XUE PING WANG

Approximation semi-classique de l'équation de Heisenberg

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 241-260
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___3_241_0>

CHAPITRE VIII

APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE DE L'EQUATION DE HEISENBERG

WANG Xue Ping

Université de Nantes

UER Mathématiques & Informatique

2, Chemin de la Houssinière

44 072 - NANTES CEDEX - FRANCE

1 - INTRODUCTION

Il est bien connu qu'il existe une équivalence physique entre la représentation de Schrödinger et la représentation de Heisenberg. Soient H un hamiltonien quantique et u(t) la fonction d'onde représentant l'état d'une particule à l'instant t. Dans le modèle de Schrödinger, u(t) vérifie l'équation de mouvement :

$$(1.1) \qquad ih \frac{d}{dt} u(t) = H\, u(t) \quad , \quad u(o) = u_o$$

tandis que dans la représentation de Heisenberg, l'évolution quantique G(t) d'un observable quantique G_o doit satisfaire

$$(1.2) \qquad ih \frac{d}{dt} G(t) = [G(t),H] \quad , \quad G(o) = G_o$$

Si l'on note pour L un opérateur dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\langle L\rangle_\varphi = \langle\varphi, L\varphi\rangle$, où $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $(.,.)$ est le produit scalaire, on a alors au moins formellement :

$$\langle G(t)\rangle_{u_o} = \langle G_o\rangle_{u(t)}$$

Cela montre qu'il y a une équivalence entre (1.1) et (1.2). Mais il ne s'agit pas d'une équivalence mathématique. En fait la solution fondamentale de (1.1) peut être approchée par des opérateurs intégraux de Fourier sous certaines conditions de régularité (voir [1], [2] et [11]). Dans cet article on va montrer que la solution de (1.2) peut être approchée par des opérateurs pseudo-différentiels. Donc au niveau d'approximation semi-classique, (1.2) est plus facilement à étudier.

Supposons que a(t), $t \in]-T,T[$, soit une famille de symboles sur R^{2n}, qui vérifie les estimations

$$(1.3) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi,t)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|x|+|\xi|)^{(2-|\alpha|-|\beta|)_+} \quad , \quad t \in]-T,T[$$

et $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi,t)$ est continue en $t \in]-T,T[$. On note par $a^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D,t)$ l'opérateur pseudo-différentiel associé par le formalisme de Weyl :

$$(1.4) \qquad (a^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D,t)f)(x) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \exp(i(x-y).\xi)a(h^{\frac{1}{2}}(x+y)/2,h^{\frac{1}{2}}\xi t)f(y)dy\,d\!\!{}^-\xi \ , \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

où $d\!\!{}^-\xi = (2\Pi)^{-n}d\xi$ et $h > 0$ est un petit paramètre. On notera aussi par $Op_h^w b$ l'opérateur associé au symbole b par le formalisme (1.4). On va considérer l'approximation semi-classique de l'équation de Heisenberg :

$$(1.5) \qquad ih \frac{\partial F}{\partial t} h^{-t,s)} = [F_h(t,s), A_h(t)] \quad , \quad F_h(s,s) = C^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D)$$

où l'on a noté $A_h(t) = a^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D,t)$. Dans le cas où C est un symbole de poids borné, ce problème a été considéré dans [12]. Pour C non borné, le problème de domaine se pose. Notre étude de (1.5) est basée sur la régularité de la solution de l'équaiton de Schrödinger (voir Wang [19]) :

$$(1.6) \qquad ih \frac{\partial u(t,s)}{\partial t} = A_h(t)\ u(t,s) \quad , \quad u(s,s) = \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

On montre que la solution de (1.5) admet un développement semi-classique en termes d'opérateurs h-pseudo-différentiels dont le premier terme est un opérateur de symbole $C \circ \phi_s^t$ où $\phi_s^t = (x(t,s),p(t,s))$ est la solution du système hamiltonien :

$$(1.7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \partial_p\ a(x(t,s),p(t,s),t) & x(s,s) = y \\[2ex] \dfrac{\partial p(t,s)}{\partial t} = -\partial_x\ a(x(t,s),p(t,s),t) & p(s,s) = q \quad , \quad (y,q) \in \mathbb{R}^{2n} \end{cases}$$

