

PARENTI

**Paramétrix et propagation des singularités pour des opérateurs
à caractéristiques non involutives**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 7-56

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985__3_7_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE II

PARAMETRIXE ET PROPAGATION DES SINGULARITES

POUR DES OPERATEURS A CARACTERISTIQUES NON INVOLUTIVES

PARENTI

Istituto Matematico "S. Pincherle"

Piazza di Porta S. Donato, 5

40 127 - BOLOGNA - ITALY

(Chapitre I)

Etude des singularités pour les solutions distributions d'un système :

$$(1) \quad (I_n t \partial_t - A(t, x, D_t, D_x))u = f ,$$

où A est une matrice $N \times N$ d'o.p.d. classiques et propres d'ordre $\underline{0}$.

Précisément on s'intéresse à décrire $WF(u) \setminus WF(f)$ au voisinage de la variété double $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$:

$$\Sigma_1 = \{t = 0\} \subset T^*\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$$

$$\Sigma_2 = \{\tau = 0\} \subset T^*\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$$

(On pose $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$). En effet près de $\Sigma_1 \setminus \Sigma$ ou $\Sigma_2 \setminus \Sigma$ la description est classique tandis qu'on s'attend à des phénomènes de bifurcation des singularités près de Σ (phénomènes que l'on va décrire avec soin).

Je vais diviser mon exposé en trois ou quatre parties :

1)- Construction de microparamétrixes pour le système (1) près de Σ quand A ne dépend pas de t et D_t , et résultats de propagation (j'expose ici la méthode de N. Hanges).

2) Réduction microlocale près de Σ d'un système

$I_n t \partial_t - A(t, x, D_t, D_x)$ à un système $I_M t \partial_t - \hat{A}(x, D_x)$ ($M \geq N$). C'est facile si $N = 1$, il y a des obstructions non-triviales si $N > 1$.

3) Applications : j'ai déjà parlé l'année dernière à St Jean de Monts de certaines applications de 1) et 2) à des opérateurs p.d.o. à caractéristiques multiples de multiplicité variable avec intersection symplectique.

Ici je veux considérer le problème de Cauchy pour un système hyperbolique symétrique du 1er ordre.

$$\begin{cases} (I_N D_t - A(x, D_x))u = f \\ u|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

où A est une matrice N x N elliptique du 1er ordre autoadjointe positive sur une variété compacte sans bord X.

Je vais traiter le cas où :

$$\det (I_n \tau - A_1(x, \xi)) = \prod_{j=1}^{\nu} (\tau - \lambda_j(x, \xi))^{r_j}$$

avec $\lambda_j \in C^\infty(T^*X \setminus 0)$ (réelles) $r_j \geq 1$ constant en supposant que si pour deux indices $i, j \in \{1, \dots, \nu\}$, $i \neq j$, l'ensemble

$$\Sigma_{i,j} = \{(x, \xi) \in T^*X \setminus 0 \mid \lambda_i(x, \xi) = \lambda_j(x, \xi)\}$$

est non vide, alors :

- 1)- $\{\lambda_i, \lambda_j\} \neq 0$ sur $\Sigma_{i,j}$
- 2)- pour chaque $k \in \{1, \dots, \nu\}$, $k \neq i$, $k \neq j$ on a $\lambda_k \neq \lambda_i$, $\lambda_k \neq \lambda_j$ en tout point de $T^*X \setminus 0$.

Dans ce cas, si $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ sont les valeurs propres de l'opérateur A, on considère la fonction trace :

$$S(t) = \sum_{j \geq 1} e^{-it\mu_j} = \mathcal{F}\left(\sum_{j \geq 1} \delta(\mu - \mu_j)\right)$$

et l'on donnera une estimation de $WF(S(t))$ (relation de Poisson).

1) - CONSTRUCTION DE MICROPARAMETRIXES : LE MODELE -

Pour comprendre les idées, je vais traiter un peu en détail le cas simple d'un opérateur scalaire sur $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$:

$$(2) \quad P_\lambda = t \partial_t - \lambda, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

En effet, ce que je vais énoncer s'étend au cas $P_\Lambda = I_N t \partial_t - \Lambda$ où Λ est une matrice carrée $N \times N$ à termes complexes.

Dans le cas (2) on construit explicitement des solutions fondamentales ayant certaines relations de propagation.

