_{\underline{k}}(\underline{k}[[x]]\ /\ (J^q f)^* I_\gamma) \leqslant r'$; enfin, d'après 1.7, $V_\gamma(\xi)$ est une sous-variété algébrique propre de $\Pi^{-1}_{r,r'}(\xi)$.

1.9 - PREUVE DE 1.4

(1) Posons $\Omega' = \underline{k}[[x]]^p \setminus \Omega(I)$; d'après 1.6, $\Omega' = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} \Omega''_h$ avec $\Omega''_h = \{f \in \underline{k}[[x]]^p$; $\exists\ \dot{\gamma} \in \Gamma$ tel que $\dim_{\underline{k}}((J^q f)^* I_\gamma + \underline{m}^{h+1} / \underline{m}^{h+1}) \leqslant \binom{n+h}{n} - h\}$. Cette dernière inégalité ne dépend que du jet d'ordre q+h de f en O, et elle se traduit par l'annulation de polynômes en les coordonnées de $(J^{q+h}f)(o)$ à coefficients dans A. Ainsi, si $\Pi_{q+h}(\Omega''_h) = \Omega'_{q+h}$, $\Omega' = \cap\ \Pi^{-1}_{q+h}(\Omega'_{q+h})$ et Ω'_{q+h} est la projection sur $J^{q+h}(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$ d'un fermé de $\Gamma \times J^{q+h}(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$, c.q.f.d.

(2) Soient $X_1,\ldots,X_s$ les composantes irréductobles de Γ et choisissons $\gamma_1 \in X_1,\ldots,\gamma_s \in X_s$. D'après le lemme 1.8, il existe un $\underline{r}' \geqslant \underline{r}$ ne dépendnat que de $\underline{r}$ et $\xi' \in \Pi^{-1}_{r,r'}(\xi)$ tels que, $\forall\ f \in \Pi^{-1}_{r'}(\xi')$ et $\forall\ j = 1,\ldots,s$, on ait : $\dim_{\underline{k}}(\underline{k}[[x]] / (J^q f)^* I_{\gamma_j}) \leqslant r'$. Par continuité, il existe des fermés $Y_1 \subsetneqq X_1,\ldots, Y_s \subsetneqq X_s$ tels que, $\forall\ \gamma \in \bigcup_j (X_j \setminus Y_j)$ et $\forall\ f \in \Pi^{-1}_{r'}(\xi')$, on ait : $\dim_{\underline{k}}(\underline{k}[[x]] / (J^q f)^* I_\gamma) \leqslant r'$ et donc à fortiori $\mathrm{ht}(J^q f)^* I_\gamma \geqslant n$. On peut alors répéter ce que l'on vient de faire en remplaçant X par $\bigcup_j Y_j$ et ξ par ξ' ; ces opérations itérées s'arrêtent, car Γ est noethérien et l'on obtient alors le résultat.

(3) Dans la récurrence noethérienne précédente, r' ne dépend que de r et en dépend pas de ξ ; si $\dim \Gamma < \infty$, le nombre de fois que l'on itère est uniformément borné par $\dim \Gamma$, d'où le résultat.

(4) Dans le cas analytique, on démontre que r' ne dépend que de r en remplaçant dans la récurrence noethérienne précédente les fermés $X_1,\ldots,X_s$ par les composantes connexes de la partie régulière de W. Ces composantes connexes forment une famille au plus dénombrable de variétés X_i et on choisit un point γ_i dans chacune de ces X_i. On obtient aussi un sous-ensemble dense de $\Pi^{-1}_{r,r'}(\xi)$ pour la topologie habituelle, formé de ξ' tels que, $\forall f \in \Pi^{-1}_{r'}(\xi')$ et $\forall i$: $\dim_{\underline{k}}(\underline{k}[[x]] / (J^q f)^* I_{Y_i}) \leq r'$. Un tel ξ' étant fixé, il existe un sous-espace $Y_{\xi'}$ de W tel que $\dim_{ana} Y_{\xi'} < \dim_{ana} W$ et tel que, pour tout $f \in \Pi^{-1}_{r'}(\xi')$ et tout $\gamma \in W \setminus Y_{\xi'}$, on ait $\dim_{\underline{k}}(\underline{k}[[x]] / (J^q f)^* I_{\gamma}) \leq r'$. On recommence le raisonnement en remplaçant ξ par ξ' et W par $Y_{\xi'}$. Après un nombre fini d'itérations, le processus s'arrête et l'on obtient un $r' \geq r$ et un sous-ensemble dense Ω_ξ de $\Pi^{-1}_{r,r'}(\xi)$ pour la topologie habituelle tel que $\Omega(I) \supseteq \Pi^{-1}_{r'}(\Omega_\xi)$. Il en résulte aisément que le complémentaire Ω' de $\Omega(I)$ est de codimension infinie.

2 - LE THEOREME DE QUASI-TRANSVERSALITE : 2ème forme locale

2.1 : Si $\mathfrak{I}$ est un idéal de l'anneau des séries formelles $\underline{k}[[X]]$, $X = (X_1, \dots, X_N)$ on note $\mathcal{J}_k(\mathfrak{I})$ l'idéal engendré dans $\underline{k}[[X]]$ par $\mathfrak{I}$ et tous les jacobiens d'ordre k d'éléments de $\mathfrak{I}$: $\dfrac{D(P_1,\dots,P_k)}{D(X_{i1},\dots,X_{ik})}$. Soit $f \in \underline{k}[[x]]^p$; si $P \in \underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leq q$, on a la formule : $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(J^q f)^* P = (J^{q+1} f)^* \dfrac{\partial^f P}{\partial x_i}$ où l'on pose :

$$\frac{\partial^f P}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{j,\omega} \frac{\partial P}{\partial y_j^\omega} \left(y_j^{\omega+(i)} + D^{\omega+(i)} f_j(o)\right)$$