Ce résultat peut être considéré comme une version semi-classique du théorème d'Egorov ([3]). Il décrit la liaison étroite entre évolution quantique et trajectoire classique et possède des applications intéressantes (voir par exemple [12], [13] et [20]). En particulier, on va appliquer ce résultat à l'étude de la limite classique de fonctions de corrélations quantiques et à retrouver les résultats de [19] obtenus par d'autres méthodes. Remarquons que depuis le travail élégant de Hepp [7], il y a de nombreux articles sur ce sujet (voir par exemple [5], [8], [14], [15] et [16]). Mais les auteurs cités ci-dessus ont généralement considéré les opérateurs de type $W_h(x_o,p_o)^* U_h(t)\exp(-ih^{\frac{1}{2}}(\Upsilon.x+s.D_x))U_h(t)W_h(x_o,p_o)$, où $W_h(x_o,p_o)$ est l'opérateur de Weyl : $W_h(x_o,p_o) = \exp(ih^{-\frac{1}{2}}(p_o.x-x_o.D_x))$. Dans notre cas, on considère les opérateurs de type $W_h(x_o,p_o)^* U_h(t)^* B(h)U_h(t)W_h(x_o,p_o)$, où $B(h)$ est un opérateur pseudo-différentiel, généralement non borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Donc il s'applique au théorème d'Ehrenfert et permet d'obtenir une correspondance remarquable entre mécanique quantique et mécanique classique. Pour d'autres aspects concernant ce sujet, on renvoie à [19].

2 - EXISTENCE DE LA SOLUTION DE L'EQUATION DE HEISENBERG

Soit $a(.,.,t)$ une famille de symboles réels, $t \in]-T,T[$. Supposons que pour tous $\alpha,\beta,\partial_x^\alpha\partial_p^\beta(x,p,t)$ soit continue en $t \in]-T,T[$, $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ et que

$$(2.1) \qquad |\partial_x^\alpha \, \partial_p^\beta \, a(x,p,t)| \leq C_{\alpha\beta} \qquad t \in]-T,T[\quad , \; (x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$$

pour $|\alpha|+|\beta| \geq 2$. Posons $A_h(t) = a^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D,t)$. Considérons l'équation de Heisenberg :

$$(2.2) \qquad ih \frac{\partial}{\partial t} F_h(t,s) = [F_h(t,s),A_h(t)] \quad , \quad F_h(s,s) = b^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D) \; ,$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, où b est un symbole de poids tempéré. Rappelons le résultat suivant concernant la régularité de la solution de l'équation de Schrödinger :

$$(2.3)\qquad ih\frac{\partial u_h(t,s)}{\partial t} = A_h(t)\,u_h(t,s)\quad,\quad u_h(s,s) = u_o \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

THEOREME 2.1

Sous les conditions ci-dessus, la solution du problème (2.3) existe pour $t,s \in \,]-T,T[$ avec $|t-s|$ assez petit. Si l'on note par $u_h(t,s)$ l'application $u_o \to u_h(t,s)$, $u_h(t,s)$ se prolonge en un propagateur unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si l'on note par $B^m(h)$ l'espace de Besov d'ordre m :

$$B^m(h) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n)\ ;\ (h^{\frac{1}{2}}x)^{\alpha}(h^{\frac{1}{2}}D_x)^{\beta}f \in L^2\ ,\ |\alpha|+|\beta| \leqslant m\}$$

muni de la norme naturelle notée $||.||_{m,h}$, $u_h(t,s)$ est uniformément continu de $B^m(h)$ dans $B^m(h)$:

$$||u_h(t,s)f||_{m,h} \leqslant C_m||f||_{m,h}\quad,\quad f \in B^m(h)$$

En particulier $u_h(t,s)$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Pour la démonstration du théorème 2.1, on renvoie à [19] (voir aussi Fujiwara [4] et Kitada-Kumano-go [10]).

D'après le théorème 2.1, $F_h(t,s) = u_h(s,t)b^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D)u_h(t,s)$ est une application continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et vérifie l'équation de Heisenberg (2.2).

PROPOSITION 2.2

Soit a(.,.,t) une famille de symboles vérifiant (2.1). Alors il existe $T_1 > 0$ tel que pour $t,s \in \,]-T,T[$, $|t-s| \leqslant T_1$, le problème (2.2) admet une solution unique $F_h(t,s) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(R^n);\mathcal{S}(R^n))$. De plus pour $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$,

$(t,s) \to F_h(t,s)\varphi$ est de classe C^1 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ par rapport à $(t,s) \in$ $]-T,T[\times]-T,T[$, $|t-s| \leq T_1$.

