XUE PING WANG

Opérateurs de temps-retard dans la théorie de la diffusion

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 230-240
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___3_230_0>

CHAPITRE VII

<u>OPERATEURS DE TEMPS-RETARD DANS LA THEORIE DE LA DIFFUSION</u>

WANG Xue Ping

Université de Nantes

UER Mathématiques & Informatique

2, Chemin de la Houssinière

44 072 - NANTES CEDEX - FRANCE

OPERATEURS DE TEMPS-RETARD DANS LA THEORIE DE LA DIFFUSION

I - INTRODUCTION

Considérons l'opérateur de Schrödinger $H^h = H_o^h + V_h$, où $H_o^h = -\frac{h}{2}\Delta$ et $V_h(x) = V(h^{\frac{1}{2}}x)$, V étant un potentiel réel C_o^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et h un paramètre positif proportionnel à la constante de Planck. Désignons par $U_o^h(t)$ et $U^h(t)$ le groupe unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ engendré par H_o^h et H^h respectivement : $U_o^h(t) = \exp(-i\, h^{-1}\, t\, H_o^h)$, $U^h(t) = \exp(-i\, h^{-1}\, t\, H^h)$, $t \in \mathbb{R}$.

Alors il est bien connu que les opérateurs d'onde $\Omega_\pm(h)$ définis par :

$$\Omega_\pm(h) = S - \lim_{t\to\pm\infty} U^h(t)^* U_o^h(t) \qquad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^n)$$

existent et sont complets, c'est à dire que l'image de $\Omega_+(h)$ et $\Omega_-(h)$ sont tous égaux au sous-espace spectral continu pour H^h dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'opérateur de diffusion $S(h)$: $S(h) = \Omega_+(h)^{-1}\ \Omega_-(h)$, est un opérateur unitaire qui commute avec $U_o^h(t)$. Donc si l'on désigne par $F_h : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}_+ ; \mathcal{P})$, $\mathcal{P} = L^2(S^{n-1})$, une représentation spectrale pour H_o^h :

$$(F_h\ H_o^h\ F_h^{-1}\ f)(\lambda) = \lambda\ f(\lambda) \quad , \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+ ; \mathcal{P})$$

On a alors : $(F_h\ S(h)\ F_h^{-1}\ f)(\lambda) = S(\lambda,h)\ f(\lambda)$, où $S(\lambda,h)$ est une multiplication en λ à valeurs dans $\mathcal{B}(\mathcal{P})$. Sous les hypothèses ci-dessus sur V, $S(\lambda,h)$ est C^∞ en $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Alors l'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner $T(h)$ est défini par :

$$(1.1) \qquad (F_h\ T(h)\ F_h^{-1}\ f)(\lambda) = -i\ S(\lambda,h)^*\ \frac{dS}{d\lambda}(\lambda,h)\ f(\lambda)$$

pour $f \in C_o(\mathbb{R}_+ ; \mathcal{P})$. $T(h)$ est un opérateur essentiellement auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour de divers aspects concernant l'opérateur de temps-retard, on renvoie à Jensen [1], Martin [2], Narnhofer [3], [4].

Pour motiver notre travail, rappelons aussi la notion du temps-retard dans la diffusion de particules classiques : on note par $\{x(t),\xi(t)\}$ la solution du problème

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = \xi(t) & x(o) = x_o \\ \dot{\xi}(t) = -\nabla V(x(t)) & \xi(o) = \xi_o \end{cases}$$

On suppose que $\lim_{|t|\to+\infty} |x(t)| = +\infty$. Soit $R > 0$ tel que supp $V \subset B_R = \{|x| < R\}$ et $|x_o| < R$. Désignons par $-t_-(t_+)$ le temps auquel la particule entre (quitte) la boule B_R. Posons $x_- = x(-t_-)$, $\xi_- = \xi(-t_-)$; $x_+ = x(t_+)$, $\xi_+ = \xi(t_+)$. La durée de séjour de la trajectoire $\{x(t),\xi(t)\}$ dans la boule B_R est donnée par T_R :

$$T_R = t_- + t_+$$

En termes des paramètres de la trajectoire, on peut écrire :

$$T_R = \left(\frac{\tilde{x}_-.\xi_-}{|\xi_-|^2} - \frac{\tilde{x}_+.\xi_+}{|\xi_+|^2}\right) + \left(\frac{x_+.\xi_+}{|\xi_+|^2} - \frac{x_-.\xi_-}{|\xi_-|^2}\right)$$