((i) désigne le multi-indice dont toutes les composantes sont nulles sauf la 1ère qui est égale à 1). Si $P_1, \dots, P_k \in \underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leq q$, on écrit :

$$\frac{D^f(P_1,\dots,P_k)}{D(x_{i1},\dots,x_{ik})} = \det \left|\frac{\partial^f P_\alpha}{\partial x_{i\beta}}\right| \ , \ 1 \leq \alpha\ ,\ \beta \leq k$$

Si $\mathfrak{I}$ est un idéal de $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leq q$, soit $\mathcal{J}^f_k(\mathfrak{I})$ l'idéal engendré dans $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leq q+1$, par $\mathfrak{I}$ et tous les "jacobiens" $\dfrac{D^f(P_1,\dots,P_k)}{D(x_{i1},\dots,x_{ik})}$ d'éléments de $\mathfrak{I}$. Visiblement $\mathcal{J}^f_k(\mathfrak{I})$ est contenu dans l'idéal engendré par $\mathcal{Y}_k(\mathfrak{I})$ dans $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leqslant q+1$, et :

$$(J^{q+1}f)^*(\mathcal{Y}_k^f(\mathfrak{I})) = \mathcal{Y}_k((J^qf)^*\mathfrak{I})$$

Avec ces notations, on a le résultat suivant :

LEMME 2.2

Notons $\omega_k^f(\mathfrak{I})$ l'idéal $\sqrt{\mathcal{Y}_k^f(\mathfrak{I})} : \mathcal{Y}_k(\mathfrak{I})$ de $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leqslant q+1$; alors ht $\omega_k^f(\mathfrak{I}) > n$.

PREUVE

Le lemme est démontré dans [1], Ch. VII, lorsque $\mathfrak{I}$ est engendré par des germes de fonctions analytiques complexes (donc $\underline{k} = \mathbb{C}$) et il est facile d'étendre cette démonstration au cas formel.

DEFINITION 2.3

Soit $f \in \underline{k}[[x]]^p$; nous dirons que J^qf est k-quasi-transverse à l'idéal $\mathfrak{I}$ de $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leqslant q$, si ht$(J^{q+1}f)^*\ (\omega_k^f(\mathfrak{I})) \geqslant n$; si cela est vrai pour tout k, nous dirons que $J^q(f)$ est quasi-transverse à $\mathfrak{I}$. Dans ce cas, il existe un entier $h \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\underline{m}^h \subseteq (J^{q+1}f)^*\ (\omega_k^f(\mathfrak{I})) \subseteq$$

$$\sqrt{(J^{q+1}f)^*\,\mathcal{Y}_k^f(\mathfrak{I})}\ :\ (J^qf)^*\,\mathcal{Y}_k(\mathfrak{I}) =$$

$$\sqrt{\mathcal{Y}_k(J^qf)^*\,\mathfrak{I}}\ :\ (J^qf)^*\,\mathcal{Y}_k(\mathfrak{I})$$

Avant d'en arriver aux résultats principaux, rappelons un résultat de [2]. Appelons stratification de Γ une partition finie de Γ en ensembles localement fermés de la forme $Y_i = X_i \setminus V(\delta_i)$ où X_i est un fermé irréductible de Γ et $\delta_i \in A$ ne s'annule pas identiquement sur X_i. On a alors le résultat suivant :

LEMME 2.4

Soient I' et I" demi idéaux de $A[[x]]$. Il existe une stratification de Γ par des $Y_i = X_i \setminus V(\delta_i)$ et, pour chaque i, un idéal I_i de $(A / \mathfrak{J}(X_i))_{\delta_i}[[x]]$, tels que $\forall i$ et $\forall_\gamma \in Y_i$ l'idéal $\sqrt{I'_\gamma} : I''_\gamma$ soit l'idéal $I_i(\gamma)$ induit par I_i en γ.

THEOREME 2.5

Soit I un idéal de $A[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leqslant q$; l'ensemble des $f \in \underline{k}[[x]]^p$ tels que $J^q f$ soit k-quasi-transverse à tous les idéaux I_γ , $\gamma \in \Gamma$, est un ensemble $\Omega(I)$ qui vérifie les conditions (1), (2), (3) et (4) de la proposition 1.4

PREUVE

Les idéaux $I'_{f,\gamma} = \mathcal{Y}_k^f(I_\gamma)$ et $I''_\gamma = \mathcal{Y}_k(I_\gamma)\cdot \underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leqslant q+1$, s'interprètent comme des idéaux de l'anneau des séries formelles $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leqslant q+1$, paramétrés par $\Gamma \times J^{q+1}(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$, espace qui est noethérien. D'après 2.4 et le lemme 2.2, les idéaux $\omega_k^f(I_\gamma)$ forment une famille noethérienne d'idéaux de hauteur > n. Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.4.

<u>2.6</u> : Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de $\underline{k}[[x]]$; on note $\sigma_k(\mathfrak{J})$ l'idéal engendré par les $\xi \in \underline{k}[[x]]$ tels que $\xi\ .\ \mathfrak{J}$ soit contenu dans un sous-idéal de $\mathfrak{J}$ engendré par k éléments de $\mathfrak{J}$, et on pose $R_k(\mathfrak{J}) = \sqrt{\sigma_k(\mathfrak{J})} \cap \sqrt{J_k(\mathfrak{J})}$ (Cf. [ ] pour ces définitions). L'interprétation géométrique de $R_k(\mathfrak{J})$ est simple : par exemple, dans le cas analytique complexe, $V(\mathfrak{J}) \setminus V(R_k(\mathfrak{J}))$ est un germe de variété de co-dimension k et l'idéal de cette variété est engendré en chacun de ses points par $\mathfrak{J}$.