PREUVE

On a déjà démontré l'existence de la solution. L'unicité de la solution pour (2.2) vient de la surjectivité de $U_h(t,s)$ comme opérateur de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. C.Q.F.D.

Dans la suite on va donner un développement semi-classique de l'opérateur du type $u_h(s,t)Bu_h(t,s)$, qui représente la solution de l'équation de Heisenberg.

3 - UN THEOREME DU TYPE EGOROV

On commence par établir certaines estimations sur le flot hamiltonien classique.

DEFINITION 3.1

On désigne par $S^m(h)$ la classe des symboles admissibles $b(h)$ vérifiant que pour tous α,β, il existe une constante $C_{\alpha\beta}$ telle que

(3.1) $$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x,p,h)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^{m-|\alpha|-|\beta|} \quad , \quad \forall\, h \in]0,1]$$

On désigne par $S_+^m(h)$ la classe des symboles $b(h)$ vérifiant l'estimation

(3.2) $$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x,p,h)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^{(m-|\alpha|-|\beta|)_+} \quad \forall\, h \in]0,1]$$

Soit $a(.,.,t)$, $t \in]-T,T[$, une famille de symboles réels vérifiant

$$(3.3)\quad \begin{cases} \text{Pour tout } T_1,\ 0 < T_1 < T, \text{ pour tous } \alpha \text{ et } \beta, \text{ il existe une constan-} \\ \text{te } C \text{ telle que} \\ |\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p,t)| \leq C(1+|x|+|p|)^{2-|\alpha|-|\beta|} \quad , \quad |t| \leq T_1,\ (x,p) \in \mathbb{R}^{2n} \end{cases}$$

Alors on sait que la solution du système hamiltonien associé à $a(t)$:

$$(3.4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(t,s) = \partial_q\ a(y-t,s),q(t,s),t) \\ \dfrac{\partial q}{\partial t}(t,s) = -\ \partial_y\ a(y(t,s),q(t,s),t) \end{cases}$$

avec données initiales

$$(3.5)\qquad y(s,s) = x \quad , \quad q(s,s) = p$$

existe pour $|t|$, $|s| \leq T_1$. De plus, si on note par ϕ_s^t le flot hamiltonien défini par (3.4) et (3.5) : $\phi_s^t = (y(t,s),\ q(t,s))$, il existe $\delta(T_1) > 0$ tel que pour $|t-s| \leq \delta(T_1)$, on a :

$$(3.6)\qquad 1+|\phi_s^t(x,p)| \geq C_o(1+|x|+|p|)$$

avec $C_o > 0$ indépendant de (x,p) et de t,s tels que $|t-s| \leq \delta(T_1)$.

<u>LEMME 3.1</u>

Sous les conditions précédentes, soient $(y(t,s),\ q(t,s))$ répondant au problème (3.4) et (3.5). Alors $y(t,s)$ et $q(t,s)$ sont C^∞ par rapport à (x,p) et C^1 par rapport à t,s. De plus, on a :

(3.7) $$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta y(t,s)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^{1-|\alpha|-|\beta|}$$

(3.8) $$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta q(t,s)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^{1-|\alpha|-|\beta|}$$

pour tous α,β et pour tous t,s, $|t-s| \leqslant \delta(T_1)$.

La démonstration de ce lemme est élémentaire. On l'omet.

LEMME 3.2

Soient t,s, $|t-s| \leqslant \delta(T_1)$. Alors pour tout $b(h) \in S^m(h)$

(3.9) $$\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(\phi_s^t,h) \in S^{m-|\alpha|-|\beta|}(h) \qquad \text{pour tous } \alpha,\beta$$

De même, pour tout $b(h) \in S_+^m(h)$, on a :

(3.10) $$\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(\phi_s^t,h) \in S_+^{(m-|\alpha|-|\beta|)_+}(h) \qquad \text{pour tous } \alpha,\beta$$

PREUVE

Utilisant les notations du lemme 3.1, notant $u = (x,p)$, on peut écrire :

(3.11) $$\partial_u^\theta\, b(\phi_s^t,h) = \sum_{j=1}^{|\theta|} \sum_{\substack{r_1+\dots+r_j=\theta \\ r_k\in\mathbb{N}^{2n}\setminus\{0\}}} C_{r_1\dots r_j} (\partial_u^j b)(\phi_s^t,h)\partial_u^{r_1}\phi_s^t \dots \partial_u^{r_j}\phi_s^t$$