Considérons les distributions :

$$K_\pm^\lambda(t,s) = (t \pm io)^\lambda (s \pm io)^{-\lambda-1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_s)$$

On a :

$$\text{WF}(K_\pm^\lambda) \subset \{(t=0, s=0; \pm \tau > 0, \pm \sigma > 0)\}$$

$$\cup \{(t=0, s; \pm \tau > 0, \sigma = 0)\}$$

$$\cup \{(t,s=0; \tau = 0, \pm \sigma > 0)\}$$

Puisque $\text{WF}(K_\pm^\lambda)$ est disjoint du fibré conormal à $t = s$ on peut considérer les quatre distributions suivantes :

$$H(t-s) K_\pm^\lambda(t,s), \quad H(s-t) K_\pm^\lambda(t,s) \quad (H(z) \text{ étant la fonction de Heavyside})$$

$$\text{WF}'(H(t-s) K_\pm^\lambda) \subset \Delta(T^*\mathbb{R}^2 \setminus 0) \cup \{(t=0, s=0; \tau, \sigma) \begin{cases} \tau \geq \sigma \\ \tau \leq \sigma \end{cases}\}$$

$$\cup \{(t,0;0,\sigma) \mid t \geq 0, \pm \sigma < 0\}$$

$$\cup \{(0s;\tau,0) \mid s \leq 0, \pm \tau > 0\}$$

WF(H(s-t)K_±^λ) contenu dans un ensemble du même type que le précédent en remplaçant par t positif par t négatif et s négatif par s positif.

Maintenant :

$$\begin{aligned} t \partial_t H(t-s)K_+^\lambda &= t \delta(t-s)K_+^\lambda + \lambda t H(t-s) (t + io)^{\lambda-1} (s+io)^{-\lambda-1} \\ &= \lambda H(t-s)K_+^\lambda + \delta(t-s) (t + io)^{\lambda+1} (s + io)^{-\lambda-1}, \end{aligned}$$

donc :

$$P_\lambda[H(t-s)K_+^\lambda] = \delta(t-s).$$

De la même manière on trouve que :

$$P_\lambda[H(t-s)K_-^\lambda] = \delta(t-s)$$

et

$$P_\lambda[-H(s-t)K_\pm^\lambda] = \delta(t-s)$$

Utilisant les noyaux H(t-s)K_±^λ et -H(s-t)K_±^λ on définit quatre opérateurs : ε_±^λ, ℱ_±^λ : C₀[∞] → ℰ' tels que P_λ ε_±^λ = I et P_λ ℱ_±^λ = I.

Pour construire des inverses à gauche on remarque que :

$$\begin{aligned} P_\lambda^* &= (t \partial_t - \lambda)^* = -(t \partial_t + (\bar{\lambda} + 1)) \\ &= -P_{-(\bar{\lambda} + 1)} \end{aligned}$$

Si je prends μ ∈ ℂ, μ = -(λ̄ + 1), alors :

$$(-\varepsilon_{\pm}^{\mu})^* P_{\lambda} = I \text{ et } (-\mathcal{F}_{\pm}^{\mu})^* P_{\lambda} = I$$

A ce moment on définit les opérateurs dans $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$E_{\pm}^{\lambda} = -(\varepsilon_{\pm}^{\mu})^* \otimes I_x, \quad F_{\pm}^{\lambda} = -(\mathcal{F}_{\pm}^{\mu})^* \otimes I_x$$

$$\mu = -(\bar{\lambda} + 1)$$

C'est un exercice de vérifier que :