Une <u>strate</u> de $\underline{k}[[x]]$ de co-dimension k $(0 \leqslant k \leqslant N)$ est un couple $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$ de deux idéaux de $\underline{k}[[x]]$ tels que : $\mathfrak{I} \subseteq \sqrt{\mathfrak{I}'} \subseteq R_k(\mathfrak{I})$ (en particulier, dans le cas analytique complexe, $V(\mathfrak{I}) \setminus V(\mathfrak{I}')$ est un germe de variété de co-dimension k). Une <u>stratification</u> de l'idéal $\mathfrak{I}$ est une suite $\mathfrak{I}_\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant s)$ d'idéaux de $\underline{k}[[x]]$ tels que $\sqrt{\mathfrak{I}} = \sqrt{\mathfrak{I}_0}$; $\mathfrak{I}_s = \underline{k}[[x]]$ et $\forall\, \alpha = 0,\dots,s-1$, $(\mathfrak{I}_\alpha, \mathfrak{I}_{\alpha+1})$ est une strate de $\underline{k}[[x]]$. La <u>stratification canonique</u> de $\mathfrak{I}$ s'obtient en posant $\mathfrak{I}_0 = \sqrt{\mathfrak{I}}$ et en définissant par récurrence $\mathfrak{I}_{\alpha+1} = R_{k_\alpha}(\mathfrak{I}_\alpha)$ où $k_\alpha = \mathrm{ht}\ \mathfrak{I}_\alpha$; on vérifie que $k_{\alpha+1} > k_\alpha$ si $k_\alpha \leqslant N$: il existe donc un plus petit s tel que : $\mathfrak{I}_s = \underline{k}[[x]]$. Supposons que $\mathfrak{I}$ est un idéal de $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leqslant q$, et soit $\mathcal{S}(\mathfrak{I}) = (\mathfrak{I}_\alpha)\ 0 \leqslant \alpha \leqslant s$ sa stratification canonique avec $k_\alpha = \mathrm{ht}\ \mathfrak{I}_\alpha$. Si $J^q f$ $(f \in \underline{k}[[x]]^p)$ est k_α-quasi-transverse à chaque $\mathfrak{I}_\alpha$ pour tout α (nous dirons alors <u>$J^q f$ est quasi-transverse à $\mathcal{S}(\mathfrak{I})$</u>), soit α_0 le plus petit α tel que $k_\alpha \geqslant n$. On vérifie que $(J^q f)^* \mathfrak{I}_0, \dots, (J^q f)^* \mathfrak{I}_{\alpha_0}$, $\underline{k}[[x]]$, est une stratification de $(J^q f)^* \mathfrak{I}$; en outre, pour tout α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$, $\mathrm{ht}(J^q f)^* \mathfrak{I}_\alpha = \mathrm{ht}\ \mathfrak{I}_\alpha$. On déduit immédiatement de 2.5 et de [2] le :

COROLLAIRE 2.7

Soit I un idéal de $A[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leqslant q$; pour chaque $\gamma \in \Gamma$, soit $\mathcal{S}(I_\gamma)$ la stratification canonique de I_γ. Alors l'ensemble $\Omega(I)$ des $f \in \underline{k}[[x]]^p$ tels que $J^q f$ soit quasi-transverse à $\mathcal{S}(I_\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ vérifie les conclusions (1), (2), (3) et (4) de 1.4.

PREUVE

En effet, d'après [2], il existe une stratification de Γ par des $Y_i = X_i \setminus V(\delta_i)$, et pour chaque i, un idéal I_i de $(A / \mathfrak{I}(X_i))_{\delta_i}[[x\ ;\ y_j^\omega]]$, $|\omega| \leqslant q$, tels que $\forall i$ et $\forall \gamma \in Y_i$, l'idéal $R_k(I_\gamma)$ soit l'idéal $I_i(\gamma)$ induit par I_i en γ. Les idéaux qui interviennent dans tous les $\mathcal{S}(I_\gamma)$ forment donc une famille noethérienne d'idéaux à laquelle on applique le théorème 2.5.

<u>**2.8**</u> : Un sous-ensemble Ω de $\underline{k}[[x]]^p$ est <u>dense</u> dans $\underline{k}[[x]]^p$ s'il est dense pour la topologie habituelle de $\underline{k}[[x]]^p$, c'est à dire si $\forall q \in \mathbb{N}$ et $\forall \xi \in J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)_o$, $\Pi_q^{-1}(\xi) \cap \Omega \neq \phi$. Visiblement, une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\underline{k}[[x]]^p$ est dense.

Si $\underline{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut munir $\underline{k}[[x]]$ de la topologie forte suivante : si $f = (f_j^\omega) \in \underline{k}[[x]]^p$, un système fondamental de voisinages de f est formé de tous les $V_\mu(f)$ où μ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\mu(q) > 0$ pour q assez grand et $V_\mu(f) = \{g = (g_j^\omega)$; $\forall j$ et $\forall \omega$: $|f_j^\omega - g_j^\omega| \leqslant \mu(|\omega|)\}$. Cette topologie est plus fine que la précédente et, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ étant des espaces de Baire, une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\underline{k}[[x]]^p$ muni de cette topologie forte, est fortement dense dans $\underline{k}[[x]]^p$.