On remarque que $|\xi_-|^2 = |\xi_+|^2 = 2\left(\frac{|\xi_o|^2}{2} + V(x_o)\right)$. Pour la trajectoire libre passant par (x_-,ξ_-), la durée de séjour T_R^o dans B_R est donnée par :

$$T_R^o = -2\,\xi_- \,.\, x_-/|\xi_-|^2$$

Le temps-retard τ pour la trajectoire $(x(t)\ ,\ \xi(t))$ est défini comme la limite de la différence de la durée de séjour $T_R - T_R^o$ lorsque R tend vers $+\infty$: $\tau = \lim_{R\to+\infty} T_R - T_R^o$. Comme on a $\lim_{R\to+\infty} (x_+ \,.\, \xi_+ + x_- \,.\, \xi_-) = 0$, on a aussi l'expression :

$$(1.3) \qquad \tau = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{|\xi_-|^2} \left(\tilde{x}(-t) \,.\, \xi(-t) - \tilde{x}(t) \,.\, \xi(t)\right)$$

où $\tilde{x}(t) = x(t) - t\xi(t)$. Si l'on note par $\phi^t(x_o,\xi_o)$ la solution de (1.2) et par $\phi_o^t(x_o,\xi_o)$ la solution correspondant à l'hamiltonien libre $p(x_o,\xi_o) = |\xi_o|^2/2 + V(x_o)$, $d(\chi,\xi) = x.\xi$, alors on a :

$$(1.3)' \qquad \tau(x_o,\xi_o) = (2p(x_o,\xi_o))^{-1}\left(\lim_{t\to-\infty} d \circ \phi_o^{-t} \circ \phi^t(x_o,\xi_o) - \lim_{t\to+\infty} d \circ \phi_o^{-t} \circ \phi^t(x_o,\xi_o)\right)$$

lorsque la limite au deuxième membre de (1.3)' existe.

Vu ces deux notions de temps-retard dans la théorie de diffusion, on peut se demander quelle est la liaison entre le temps-retard classique et le temps-retard quantique. Dans ce travail, on se propose de retrouver le temps-retard classique à partir de l'opérateur de temps-retard quantique.

II - APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE DES OPERATEURS DE TEMPS-RETARD QUANTIQUE

Il est intéressant de rappeler une autre définition de temps-retard quantique due à Narnhofer [3]. On note par A(h) l'opérateur de symbole de Weyl $d(x,\xi)$: $A(h) = d^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D)$. Par analogie avec le temps-retard classique, Narnhofer [3] a défini l'opérateur de temps-retard quantique $\tilde{T}(h)$ par :

$$(2.1) \qquad \langle f, H^h \tilde{T}(h) g\rangle = \lim_{t\to-\infty} \langle f, U^h(t)^* U_o^h(t)\, A(h)\, U_o^h(t)^* U^h(t) g\rangle - \lim_{t\to+\infty} \langle f, U^h(t)^* U_o^h(t)\, A(h)\, U_o^h(t)^* U^h(t) g\rangle$$

pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ lorsque la limite existe. On peut montrer que pour $f, g \in \mathcal{D}(A(h))$ tels que $\chi(H^h)f = f$, $\chi(H^h)g = g$ pour certaine $\chi \in C_o^\infty(\mathbb{R}_+)$, (2.1) est bien défini. On appellera $\tilde{T}(h)$ l'opérateur de temps-retard modifié.