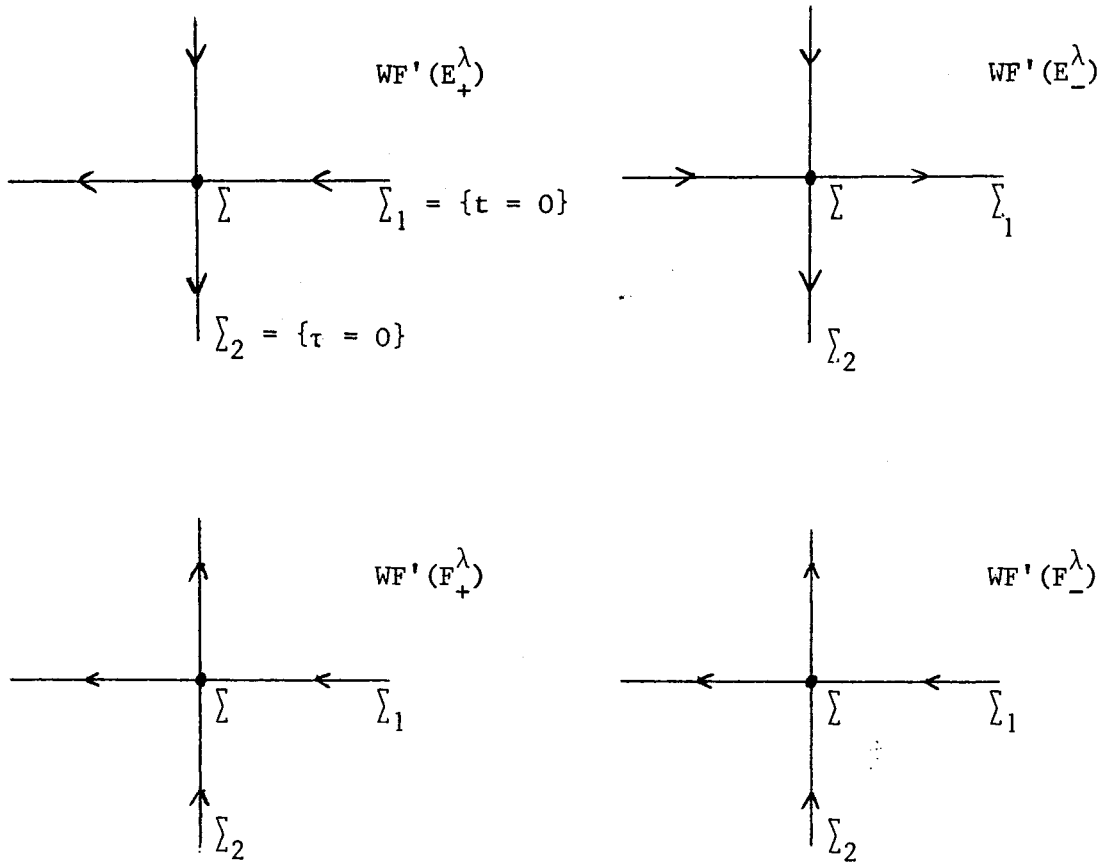
$$\begin{aligned} WF'(E_{\pm}^{\lambda}) &\subset \Delta(T^* \mathbb{R}^{2n+2} \setminus 0) \cup \\ &\cup \{(s, x, \sigma, \xi), (t, y, \tau, \eta) \mid s = t = 0, x = y, \xi = \eta, \left. \begin{array}{l} \sigma \leq \tau \\ \sigma \geq \tau \end{array} \right\} \\ &\cup \{(s, x, \sigma, \xi), (t, y, \tau, \eta) \mid x = y, \xi = \eta, s = 0, \tau = 0, \\ &\quad t \geq 0, \pm \sigma < 0\} \\ &\cup \{(s, x, \sigma, \xi), (t, y, \tau, \eta) \mid x = y, \xi = \eta, t = 0, \sigma = 0, \\ &\quad s \leq 0, \pm \tau > 0\} \\ &\cup \{(s, x, \sigma, \xi), (t, y, \tau, \eta) \mid x = y, \xi = \eta \neq 0, \sigma = \tau = 0, s \leq t\} \\ &= \Delta(T^* \mathbb{R}^{2n+2} \setminus 0) \cup A_1^{\pm} \cup A_2^{\pm} \cup A_3^{\pm} \cup B \subset \Delta(T^* \mathbb{R}^{2n+2} \setminus 0) \cup (\sum_0 \times \sum_0) \end{aligned}$$

Pour :

$$\begin{aligned} WF'(F_{\pm}^{\lambda}) &\subset \Delta(T^* \mathbb{R}^{2n+2}) \cup A_1 \cup A_2' \cup A_3' \cup B' \\ &\quad (t \leq 0) \quad (s \geq 0) \quad (s \geq t) \\ &\subset \Delta(T^* \mathbb{R}^{2n+2} \setminus 0) \cup (\sum_0 \times \sum_0). \end{aligned}$$

Donnons une interprétation géométrique :

Sur $(T^* \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0) \cup \sum_0$ on définit quatre relations d'indice, en considérant l'identité sur $T^* \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ et en orientant les bicaractéristiques de \sum_0 :