<u>**2.9**</u> : Soient A_α , $\alpha \in \mathbb{N}$, des $\underline{k}$-algèbres commutatives et unitaires; Γ_α un sous-ensemble de SMA_α , de telle sorte que $\forall\ \alpha_1,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{N}$ le couple $(A_{\alpha_1} \otimes_{\underline{k}} \ldots \otimes_{\underline{k}} A_{\alpha_p}\ ,\ \Gamma_{\alpha_p} \times \ldots \times \Gamma_{\alpha_p})$ vérifie comme (A,Γ) les conditions (a) et (b). Pour tout α, soit $P_\alpha \in A_\alpha[[x]]$; $X = (X_1,\ldots,X_N)$. Considérons la sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\underline{k}[[x]]$ engendré sur $\underline{k}$ par tous les P_{α,γ_α}, α décrivant $\mathbb{N}$ et γ_α décrivant Γ_α. Un élément de $\mathcal{A}$ est donc simplement un polynôme en un nombre fini de P_{α,γ_α} à coefficients dans $\underline{k}$. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\underline{k}[[x]]$ qui peut être décrite de cette manière sera dite de <u>type noethérien</u>. Bien entendu, dans cette définition, on peut remplacer la famille des P_α par la famille de toutes les dérivées des P_α en les X_i. <u>Quitte à la grossir , on peut donc toujours supposer qu'une algèbre de type noethérien est stable par dérivation.</u> Remarquons enfin qu'<u>une réunion dénombrable croissante d'algèbres de type noethérien est de type noethérien.</u> Voici quelques exemples de telles algèbres :

2.9.1 : On suppose que pour tout α, A_α est un anneau de la forme $(\underline{k}[Y_1,\ldots,Y_m] / \mathfrak{P})_\delta$ où $\mathfrak{P}$ est l'idéal premier des polynômes qui s'annulent sur un sous-ensemble irréductible Z de $\underline{k}^m$ et $\delta \in \underline{k}[Y] \setminus \mathfrak{P}$; et on suppose en outre que $\Gamma_\alpha \subseteq Z \setminus V(\delta)$. Les conditions imposées précédemment sur les (A_α,Γ_α) sont évidemment satisfaites. Nous dirons que $\mathcal{A}$ est une algèbre de type noethérien algébrique. Par exemple, l'algèbre de tous les polynômes à coefficients dans $\underline{k}$ en une famille dénombrable d'éléments $P_\alpha \in \underline{k}[x]$, est de type noethérien algébrique ; en particulier, l'anneau des polynômes $\mathcal{A} = \underline{k}[x]$ est de type noethérien algébrique.

2.9.2 : Si $\underline{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, supposons que pour tout α, A_α est l'anneau $\mathcal{H}(K)$ des germes de fonctions $\underline{k}$-analytiques au voisinage d'un pavé compact K d'un espace $\underline{k}^m$ et choisissons pour Γ_α un sous-ensemble de K. Là encore, les conditions imposées sur les (A_α,Γ_α) sont satisfaites et nous dirons alors que $\mathcal{A}$ est une algèbre de type noethérien analytique. Bien entendu, une algèbre de type noethérien algébrique est à fortiori de type noethérien analytique.

Par exemple, si pour tout m, U_m est un ouvert de $\underline{k}^N$ et P_m une fonction analytique dans U_m, notons P_{m,γ_m} la série de Taylor de P_m en un point $\gamma_m \in U_m$. L'algèbre $\mathcal{A}$ de tous les polynômes à coefficients dans $\underline{k}$ en les P_{m,γ_m}, $m \in \mathbb{N}$ et $\gamma_m \in U_m$, est de type noethérien analytique (c'est évident, car tout ouvert U_m est une réunion dénombrable de pavés compacts).

2.10 : On peut associer canoniquement à une algèbre $\mathcal{A}$ de type noethérien, des algèbres la contenant et qui sont encore de type noethérien. Par exemple, si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\underline{k}[[x]]$, $X = (X_1,\ldots,X_N)$, soit $\overline{\mathcal{A}}$ la sous-algèbre engendré sur $\underline{k}$ par tous les $f \in \underline{k}[[x]]$ pour lesquels il existe $m \in \mathbb{N}$ vérifiant pour $i = 1,\ldots,N$:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_i^m} = Q_i(D^\mu f)_{|\mu|<m}$$

où Q_i est un polynôme à coefficients dans $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est de type noethérien, il en est de même de $\overline{\mathcal{A}}$.

En effet, $\overline{\mathcal{A}}$ est engendré sur $\underline{k}$ par $\bigcup_{m \subset N} \overline{\mathcal{A}_m}$, où $\overline{\mathcal{A}_m}$ est l'ensemble des $f \in \underline{k}[[x]]$ tels que pour $i = 1,\ldots,N$:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_i^m} = Q_i(D^\mu f \;;\; P_{1,\gamma_1},\ldots,P_{m,\gamma_m})_{|\mu| < m}$$

où Q_i est un polynôme de degré $\leqslant m$ à coefficients dans $\underline{k}$ en les $D^\mu f$, $|\mu| < m$ et en les P_{i,γ_i} où $\gamma_i \in \Gamma_i$ (cf 2.9 pour les notations). En décrivant l'égalité précédente, on voit que pour tout $\omega \in \mathbb{N}^n$, $|\omega| > N.m$:

$$D^\omega f = Q_\omega(D^\mu f \;,\; D^{\mu_1} P_{1,\gamma_1},\ldots,D^{\mu_m} P_{m,\gamma_m})_{|\mu| \leqslant N.m}$$

où Q_ω est un polynôme dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction de ceux des Q_i. En particulier, si $|\omega| > N.m$

$$D^\omega f(o) = Q_\omega(D^\mu f(o) \;,\; D^{\mu_1} P_{1,\gamma_1}(o),\ldots,D^{\mu_m} P_{m,\gamma_m}(o))$$

et f est donc paramétré par $\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_m \times \underline{k}^M$, où $\underline{k}^M$ est l'espace des coefficients des Q_i et des $D^\mu f(o)$, $|\mu| \leqslant N.m$. Comme $\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_m \times \underline{k}^M$ est noethérien, le résultat en découle.