Supposons que V soit à support compact et qu'il existe un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ tel que

(N) pour tout intervalle compact $I \subset J$ et tout $R > 0$, il existe $C, t_o > 0$ tels que

$$|x(t;y,\eta)| \geq C|t| \qquad \text{pour } |t| \geq t_o \ , \ (y,\eta) \in p^{-1}(I), \ |y| \leq R$$

où $(x(t;y,\eta), \xi(t;y,\eta))$ est la solution de (1.2) avec données initiales (y,η).

Introduisons une classe de symboles $T^{s,r}_{\rho,\delta}$, où $s,r \in \mathbb{R}$ et $\rho,\delta \in [0,1]$

$T^{s,r}_{\rho,\delta}$ ont pour éléments des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|)^{s+\rho|\beta|}(1+|\xi|)^{r+\delta|\alpha|} \qquad \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n.$$

Posons : $T^s = \bigcap_{r\in\mathbb{R}} T^{s,r}_{\rho,\delta}$. On munit $T^{s,r}_{\rho,\delta}$ de la famille de semi-normes naturelles. Pour $a \in T^{s,r}_{\rho,\delta}$, on définit un opérateur $a^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D_x) : \mathcal{S} \to C^\infty$ par :

$$(a^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D)f)(x) = \iint_{\mathbb{R}^n} \exp(i(x-y).\xi)a(h^{\frac{1}{2}}(x+y)/2,h^{\frac{1}{2}}\xi)f(y)dy\ \xi$$

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Pour $\rho,\delta \in [0,1[$, $a^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D)$ est un opérateur continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour $\rho = 1$, $\delta \in [0,1[$, $a^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D)$ est un opérateur continu de $\mathcal{S}$ dans $B^{(s)}$, où $B^{(s)}$ est l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant : $|\partial_x^\alpha b(x)| \leqslant C_\alpha(1+|x|)^s$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$, muni de la famille de semi-normes naturelles.

THEOREME 1

Sous les conditions ci-dessus, soient χ et χ_1 fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec support compact dans J tel que $\chi_1 = 1$ sur supp χ. Alors $\tilde{T}(h)$ admet un développement semi-classique en termes d'opérateurs pseudo-différentiels :

$$H^h\tilde{T}(h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j\ p_j^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D)$$

où $p_j \in T^1_1$, $j \geqslant 0$, au sens que pour tout $\mu > 1/2$, $N \geqslant 0$

$$||(A(h)^2+1)^{-\mu}\chi(H^h)(H^h\tilde{T}(h) - \sum_{j\geqslant 0}^{N} h^j p_j^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D))\chi(H^h)(A(h)^2+1)^{-\mu}||_{\mathcal{L}(L^2)}$$

$$\leqslant C_N h^{N+1}$$

En particulier :

$$||(A(h)^2+1)^{-\mu}\chi(H^h)p_j^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D)\chi(H^h)(A(h)^2+1)^{-\mu}||_{\mathcal{L}(L^2)} < +\infty$$

pour $j = 0,1,2,\ldots$ On a $p_o = (2p\chi_1 op)\tau$, τ étant la fonction de temps-retard classique.

Remarquons que dans le théorème 1, les symboles p_j dépendent de la fonction χ_1. Comme H^h admet p comme symbole, le théorème 1 montre que $\tilde{T}(h)$ peut être considéré comme une quantification de la fonction 2τ.

Soient $(\chi_o,\xi_o) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $p(x_o,\xi_o) \in J$, χ est une fonction $C_o^\infty(J)$ telle que $\chi \circ p(x_o,\xi_o) = 1$. Posons $W_h(x_o,\xi_o) = \exp(+ih^{-\frac{1}{2}}(x.\xi_o - x_o.D_x))$. Alors on a :

THEOREME 2

Pour $f,g \in \mathcal{D}(A(h))$, définissons f_h, g_h par :

$$f_h = \chi(H^h)W_h(x_o,\xi_o)f \;.\; g_h = \chi(H^h)W_h(x_o,\xi_o)g.$$

Alors on a $\lim\limits_{h\to o_+} \langle f_h, \tilde{T}(h)g_h\rangle = 2\tau(x_o,\xi_o)\,\langle f,g\rangle$