Donc si $b(h) \in S^m(h)$, on a :

(3.12) $$\begin{cases} |\partial_u^\theta\, b(\phi_s^t,h)| \leqslant C \displaystyle\sum_{j=1}^{|\theta|} \sum_{r_1+\dots+r_j=\theta} (1+|\phi_s^t|)^{m-j}(1+|u|)^{j-|\theta|} \\ \leqslant C'(1+|u|)^{m-|\theta|} \qquad \text{si } |t-s| \leqslant \delta(T_1) \end{cases}$$

De même, pour $b(h) \in S_+^m(h)$, on a :

$$(3.13)\quad \begin{cases} |\partial_u^\alpha b(\phi_s^t,h)| \lesssim \tilde{C} \sum\limits_{j=1}^{|\theta|} \sum\limits_{r_1+\ldots+r_j=\theta} (1+|\phi_s^t|)^{(m-j)_+} (1+|u|)^{j-|\theta|} \\ \lesssim \tilde{C}'(1+|u|)^{(m-|\theta|)_+} \qquad \text{si } |t-s| \lesssim \delta(T_1) \end{cases}$$

(3.9 et (3.10) découlent de (3.12) et (3.13). C.Q.F.D.

Considérons maintenant l'approximation semi-classique de la solution du problème de Cauchy pourl'équation de Heisenberg (2.2). On va donner un développement semi-classique pour $F_h(t,s) = U_h(s,t)b^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D,h)U_h(t,s)$ où $b(h) \in S^m(h)$, ainsi obtenir un théorème du type Egorov (voir [3]).

THEOREME 3.3

Sous les conditions ci-dessus, il existe $\delta(T_1) > 0$ tel que pour tout $b(h) \in S^m(h)$, $F_h(t,s)$ admet un développement au sens suivant : pour tout entier $N \geqslant 0$, on peut écrire :

$$(3.14)\qquad F_h(t,s) = \sum_{j=0}^{N} h^j B_j(t,s;h) + h^{N+1} R_{N+1}(t,s;h)$$

$$\text{pour } |t-s| \leqslant \delta(T_1)$$

où $B_j(t,s;h)$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $b^j(.,.,t,s;h) \in S^{m-j}(h)$, $j = 0,1,\ldots,N$, $R_{N+1}(t,s;h)$ applique continûment de $\mathcal{S}(R^n)$ dans $\mathcal{S}(R^n)$ et pour tout entier $k \geqslant 0$, il se prolonge en un opérateur continu de $B^k(h)$ dans $B^{k+N-m}(h)$ uniformément par rapport à $h \in]0,1]$, $|t-s| \leqslant \delta(T_1)$. En particulier, $b^o(t,s;h)$ est donné par :

REMARQUE

On verra dans la démonstration du théorème que $B_j(t,s;h) = 0$ lorsque j est impaire.

(3.15) $\quad b^{o}(x,p;t,s;h) = b(\phi_s^t(x,p),h)$

où ϕ_s^t est le flot associé à l'Hamiltonien $a(x,p,t)$ c'est à dire la solution du problème :

$$(3.16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\, y(t,s) = \partial_q\, a(y(t,s),q(t,s),t) & y(s,s) = x \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\, q(t,s) = -\,\partial_y\, a_y(y(t,s),(t,s),t) & q(s,s) = p \end{cases}$$

<u>REMARQUE</u>

Dans le cas où $a(t)$ est indjépendant de t, soit ϕ_s^t résolvant le problème (3.16) avec $S = 0$. Alors le théorème 3.3 donne

$$U_h(t)^* b^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D,h)U_h(t) = B_o(t,h) + hB_1(t,h) + h^2B_2(t,h) + \ldots$$

où $U_h(t)$ est le groupe unitaire associé à $A_h = a^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D)$ et $B_o(t,h)$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $b(\phi_o^t,h)$. Voir Robert [12] pour le cas où $b(h)$ est de classe $S^o(h)$.