On vérifierait de même que, si $\mathcal{A}$ est de type noethérien, sa clôture algébrique dans $\underline{k}[[x]]$ est aussi de type noethérien, en utilisant les résultats de §-10 de [2]. Dans le même ordre d'idées, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.11

Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\underline{k}[[x]]$ de type noethérien, il existe une sous-algèbre $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\underline{k}[[x]]$ de ntype noethérien telle que :

(1) $\widetilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A} \cup \underline{k}[x]$

(2) L'injection canonique $\mathcal{A} \hookrightarrow \underline{k}[[x]]$ est plate.

(3) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\mathfrak{p}.\underline{k}[[x]]$ est un idéal premier de $\underline{k}[[x]]$.

(4) $\widetilde{\mathcal{A}}$ est stable par dérivation et $\widetilde{\mathcal{A}}$ est intégralement close dans $\underline{k}[[x]]$.

(Une telle algèbre $\widetilde{\mathcal{A}}$ sera dite complète de type noethérien. Visiblement, si $\widetilde{\mathcal{A}}$ est complète, $\widetilde{\mathcal{A}}$ est un anneau local régulier de dimension N).

PREUVE

L'algèbre engendré sur $\underline{k}$ par $\mathcal{A}$ et $\underline{k}[x]$ est de type noethérien et donc on peut supposer que $\mathcal{A} \supset \underline{k}[x]$. Il suffit alors de trouver $\widetilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ de type noethérien vérifiant simplement (2) et (3), car si $\mathcal{A}^{(1)}$ est la plus petite algèbre stable par dérivation contenant la clôture algébrique de $\mathcal{A}$ dans $\underline{k}[[x]]$ et si on définit par récurrence $\mathcal{A}^{(m)} = \mathcal{A}^{(m-1)(1)}$, $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^{(m)}$ vérifie (1), (2), (3) et (4).

Pour cela, il suffit de trouver une algèbre $\widetilde{\mathcal{A}}^{(1)} \supseteq \mathcal{A}$ et de type noethérien, telle que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(a) $\forall\ Q_1,\dots,Q_k \in \mathcal{A}$, le module des relations entre $Q_1,\dots,Q_k$ admet des générateurs dont les composantes sont dans $\widetilde{\mathcal{A}}^{(1)}$.

(b) $\forall\ Q_1,\dots,Q_k \in \mathcal{A}$, tout idéal premier minimal contenant $(Q_1,\dots,Q_k).\underline{k}[[x]]$ est engendré par des éléments de $\widetilde{\mathcal{A}}^{(1)}$.

En effet, si cela est vrai et si on définit par récurrence $\tilde{\mathcal{A}}^{(m)} = \tilde{\mathcal{A}}^{(m-1)(1)}$, l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{A}}^{(m)}$ est de type noethérien et vérifie (2) et (3) : d'après (a), l'injection $\tilde{\mathcal{A}} \hookrightarrow \underline{k}[[x]]$ est plate ; si I est un idéal premier de $\tilde{\mathcal{A}}$ engendré par $Q_1,\ldots,Q_k \in \tilde{\mathcal{A}}^{(m)}$, on a $\sqrt{I.\underline{k}[[x]]} = \mathfrak{P}_1.\underline{k}[[x]] \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s.\underline{k}[[x]]$ où les $\mathfrak{P}_i$ sont premiers dans $\tilde{\mathcal{A}}$ et les $\mathfrak{P}_i.\underline{k}[[x]]$ premiers dans $\underline{k}[[x]]$; pour raison de fidèle platitude $I = \sqrt{I} = \mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s$ et I égale l'un des $\mathfrak{P}_j$, c.q.f.d.

Pour trouver $\tilde{\mathcal{A}}^{(1)}$, fixons un $m \in \mathbb{N}$ et considérons tous les $Q_1,\ldots,Q_m \in \underline{k}[[x]]$ tels que chaque Q_i soit un polynôme de degré $\leqslant m$ à coefficients dans $\underline{k}$ en les $P_{1,\gamma_1},\ldots,P_{m,\gamma_m}$ avec $\gamma_1 \in \Gamma_1,\ldots,\gamma_m \in \Gamma_m$. Les idéaux $(Q_1,\ldots,Q_m).\underline{k}[[x]]$ forment une famille noethérienne paramétrée par $\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_m \times \underline{k}^M$ pour un certain M. D'après [ ], le module des relations dans $\underline{k}[[x]]$ entre $Q_1,\ldots,Q_m$ ou les idéaux premiers minimaux contenant $(Q_1,\ldots,Q_m).\underline{k}[[x]]$ forment des familles noethériennes de sous-modules de $\underline{k}[[x]]^m$ et d'idéaux de $\underline{k}[[x]]$ respectivement. L'existence de l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}^{(1)}$ en résulte immédiatement.

<u>2.12</u> : Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\bigcup_q \underline{k}[[x\ ;\ y_j^{\omega}]]_{|\omega| \leqslant q}$, nous dirons que $\mathcal{A}$ est de <u>type noethérien</u> (resp. de type noethérien algébrique, resp. de type noethérien analytique) si $\forall\ q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_q = \mathcal{A} \cap \underline{k}[[x;y_j^{\omega}]]_{|\omega|\leqslant q}$ est de type noethérien (resp. de type noethérien algébrique, resp. de type noethérien analytique). L'algèbre $\mathcal{A}$ est <u>complète de type noethérien</u> s'il en est ainsi de chaque $\mathcal{A}_q$.