Pour l'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner, on a le résultat suivant :

THEOREME 3

Sous les conditions ci-dessus, soient $(x_o,\xi_o) \in \mathbb{R}^{2n}$, $|\xi_o|^2/2 \in J$, $\chi \in C_o^\infty(J)$ avec $\chi(|\xi_o|^2/2) = 1$. Pour $f,g \in \mathcal{D}(A(h))$, on pose

$$f_h = \chi(H_o^h)W_h(x_o,\xi_o)f \;,\; g_h = \chi(H_o^h)W_h(x_o,\xi_o)g$$

Alors on a :

$$\lim_{h\to o_+} \langle f_h, T(h)g_h\rangle = \tau \circ \Omega_-^{cl}(x_o,\xi_o) \langle f,g\rangle$$

où Ω_-^{cl} est l'opérateur d'onde classique entrant défini sur $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n\backslash\{0\}$

par

$$\Omega_-^{cl}(x,\xi) = \lim_{t\to-\infty} \phi^{-t} \circ \phi_o^t(x,\xi)$$

Les théorèmes 2 et 3 montrent la différence entre l'opérateur de temps-retard modifié et l'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner. L'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner étant la quantification de la fonction de temps-retard appliqué aux données entrantes.

III - ESTIMATION UNIFORME SUR LA DECROISSANCE DE $U^h(t)$

Le résultat suivant est à la base de l'étude semi-classique des opérateurs de temps-retard :

THEOREME 4

Soit V un potentiel à courte portée :

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leqslant C_\alpha(1+(x))^{-1-|\alpha|-\varepsilon} \qquad \varepsilon > 0.$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Sous la condition (N), pour $\chi \in C_o^\infty(J)$, on a :

$$(3.1) \qquad ||(A(h)^2+1)^{-\mu/2}\chi(H^h)U^h(t)(A(h)^2+1)^{-\mu/2}||_{\mathcal{L}(L^2)} \leqslant C_\mu(1+(t))^{-\mu} \quad ,0\leqslant\mu\leqslant 1$$

pour $1 < \mu \leqslant 2$, il existe $\rho > 1$ tel que :

$$(3.2) \qquad ||(A(h)^2+1)^{-\mu/2}\chi(H^h)U^h(t)(A(h)^2+1)^{-\mu/2}||_{\mathcal{L}(L^2)} \leqslant C_\mu(1+(t))^{-\rho}$$

Soit $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}_+)$. Posons $U^h(r,s) = U_o^h(r)^* U^h(s)$. On a alors :

$$(3.3) \qquad \|(A(h)^2+1)^{-\mu/2}\zeta(H_o^h)U^h(r,s)\chi(H^h)(A(h)^2+1)^{-\mu/2}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_\mu(1+|r-s|)^{-\mu}, \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

Pour $1 < \mu \leq 2$, il existe $\rho > 1$ tel que :

$$(3.4) \qquad \|A(h)^2+1)^{-\mu/2}\zeta(H_o^h)U^h(r,s)\chi(H^h)(A(h)^2+1)^{-\mu/2}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_\mu(1+|r-s|)^{-\rho}.$$

(3.1) ... (3.4) sont uniformes par rapport à $h \in]0,1]$.

Pour démontrer le théorème 4, on utilise la borne semi-classique pour la résolvante de l'opérateur H^h(voir Robert-Tamura [6]). On renvoie à [7] pour les détails de la démonstration.

Notons que pour $h \in]0,1]$ fixé, les estimations (3.1) ... (3.4) sont encore vraies en remplaçant $\chi \in C_o^\infty(J)$ par $\chi \in C_o^\infty(\mathbb{R}_+)$. Alors on peut déduire la complétude asymptotique des opérateurs d'ordre $\Omega_\pm(h)$ pour le potentiel à courte portée. En fait, alors (3.2) entraîne que $s - \lim_{t\to\pm\infty} U_o^h(t)^* \, U^h(t)\, \chi(H^h)$ existe dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\chi \in C_o^\infty(\mathbb{R}_+)$. Cela entraîne que Im $\Omega_\pm(h)$ est égal au sous-espace spectral continu pour H^h.