Avant d'aborder la démonstration du théorème 3.3, on prépare des lemmes. Soit $\delta(T_1)$ donné dans le lemme 3.2, $|t-s| \leqslant \delta(T_1)$. On définit l'opérateur $B_h(r)$ par :

(3.17) $\quad B_h(r)\varphi = U_h(s,r)op_h^w\, b(\phi_r^t,h)\; U_h(r,s)\varphi \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

<u>LEMME 3.4</u>

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $B_h(r)\varphi$ est continûment différentiable dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Et on a :

(3.18) $\quad \dfrac{d}{dr}\, B_h(r)\varphi = U_h(s,r)\; \{\frac{i}{h}[A_h(r),op_h^w\; b(\phi_r^t,h)]\; (op_p^w\{a(r),b(\phi_r^t,h)\})\}U_h(r,s)\varphi$

PREUVE

D'après le théorème 2.1, $B_h(r)\varphi$ est évidemment différentiable dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Comme :

$$\frac{\partial}{\partial t} U_h(t,s)\varphi = -ih^{-1} A_h(t)U_h(t,s)\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial s} U_h(t,s)\varphi = ih^{-1} U_h(t,s)A_h(s)\varphi$$

on obtient facilement :

$$\text{(3.19)} \qquad \frac{d}{dr} B_h(r)\varphi = U_h(s,r)\{-\frac{i}{h}[A_h(r),(op_h^w\, b(\phi_r^t,h)]+\frac{\partial}{\partial r}(op_h^w\, b(\phi_r^t,h))\}U_h(r,s)\varphi$$

ϕ_s^t étant la solution du problème (3.16), on a évidemment :

$$\frac{\partial}{\partial r} b(\phi_r^t,h) = -\{a(r),b(\phi_r^t,h)\}$$

où $\{.,.\}$ est le crochet de Poisson. On peut vérifier :

$$\text{(3.20)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(op_h^w\, b(\phi_r^t,h))\varphi = (op_h^w \frac{\partial}{\partial r} b(\phi_r^t,h))\varphi \\ \qquad\qquad = -(op_p^w\, \{a(r),b(\phi_r^t,h)\})\varphi \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

(3.18) vient de (3.19) et (3.20). C.Q.F.D.

LEMME 3.5

Posons :

$$h\, R_1(h,r,t) = h^{-1}[A_h(r),(op_h^w\, b(\phi_r^t,h))]-op_h^w\{a(.,.,r),b(\phi_r^t,h)\}.$$

Alors $R_1(h,r,t)$ admet comme symbole $b_1(r,t;h) \in S^{m-1}(h)$.

PREUVE

Comme $b(h) \in S^m(h)$, $b(\phi_r^t,h) \in S^m(h)$ par le lemme 3.2. D'après la formule de composition, le symbole de $\frac{i}{h}[A_h(r),(op_p^w\, b(\phi_r^t,h))]-op_h^w\{a(r),b(\phi^t,h)\}$ s'écrit sous la forme :

$$h^2 \sum_{j\geq 3} \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} C_{\alpha\beta}\, h^j\, \partial_x^\alpha D_p^\beta a(r)\partial_x^\beta D_p^\alpha b(\phi_r^t,h)$$

D'après le lemme 3.2, chaque terme est dans la classe $S^{m-2}(h)$. En sommant asymptotiquement ce développement, on prouve que $R_1(h,r,t)$ admet comme symbole $b_1(r,t;h) \in S^{m-2}(h)$. C.Q.F.D.

Maintenant, nous somme en mesure de démontrer le théorème 3.3.

PREUVE DU THEOREME 3.3

D'après le lemme, on a pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$U_h(s,t).b^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D,h)\; U_h(t,s)\varphi - (op_h^w\; b(\phi_s^t,h))\varphi$$

$$(3.21) \qquad = \int_s^t U_h(s,r)\{\tfrac{i}{h}[A_h(r),op_h^w\; b(\phi_r^t,h)]-(op_h^w\{a(.,.,r),b(\phi_r^t,h)\})\}U_h(r,s)\varphi dr$$

$$= h^2 \int_s^t U_h(s,r)op_h^w\; b_1(r,t;h)\; U_h(r,s)\varphi dr$$

Par le lemme 3.5, $b_1(r,t;h) \in S^{m-2}(h)$, donc l'opérateur $U_h(s,r)\; op_h^w\; b_1(r,t;h)\; U_h(r,s)$ est uniformément continu de $B^{k+m-1}(h)$ dans $B^k(h)$ pour tout entier k.