THEOREME 2.13

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de type noethérien de $\bigcup_q \underline{k}[[x\ ;\ y_j^{\omega}]]_{|\omega|\leqslant q}$ et soit $\Omega(\mathcal{A})$ l'ensemble des $f \in \underline{k}[[x]]^p$

tels que, $\forall q \in \mathbb{N}$ et $\forall \mathcal{J}$ idéal propre de $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]_{|\omega|\leq q}$ engendré par des éléments de $\mathcal{A}$, $J^q f$ soit quasi-transverse à $\mathcal{S}(\mathcal{J})$.
Alors :

(1) $\Omega(\mathcal{A})$ est dense dans $\underline{k}[[x]]^p$

(2) Si $\underline{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si $\mathcal{A}$ est de type noethérien analytique, $\Omega(\mathcal{A})$ est fortement dense dans $\underline{k}[[x]]^p$.

PREUVE

Fixons q ; comme $\mathcal{A}_q$ est une sous-algèbre de type noethérien de $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]_{|\omega|\leq q}$, il existe d'après 2.9 des $(A_\alpha, \Gamma_\alpha)$ et $P_\alpha \in A_\alpha[[x\ ;\ y_j^\omega]]_{|\omega|\leq q}$ tels que $\mathcal{A}_q$ soit engendrée par des polynômes à coefficients dans $\underline{k}$ en les P_{α,γ_α}, $\gamma_\alpha \in \Gamma_\alpha$. Fixons $m \in \mathbb{N}$ et considérons un polynôme Q_j à coefficients dans $\underline{k}$ et de degré $\leq m$ en les variables $P_{1,\gamma_1}, \dots, P_{m,\gamma_m}$. Un tel système est paramétré par $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_m \times \underline{k}^M$ où M est la dimension sur $\underline{k}$ de l'espace des coefficients des Q_j. Si $\Gamma_1 \times \dots \Gamma_m$ est noethérien, on sait que $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_m \times \underline{k}^M$ est noethérien. Si $\mathcal{J}(\gamma_1, \dots, \gamma_m\ ;\ \xi)$ est l'idéal engendré par $Q_1, \dots, Q_m$ dans $\underline{k}[[x\ ;\ y_j^\omega]]_{|\omega|\leq q}$ (ξ désigne le paramètre de $\underline{k}^N$), on voit d'après 2.7 que l'ensemble $\Omega_{q,m}$ des $f \in \underline{k}[[x]]^p$ tels que $J^q f$ soit quasi-transverse à tous les $\mathcal{S}(\mathcal{J}(\gamma_1, \dots, \gamma_m\ ;\ \xi))$ contient un ouvert dense de $\underline{k}[[x]]^p$. Mais $\Omega(\mathcal{A}) = \bigcap_{q,m} \Omega_{q,m}$ et $\Omega(\mathcal{A})$ contenant une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

(2) Dans ce cas, $\Omega_{q,m}$ contient un ouvert dense pour la topologie forte et donc $\Omega(\mathcal{A})$ est fortement dense dans $\underline{k}[[x]]^p$.

3 - APPLICATIONS

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre complète de type noethérien de

$\mathcal{B} = \bigcup\limits_{q} \underline{k}[[x ; y_j^{\omega}]]_{|\omega|\leqslant q}$; l'injection canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est donc fidèlement plate. Si $f \in \underline{k}[[x]]^p$, f définit à l'aide des $J^q f$ un morphisme de $\mathcal{B}$ dans $\underline{k}[[x]]$ et munit $\underline{k}[[x]]$ d'une structure de module sur $\mathcal{B}$ et de module sur $\mathcal{A}$. On posera alors, si M est un module sur $\mathcal{A}$, $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{A}}(M,\underline{k}[[x]]) = \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{B}}(M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}, \underline{k}[[x]]) = \mathrm{Tor}_i^{f}(M , \underline{k}[[x]])$.

LEMME 3.1

Avec les hypothèses et notations précédentes, soit $f \in \underline{k}[[x]]^p$ tel que, $\forall q \in \mathbb{N}$ et $\forall \mathcal{J}$ idéal propre de $\underline{k}[[x ; y_j^{\omega}]]_{|\omega|\leqslant q}$ engendré par des éléments de $\mathcal{A}$, $J^q f$ soit quasi-ransverse à $\mathcal{S}(\mathcal{J})$. Alors pour tout module de présentation finie M sur $\mathcal{A}$ et tout $i \geqslant 1$, $\mathrm{Tor}_i^{f}(M , \underline{k}[[x]])$ est un $\underline{k}$-espace vectoriel de dimension finie.

PREUVE

Soient $P_1,\ldots,P_k \in \mathcal{A}_q$ tels que la hauteur de l'idéal engendré par $(P_1,\ldots,P_k)$ soit égale à k (intersection complète). Comme $J^q f$ est quasi-transverse à l'idéal engendré par $P_1,\ldots,P_k$ dans $\underline{k}[[x ; y_j^{\omega}]]_{|\omega|\leqslant q}$, la hauteur de l'idéal engendré par $(J^q f)^* P_1,\ldots, (J^q f)^* P_k$ dans $\underline{k}[[x]]$ est égale à k si $k \leqslant n$ et $\geqslant n$ si $k \geqslant n$. Dans le premier cas, on a une structure complète ; dans le second cas, l'idéal engendré par $(J^q f)^* P_1,\ldots,(J^q f)^* P_k$ dans $\underline{k}[[x]]$ contient une puissance de l'idéal maximal. Dans les deux cas, les $\mathrm{Tor}_i^{f}(\mathcal{A}/ (P_1,\ldots,P_k) , \underline{k}[[x]])$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\underline{k}$. La démonstration du lemme pour les intersections complètes entraîne le résultat général d'après [ ], Ch. I, théorème 6.13 et remarque 6.14.