Maintenant on est en mesure d'esquisser la démonstration des résultats. On renvoie à Wang [7] pour les détails. L'idée essentielle se résume dans la remarque suivante : en général, on peut approcher la solution de l'équation de Schrödinger :

$$ih\,\frac{\partial U^h}{\partial t}(t) = H^h\, U^h(t) \qquad , \qquad U^h(o) = I$$

pour des opérateurs intégraux de Fourier, par contre pour la solution de l'équation de Heisenberg :

$$ih \frac{\partial F^h}{\partial t}(t) = [F^h(t) , H^h] \quad , \quad F^h(o) = b^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D_x)$$

On peut l'approcher pour des opérateurs pseudo-différentiels (voir [8]). En conséquence, si l'on note : $\Omega(t,h) = U^h(t)^* U_o^h(t) A(h) U_o^h(t)^* U^h(t)$, sous les conditions du théorème 1, on peut montrer que $\Omega(t,h)\chi_1(h^h)$ admet un développement semi-classique :

$\forall\, N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Omega(t,h)\chi_1(H^h) = \sum_{j=o}^{N} h^j\, p_j^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D, t) + h^{N+1} R_N(h;t)$$

Utilisant le théorème 4, on a pour tout $s > 1/2$

$$||(A(h)^2+1)^{-s}\chi(H^h)R_N(t,h)\chi(H^h)(A(h)^2+1)^{-s}||_{\mathcal{L}(L^2)} \leqslant C < +\infty$$

uniformément en $t \in \mathbb{R}$ et $h \in]0,1]$. Pour les $p_j(t)$, on a :

<u>LEMME 1</u>

Pour tout $j \geqslant 0$, $p_{j,\pm} = \lim\limits_{t\to\pm\infty} p_j(t)$ existe dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Les $p_{j,\pm}$ sont dans la classe T_1^1 , c'est à dire

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_{j,\pm}(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta,N}(1+(x))^{1+|\beta|}(1+|\xi|)^{-N}$$

pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$ et $N > 0$.

D'après le lemme 1, on obtient :

$$||(A(h)^2+1)^{-s}\chi(H^h)(H^h\tilde{T}(h) - \sum_{j=o}^{N} h^j p_j^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D))\chi(H^h)(A(h)^2+1)^{-s}||$$

$$\leqslant C_N\, h^{N+1} \quad , \quad s > 1/2$$

où $p_j = p_{j,-} - p_{j,+}$. Cela montre le théorème 1. Le théorème 2 est une conséquence du théorème 1. Le théorème 3 se démontre de la même manière (voir [7]).

REFERENCES

[1] - A. JENSEN : "Time-delay in potential scattering thoery, some "geometry" results". Comm. Math. Phys. 82 (1981), 435-456.

[2] - Ph. MARTIN : "Time-delay of quantum scattering processus". Acta Physica Austriaca Suppl. 23 (1981), 157-208.

[3] - H. NARNHOFER : "Another definition for time-delay". Phys. Rev., D 22 (1980), 2387-2390.

[4] - H. NARNHOFER : "Time-delay and dilation properties in scattering theory". J. Math. Phys. 25 (1984), 987-991.

[5] - D. ROBERT - H. TAMURA : "Semi-classical bounds for resolvents of Schrödinger operators and asymptotics for scattering phase". Comm. P.D.E., 9 (10) (1984), 1017-1058.

[6] - D. ROBERT - H. TAMURA : "Semi-classical asymptotic for spectral function of Schrödinger operators and applications to scattering problems". In preparation.

[7] - X.P. WANG : "Etude semi-classique d'observables quantiques". Thèse, Nantes, Mars 1984.

[8] - X.P. WANG : "Time-delay operators in semi-classical limit, I finite range potentials". A paraître.