Appliquant (3.21) successivement N fois, on obtient :

$$U_h(s,t)b^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D,h)\; U_h(t,s)\varphi$$

$$= op_h^w\; b(\phi_s^t,h)\varphi + h^2 \int_s^t (op^w\; b_1(r_1,t;h)\; o\; \phi_s^t)\varphi\; dr_1 + \ldots +$$

$$(3.22) \qquad + h^{2N} \int_s^t \int_s^{r_1} \ldots \int_s^{r_{N-1}} (op_h^w\; b_N(t,r_1,r_2,\ldots,r_N;h)\; o\; \phi_s^{r_N})\varphi\; dr_1\ldots dr_N$$

$$+ h^{2N+2} \int_s^t \int_s^{R_1} \ldots \int_s^{r_N} U_h(s,r_{N+1})(op_h^w\; b_{N+1}(t,r_1,r_2,\ldots,r_{N+1};h))$$

$$U_h(r_{N+1},s)\varphi\; dr_1 dr_2\ldots dr_{N+1}$$

D'où, il suffit de prendre :

$$b^{o}(.,.,t,s;h) = b(\phi_s^t,h)$$

$$b^{j}(.,.,t,s;h) = \int_s^t \int_s^{r_1} \cdots \int_s^{r_{j-1}} b_j(t,r_1,r_2,\ldots,r_{j-1};h) \circ \phi_s^{r_j} dr_1 dr_2 \ldots dr_j$$

Par une récurrence, il est facile à montrer $b^j(.,.,t,s;h) \in S^{m-2j}(h)$. Et pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $|t-s| \leqslant \delta(T_1)$, on a :

$$(3.23) \qquad ||R_{N+1}(t,s;h)\varphi||_{k+N-m,h} \leqslant C\, ||\varphi||_{k,h} \qquad \text{pour } h \in]0,1], \text{ k entier.}$$

Donc $R_{N+1}(t,s;h)$ se prolonge en une famille d'opérateurs uniformément continus de $B^k(h)$ dans $B^{k+2N-m}(h)$. Cela finit les démonstration du théorème 3.3.

C.Q.F.D.

On a un résultat analogue pour $b(h) \subset S_+^m(h)$.

<u>*THEOREME 3.6*</u>

Sous les conditions du théorème 3.3 pour $a(t)$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $b(h) \in S_+^m(h)$ et pour tout entier $N \geqslant 0$, on a :

$$(3.24) \qquad F_h(t,s) = \sum_{j=o}^{N} h^j B_j(t,s;h) + h^{N+1} R_{N+1}(t,s;h) \quad , \quad |t-s| \leqslant \delta$$

où $B_j(t,s;h)$ admet comme symbole $b^j(t,s;h) \in S_+^{(m-j)_+}(h)$ et $R_{N+1}(t,s;h)$ se prolonge en une famille d'opérateurs continus de $B^k(h)$ dans $B^{k-(m-N)_+}(h)$ pour tout entier k. En particulier, $b^o(t,s;h)$ $b(\phi_s^t,h)$.

On omet la preuve du théorème 3.6 qui suit la même ligne que celle du théorème 3.3. Une conséquence du théorème 3.6 est le résultat suivant qui est une version semi-classique du théorème d'Egorov ([3]).

THEOREME 3.7

Sous les conditions du théorème 3.3 pour $a(t)$, posons :

$$F_h(t,s) = U_h(s,t)b^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D)U_h(t,s)$$

où b satisfait aux estimations :

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x,p)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^{(m-|\alpha|-|\beta|)_+} \quad , \quad \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n .$$

Alors il existe $\delta > 0$ tel que l'on a :

$$(3.25) \qquad F_h(t,s) = \sum_{j=0}^{N} h^j \; b_j^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D; t,s) + h^{N+1} R_{N+1}(t,s;h) \; , \quad |t-s| \leqslant \delta$$

où $b_j(t,s)$ est un symbole vérifiant :

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b_j(x,p;t,s)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^{(m-j-|\alpha|-|\beta|)_+} , \; |t-s| \leqslant \delta$$

pour $j = 0,1,2,\ldots$ et pour $N \geqslant 0$ assez grand $R_{N+1}(t,s;h)$ se prolonge en un opérateur uniformément borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. En particulier, on a

$$(3.26) \qquad b_o(t,s) = b \circ \phi_s^t$$

REMARQUE

Dans le cas où $m = 0$, on peut obtenir (3.25) en remplaçant (3.3) par :

$$(3.27) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p,t)| \leqslant C_{\alpha\beta} \quad , \qquad |\alpha|+|\beta| \geqslant 2$$

voir Robert [12].

4 - LIMITE CLASSIQUE DE FONCTIONS DE CORRELATION QUANTIQUE

On montre dans cette section que les résultats obtenus dans [19] se déduisent facilement du théorème du type Egorov établi dans la section 3. On se borne ici au cas où a(t) est indépendant de t. Pour hamiltoniens dépendant de t, on a aussi les résultats analogues à ceux de [19].