On définit $N_{\Sigma_1}^{\pm} = \{(t, y; \tau, \eta) \mid t = 0, \eta = 0, \pm \tau > 0\}$ et $N_{\Sigma_1} = N_{\Sigma_1}^+ \cup N_{\Sigma_1}^-$ (c'est le fibré conormal à hyperplan $t = 0$ de \mathbb{R}^{n+1}). Les opérateurs $E_{\pm}^{\lambda}, F_{\pm}^{\lambda}$ se prolongent aux distributions $f \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que

$$WF(f) \cap N_{\Sigma_1}^{\pm} = \emptyset \quad \text{et on trouve que :}$$

$$WF \left(\begin{matrix} E_{\pm}^{\lambda} \\ F_{\pm}^{\lambda} \end{matrix} f \right) \subset WF' \left\{ \begin{matrix} E_{\pm}^{\lambda} \\ F_{\pm}^{\lambda} \end{matrix} \right\} \circ WF(f) \cup N_{\Sigma_1}^{\mp}$$

1er Théorème de propagation :

Etant donné $\rho_0 = (0, x = x_0 ; 0, \xi = \xi_0 \neq 0) \in \Sigma$

on pose :

$$\gamma_1^\pm(\rho_0) = \{(0, x = x_0 ; \pm s > 0, \xi^{(0)}) \mid s > 0\} \subset \Sigma_1 \setminus \Sigma_0$$

$$\gamma_2^\pm(\rho_0) = \{(\pm s, x = x_0 ; 0, \xi^{(0)}) \mid s > 0\} \subset \Sigma_2 \setminus \Sigma_0$$

$\gamma_1^\pm(\rho_0) \cup \{\rho_0\}$ sont les deux demi bicaractéristiques $\subset \Sigma_1$ sortantes de ρ_0 .

$\gamma_2^\pm(\rho_0) \cup \{\rho_0\}$ sont les deux demi bicaractéristiques $\subset \Sigma_2$ sortantes de ρ_0 .

Alors soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ avec $\rho_0 \notin \text{WF}(P_\lambda u)$.

Si pour chaque $j \in \{1, 2\}$ et pour un choix des signes + ou -

on a :

$$\gamma_j^\pm(\rho_0) \cap \text{WF}(u) = \emptyset ,$$

alors :

$$\rho_0 \notin \text{WF}(u).$$

Preuve :

Soit par exemple :

$$(\gamma_1^+(\rho_0) \cup \gamma_2^-(\rho_0)) \cap \text{WF}(u) = \emptyset.$$

alors :

$$\overline{(\gamma_1^+(\rho_0) \cup \gamma_2^-(\rho_0))} \cap \text{WF}(P_\lambda u) = \emptyset.$$

On peut supposer $\text{WF}(u) \cap N_{\Sigma_1} = \emptyset$, si bien que $F_\lambda^+ P_\lambda u = u$.

Or $\rho_0 \in WF(u) \Rightarrow \rho_0 \in WF(F_\lambda^+ P_\lambda u)$ i.e. $\rho_0 \in WF'(F_\lambda^+) \circ WF(P_\lambda u)$;
 mais ceci est possible seulement si $\exists \rho'$ t.q. $(\rho_0, \rho') \in WF'(F_\lambda^+)$ et $\rho' \in WF(P_\lambda u)$
 (i.e. $\rho' \in \overline{\gamma_1^+(\rho_0) \cup \gamma_2^-(\rho_0)}$) ce qui n'est pas vrai.

Les trois autres possibilités se traitent en utilisant les paramétrixes adaptées.

Il convient de remarquer qu'en choisissant $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ avec $(x_0, \xi_0) \in WF(\varphi)$ et considérant les distributions $(t \pm i0)^\lambda \otimes \varphi(x)$ ou $(t_\pm^\lambda \otimes \varphi(x))$ on peut construire des solutions de $P_\lambda u = 0$ telles que $\rho_0 \in WF(u)$ et $WF(u)$ contiennent au moins trois demi bicaractéristiques.

Remarquons maintenant que $(t \partial_t - k)t^k = 0$ et $(t \partial_t + (k+1))\delta_t^{(k)} = 0$ pour $k = 0, 1, \dots$

Etant donné φ comme plus haut on voit que $WF(t^k \otimes \varphi(x))$ contient seulement $\overline{\gamma_2^+(\rho_0) \cup \gamma_2^-(\rho_0)}$, tandis que $WF(\delta_t^{(k)} \otimes \varphi(x))$ contient seulement $\overline{\gamma_1^+(\rho_0) \cup \gamma_1^-(\rho_0)}$.

On soupçonne alors que si $\lambda \notin \mathbb{Z}$ les hypothèses :

- 1) - $\rho_0 \notin WF(P_\lambda u)$
- 2) - Pour un $j \in \{1, 2\}$, $WF(u) \cap [\gamma_j^+(\rho_0) \cup \gamma_j^-(\rho_0)] = \emptyset$, implique que $\rho_0 \notin WF(u)$.