COROLLAIRE 3.2

Avec les notations de 2.12, pour tout $f \in \Omega(\mathcal{A})$ ($\mathcal{A}$ complète de type noethérien), tout module de présentation finie M sur $\mathcal{A}$, tout $i \geqslant 1$, $\mathrm{Tor}_i^f(M\ ,\ \underline{k}[[x]])$ est un $\underline{k}$-espace vectoriel de dimension finie.

3.3 : Nous supposons désormais $\underline{k} = \mathbb{R}$. Soient $\mathcal{E}_n$ l'anneau des germes de fonctions réelles C^∞ à l'origine de $\mathbb{R}^n$; $\tilde{\mathcal{F}}_n$ l'anneau des germes de champs de séries formelles, à coefficients réels et en n variables, à l'origine de $\mathbb{R}^n$. On a une injection canonique $i : \mathcal{E}_n \to \tilde{\mathcal{F}}_n$ associant à chaque germe $\varphi \in \mathcal{E}_n$ le champ de ses séries de Taylor au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. Rappelons qu'un sous-module de type fini N de $\mathcal{E}_n^r$ est fermé s'il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine de $\mathbb{R}^n$, un sous-module fermé de type fini $N(\Omega)$ de $\mathcal{E}(\Omega)^r$ ($\mathcal{E}(\Omega)$ désigne l'anneau des fonctions réelles C^∞ sur Ω, muni de sa topologie habituelle) tels que $N(\Omega)$ induise N à l'origine. Cela signifie encore, d'après le théorème spectral de Whitney, que $N = N.\tilde{\mathcal{F}}_n \cap \mathcal{E}_n^r$. Enfin, posons $\mathcal{F}_n = \mathbb{R}[[x]]$ et si $f \in \mathcal{E}_n^p$, notons $\hat{f} \in \mathcal{F}_n^p$ la série de Taylor de f à l'origine de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $\mathcal{A}_c$ est une sous-algèbre complète de type noethérien de $\mathcal{B}_c = \bigcup_q \mathbb{R}\{x\ ;\ y_j^\omega\}_{|\omega|\leqslant q}$ ($\mathbb{R}\{x\}$ désigne comme d'habitude l'anneau des séries convergentes) ; l'injection canonique $\mathcal{A}_c \to \mathcal{B}_c$ est donc fidèlement plate. Si $f \in \mathcal{E}_n^p$, f définit à l'aide des $J^q f$ un morphisme de $\mathcal{B}_c$ dans $\mathcal{E}_n$ et munit tout module $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{E}_n$ d'une structure de module sur $\mathcal{B}_c$ et de module sur $\mathcal{A}_c$. On posera alors, si M est un module sur $\mathcal{A}_c$, $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{A}_c}(M\ ,\mathcal{M}) = \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{B}_c}(M \otimes_{\mathcal{A}_c} \mathcal{B}_c\ ,\mathcal{M}) = \mathrm{Tor}_i^f(M\ ,\mathcal{M})$. Pour la démonstration de la proposition suivante, nous renvoyons à [1], Ch. VIII, §-1 :

PROPOSITION 3.4

Avec les hypopthèses et notationsprécédentes, soit $f \in \mathcal{E}_n^p$ telle que, $\forall\ q \in \mathbb{N}$ et $\forall\ \mathcal{I}$ idéal propre de $\mathbb{R}[[x\ ;\ y_j^\omega]]_{|\omega|\leqslant q}$ engendré par des éléments de $\mathcal{A}_c$, $\widehat{J^q f}$ soit quasi-transverse à $\mathcal{G}(\mathcal{I})$. Alors pour tout module de présentation finie M sur $\mathcal{A}_c$ et tout $i \geqslant 1$:

(1) Les applications canoniques : $\mathrm{Tor}_i^f(M,\mathcal{E}_n) \to \mathrm{Tor}_i^f(M,\widetilde{\mathcal{F}}_n) \to \mathrm{Tor}_i^f(M,\mathcal{F}_n)$ sont des isomorphismes et chacun de ces modules est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

(2) $\mathrm{Tor}_i^f(M,\widetilde{\mathcal{F}}_n/\mathcal{E}_n) = 0$

(3) Le module $M \otimes_f \mathcal{E}_n$ est un module de Fréchet, i.e. $M \otimes_f \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^r / N$, N étant un sous-module fermé de type fini de $\mathcal{E}_n^r$.

COROLLAIRE 3.5

D'après 2.12, il existe un sous-ensemble dense $\Omega(\mathcal{A}_c)$ de $\mathcal{F}_n^p$ (fortement dense, si $\mathcal{A}_c$ est de type noethérien analytique) tel que $\forall\, f \in \mathcal{E}_n^p$ vérifiant $\hat{f} \in \Omega(\mathcal{A}_c)$, les conclusions de 3.4 soient satisfaites.

<u>3.6</u> : On déduit de la proposition précédente et de son corollaire l'existence de sous-algèbres de $\mathcal{E}_n$ vérifiant des propriétés remarquables. Avec les notations précédentes, soit $f \in \mathcal{E}_n^p$ telle que $\hat{f} \in \Omega(\mathcal{A}_c)$. Notons $f^*(\mathcal{A}_c)$ l'image de $\mathcal{A}_c$ dans $\mathcal{E}_n$ par l'application déduite de f de $\mathcal{A}_c$ dans $\mathcal{E}_n$; $f^*\mathcal{A}_c$ est une sous-algèbre de $\mathcal{E}_n$ et nous notons $\widehat{f^*\mathcal{A}_c} = \hat{f}^*\mathcal{A}_c$ son algèbre de séries formelles à l'origine. L'algèbre $f^*\mathcal{A}_c$ possède les propriétés suivantes :

- $f^*\mathcal{A}_c$ et $\widehat{f^*\mathcal{A}_c}$ contiennent $\mathbb{R}[x]$, car $\mathcal{A}_c$ contient tous les polynômes en x et y_j^{ω}.