Soit $(x_o,p_o) \in \mathbb{R}^{2n}$. Posons $W_h(x_o,p_o) = \exp(ih^{-1/2}(x.p_o-x_o.D))$. Alors d'après Hörmander [9], $W_h(x_o,p_o)$ est un opérateur pseudodifférentiel et on a :

$$(4.1) \qquad W_h(x_o,p_o)^* b^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D)W_h(x_o,p_o)f = b^w(h^{\frac{1}{2}}x+x_o,h^{\frac{1}{2}}D+p_o)f \quad , \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

où b est un symbole de poids tempéré quelconque.

LEMME 4.1

Pour tout symbole de poids tempéré b, on a

$$(4.2) \qquad ||(W_h(x_o,p_o)^* b^w(h^{\frac{1}{2}}x,h^{\frac{1}{2}}D)W_h(x_o,p_o) - b(x_o,p_o)f|| \leqslant C(f)h^{\frac{1}{2}} \quad , \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

où C(f) est une constante dépendant de f.

PREUVE

Il suffit d'utiliser (4.1) et de développer le symbole de $b^w(h^{\frac{1}{2}}x+x_o,h^{\frac{1}{2}}D+p_o)$ autour de (x_o,p_o). C.Q.F.D.

THEOREME 4.2

Supposons que le symbole b vérifie qu'il existe un entier N tel que

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x,p)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^N \qquad \text{pour tous } \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$$

Alors pour tout $f \in B^N$ l'espace de Berov d'ordre N, on a

$$(4.3) \qquad \lim_{h\to o_+} W_h(x_o,p_o)^* U_h(t)^* b^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D) U_h(t) W_h(x_o,p_o) f = b(x(t),p(t))f$$

dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, où $(x(t),p(t))$ est la trajectoire classique pour l'hamiltonien a, avec données initiales (x_o,p_o) :

$$(4.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dx} = \partial_p a(x(t),p(t)) & x(o) = x_o \\ \dfrac{dp(t)}{dt} = -\partial_x a(x(t),p(t)) & p(o) = p_o \end{cases}$$

En particulier si b est un symbole borné, on a :

$$(4.5) \qquad S - \lim_{h\to o_+} W_h(x_o,p_o)^* U_h(t)^* b^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D) U_h(t) W_h(x_o,p_o) = b(x(t),p(t))$$

dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. La limite dans (4.3) et (4.5) est uniforme en t pour t dans tout compact de $\mathbb{R}^n$.

<u>PREUVE</u>

On note par ϕ^t la solution de (4.3) avec données initiales (x,p). Alors la démonstration du théorème 3.3 donne

$$(4.6) \qquad ||U_h(t)^* b^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D) U_h(t) f - (b \circ \phi^t)^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D) f|| \leqslant C_1 h \ , \ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

D'après le lemme 4.1, on a

$$(4.7) \qquad ||W_h(x_o,p_o)^* (b \circ \phi^t)^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D) W_h(x_o,p_o) f - b \circ \phi^t(x_o,p_o) f|| \leqslant C_2 h^{\frac{1}{2}}$$

où C_1 et C_2 sont indépendants de f et de t dans un compact fixé de $\mathbb{R}$. De (4.6) et (4.7), il vient

$$||W_h(x_o,p_o)^* U_h(t)^* b^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D)U_h(t)W_h(x_o,p_o)f - b(x(t),p(t))f||$$
$$\leqslant C\, h^{\frac{1}{2}} \qquad , \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Par un argument de densité, on obtient (4.3). C.Q.F.D.

COROLLAIRE 4.3

Sous les conditions du théorème 4.2, on a pour tout $f \in B^1$,

$$\lim_{h\to o_+} W_h(x_o,p_o)^* U_h(t)^* h^{\frac{1}{2}} x_j U_h(t)W_h(x_o,p_o)f = x_j(t)f$$
$$\lim_{h\to o_+} W_h(x_o,p_o)^* U_h(t)^* h^{\frac{1}{2}} D_j U_h(t)W_h(x_o,p_o)f = p_j(t)f \ , \ j = 1,2,\dots,n$$

dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, où $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$, $p(t) = (p_1(t),\dots,p_n(t))$ est la solution de (4.4). Appliquant le théorème d'Ehrenfest, on obtient :

COROLLAIRE 4.4

Supposons que $a = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x)$ avec V satisfaisant

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leqslant C_\alpha \qquad , \qquad \text{pour } |\alpha| \geqslant 2.$$

Si l'on note pour un opérateur autoadjoint L : $\langle L\rangle_{\varphi_h(t)} = (U_h(t)W_h(x_o,p_o)\varphi, LU_h(t)W_h(x_o,p_o)\varphi)$, on a alors pour tout $\varphi \in B^1$ que

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to o_+} \frac{d}{dt}\left(\langle h^{\frac{1}{2}} x_j\rangle_{\varphi_h(t)}\right) = p_j(t)||\varphi||^2 \\[2ex] \lim\limits_{h\to o_+} \frac{d}{dt}\left(\langle h^{\frac{1}{2}} D_j\rangle_{\varphi_h(t)}\right) = -\dfrac{\partial V(x(t))}{\partial x_j}||\varphi||^2 \end{cases}$$

La limite étant localement uniforme en $t \in R$.

Notons que si l'on s'intéresse seulement à établir (4.5), on peut lacher le contrôle sur la croissance du symbole a (voir [19] et aussi [7], [15], [16]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] : **S. ALBEVERIO - T. AREDE** : "The relation between quantum mechanics and classical mechanics". A savery of some mathematical aspects, to appear in Proc. Como. Conf., 1983, "Quantum Chaos", Ed. G. Casati, Plenum.

[2] : **J. CHAZARAIN** : "Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique". Comm. P.D.E., 5(6) (1980) 595-644.

[3] : **Yu. V. EGOROV** : "On canonical transformation of pseudo-differential operators". Usp. Mat. Nauk., 25 (1969), 235-236.

[4] : **D. FUJIWARA** : "A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equations". J. d'Anal. Math. 35 (1979), 41-96.

[5] : **G.A. HAGEDORN** : "Semi-classical quantum mechanics, I, the h → o limit for coherent states". Comm. Math. Phys. 71 (1980), 77-93.

[6] : **B. HELFFER - D. ROBERT** : "Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles". J. Funct. Anal., 53 (3) (1983) 246-268.

[7] : **K. HEPP** : "The classical limits for quantum mechanical correlation functions". Comm. Math., Phys., 35 (1974) 265-277.

[8] : **H. HOGREVE - J. POTTHOFF - R. SCHRADER** : "Classical limits for quantum particles in Yang-Mills potentials". Comm. Math., Phys., 91 (4) (1983) 573-598.

[9] : **L. HORMANDER** : "The Weyl calculus of pseudo-differential operators". Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979) 359-443.

[10]: **H. KITADA - H. KUMANO-GO** : "A family of Fourier integral operators and the fundjamental solution for a Schrödinger equations". Osaka, J. Math., 18 (1981) 291-360.

[11]: **V.P. MASLOV - M.V. FEDORIUK** : "Semi-classical approximation in quantum mechanics". D. Reidel, Dordrecht, 1981.

[12]: **D. ROBERT** : "Autour de l'approximation semi-classique". Notas de Cusso, n° 21, Recife, 1983.

[13]: **D. ROBERT - H. TAMURA** : "Semi-classical bounds for resolvents of Schrödinger operators and asymptotic for scattering phase". Comm. P.D.E., 9 (10) (1984) 1017-1058.

[14]: **R. SCHRADER - M. TAYLOR** : "Small symptotics for quantum partition functions associated to particles in external Yang-Mills potentials". Comm. Math., Phys., 92 (1984), 555-594.

[15] : **B. SIMON** : "The classical limit of quantum partition functions". Comm. Math. Phys., 71 (1980), 247-276.

[16] : **M. SIRGUE - A. SIRGUE-COLLIN - A. TRUMAN** : "Semi-classical approximation and microcanonical ensemble". Ann. Inst. H. Poincaré, 41 (4) (1984), 429-444.

[17] : **X.P. WANG** : "Comportement semi-classique de traces partielles". C.R. Acad. Sc. Paris, 299 (17) (1984), 867-870.

[18] : **X.P. WANG** : "Asymptotic behaviour of spectral means for pseudofifferential operators". A paraître J. Approx. Theory Appl. (1985).

[19] : **X.P. WANG** : "Etude semi-classique d'observables quantiques". A paraître.

[20] : **X.P. WANG** : "Time-delay operators in semi-classical limit". Exposé Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Univ. Rennes, (1985).