- $f^*\mathcal{A}_c$ et $\widehat{f^*\mathcal{A}_c}$ sont stables par dérivation, car $\mathcal{A}_c$ est stable par dérivation et il suffit d'appliquer les formules 2.1.

- Les applications $f^* : \mathcal{A}_c \to f^*\mathcal{A}_c$, $f^*\mathcal{A}_c \to \widehat{f^*\mathcal{A}_c}$ sont des isomorphismes, car les conditions de transversalité impliquent que f^* et injective.

- Si N est un sous-module de type fini de $(f^*\mathcal{A}_c)^r$, le module engendré par N dans $\mathcal{E}_n^r$ est fermé.

4 - LE THEOREME GLOBAL

4.1 : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in C^\infty(U,V)$ et si $x_o \in U$, posons $y_o = f(x_o)$ et soit $\hat{f}_{x_o}$ la série formelle de f en x_o ; $\hat{f}_{x_o}$ s'interprête comme un morphisme formel : $(\mathbb{R}^n, x_o) \to (\mathbb{R}^p, y_o)$ et $\hat{f}_{x_o}$ se prolonge en un morphisme $J^q\hat{f}_{x_o} : (\mathbb{R}^n, x_o) \to (J^q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p), J^q f(x_o))$; ainsi $(J^q\hat{f}_{x_o})^*$ est l'homomorphisme de $\mathbb{R}[[x\ ;\ y_j^\omega]]_{|\omega|\leqslant q}$, dans $\mathbb{R}[[x]]$ qui envoie x_i sur x_i et y_j^ω sur $D^\omega f_j(x) - D^\omega f_j(x_o)$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\underset{q}{\cup}\, \mathbb{R}[[x\ ;\ y_j^\omega]]_{|\omega|\leqslant q}$, de type noethérien analytique. Le théorème suivant est l'analogue global de 2.13 :

THEOREME 4.2

Avec les notations précédentes, soit $\Omega(\mathcal{A})$ l'ensemble des $f \in C^\infty(U,V)$ tels que, $\forall\ x \in U$, $\forall\ q \in \mathbb{N}$ et $\forall\ \mathfrak{I}$ idéal propre de $\mathbb{R}[[x\ ;\ y_j^\omega]]_{|\omega|\leqslant q}$ engendré par des éléments de $\mathcal{A}$, $J^q\,\hat{f}_{x_o}$ soit quasi-transverse à $\mathcal{S}(\mathfrak{I})$. Alors $\Omega(\mathcal{A})$ contient une intersection dénombrable d'ouverts denses de $C^\infty(U,V)$ muni de la topologie fine et donc est dense dans $C^\infty(U,V)$ muni de cette topologie.

PREUVE

Procédant comme dans la démonstration du théorème 2.13, on remarque que $\Omega(\mathcal{A}) = \underset{q,m}{\cap} \Omega_{q,m}$ où $\Omega_{q,m}$ est l'ensemble des $f \in C^\infty(U,V)$ tels que, $\forall\ x \in U$ et $\forall\ \mathfrak{I}$ idéal d'une famille noethérienne d'idéaux de $\mathbb{R}[[x\ ;\ y_j^\omega]]_{|\omega|\leqslant q}$, $J^q\,\hat{f}_x$ soit quasi-transverse à $\mathcal{S}(\mathfrak{I})$. D'après 2.7, il existe un $q' \geqslant q$ tel que $f \in \Omega_{q,m}$ si l'image de $J^{q'}f : U \to J^{q'}(U,V)$ ne rencontre pas une réunion au plus dénombrable de sous-variétés analytiques de $J^{q'}(U,V)$ de co-dimensions > n. D'après le théorème de transversalité de Thom, $\Omega_{q,m}$ contient une intersection dénombrable d'ouverts partout denses et il en est de même de $\Omega(\mathcal{A})$.

4.3 : Si S est une sous-variété analytique localement fermé de $J^q(U,V)$, disons que $f \in C^\infty(U,V)$ est quasi-transverse à S. Si $\forall\, x \in U$, ou bien $J^q f(x) \notin S$, ou si $J^q f(x) \in S$, $J^q \hat{f}_x$ est quasi-transverse à l'idéal de $\underline{k}[[x\, ;\, y_j^\omega]]_{|\omega|\leqslant q}$ engendré par les germes de fonctions analytiques qui s'annulent sur S au voisinage de $J^q f(x)$ dans $J^q(U,V)$. Visiblement, si f est quasi-transverse à S, il existe un sous-ensemble discret D de U tel que $f/(U\backslash D)$ soit transverse à S.

Par exemple, disons qu'une fonction analytique réelle dans un ouvert de $\mathbb{R}^N$ (paramétré par X) est quasi-algébrique s'il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $R[x]\,[D^\omega f]_{\omega\in\mathbb{N}^n} \subset \mathbb{R}[x]\,[D^\omega f]_{|\omega|\leqslant m}$; disons aussi qu'une sous-variété analytique de $J^q(U,V)$ est quasi-algébrique si elle est localement l'ensemble des zéros d'un nombre fini de fonctions quasi-algébriques. Le théorème 4.2 entraîne alors que l'ensemble des $f \in C^\infty(U,V)$ qui sont quasi-transverses à toutes les sous-variétés quasi-algébriques de $J^q(U,V)$, q décrivant $\mathbb{N}$, est dense dans $C^\infty(U,V)$ muni de la topologie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] : J.Cl. TOUGERON : "Idéaux de fonctions différentiables". Ergebnisse der Mathematik, 71 (1972).

[2] : J.Cl. TOUGERON - A. EL KHADIRI : "Familles noethériennes de modules sur $\underline{k}[[x]]$ et applications". Preprint, Rennes (1984).