Ceci est vrai on va le démontrer :

Soit $\mu \in \mathbb{C}$, $\text{Re } \mu > -1$, et considérons l'opérateur :

$$\Phi^\mu : C_0^\infty(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \int_0^1 \rho^\mu f(\rho t) d\rho \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

On a :

$$\begin{aligned} t \partial_t \Phi^\mu f &= \int_0^1 \rho^{\mu+1} t f'(\rho t) d\rho = \int_0^1 \rho^{\mu+1} \frac{d}{d\rho} [f(\rho t)] d\rho \\ &= f - (\mu+1) \Phi^\mu f \end{aligned}$$

i.e. $P_{-(\mu+1)} \Phi^\mu f = f.$

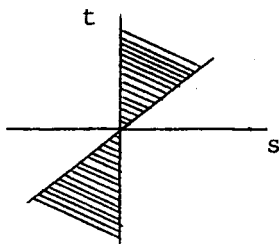
De même : $\Phi^\mu P_{-(\mu+1)} f = f.$

On va estimer $WF'(\Phi^\mu)$, c'est à dire on étudie l'asymptotique en $|\tau| + |\sigma| \rightarrow +\infty$ de :

$$\begin{aligned} \langle \Phi^\mu (e^{is\sigma} f(s)), g(t) e^{-it\tau} \rangle &= \\ &= \int \int_0^1 \rho^\mu e^{-it(\tau-\rho\sigma)} f(\rho t) f(t) d\rho dt \end{aligned} \quad (*)$$

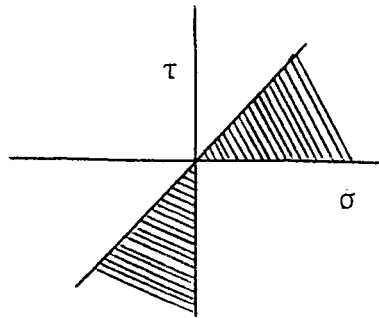
avec $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Naturellement le noyau de Φ^μ un support sur $\frac{s}{t} \in [0, 1]$.



De plus on voit que :

$$WF'(\Phi^\mu) \subset \{(t, \tau), (s, \sigma) \mid \tau/\sigma \in [0, 1]\}$$



En effet, si $(\tau_0, \sigma_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ et $\tau_0/\sigma_0 \notin [0, 1]$, alors il existe un voisinage conique Γ de (τ_0, σ_0) tel que :

$$\inf_{\rho \in [0, 1]} |\tau - \rho\sigma| \geq C (|\tau| + |\sigma|), \quad (\tau, \sigma) \in \Gamma.$$

En integ. par parties en t dans (*) on trouve que :

$$(t_0, \tau_0, s_0, \sigma_0) \notin WF'(\Phi^\mu) \text{ q.q. soient } (t_0, s_0).$$

Maintenant si je prends le point $(t_0, \tau_0 ; s_0, \sigma_0)$ avec

$$s_0/t_0 \in [0, 1] \text{ et } \tau_0/\sigma_0 \in [0, 1], \text{ on voit que :}$$

1) Si $s_0 = t_0 \neq 0$, on doit avoir $\rho \sim 1$ et donc si $\tau_0 \neq \sigma_0$, on peut supposer $\tau_0 - \rho \sigma_0 \neq 0 \quad \forall \rho$ en prenant les supports de f et g assez petits. On intègre en t et le point $\notin WF'(\Phi^\mu)$.

2) Si $s_0/t_0 \in]0, 1[$, alors ρ est loin de 0 et 1 si bien qu'on peut intégrer par parties en ρ utilisant $\frac{d}{d\rho} (e^{-it(\tau-\rho\sigma)}) = it\sigma e^{-it(\tau-\rho\sigma)}$, et comme $\sigma_0 \neq 0$, on aura que le point $\notin WF'(\Phi^\mu)$.

3) Finalement, si $s_0 = 0$, $t_0 \neq 0$; alors ρ est près de 0, si bien que si $\tau_0 \neq 0$ on aura $\tau_0 - \rho \sigma_0 \neq 0$ et par intégrations par parties en t on déduit encore que le point $\notin WF'(\Phi^\mu)$.

En conclusion :

$$WF'(\Phi^\mu) \subset \Delta(T^* \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

$$\cup \{(t = 0, \tau ; s = 0, \sigma) \mid \tau/\sigma \in [0, 1]\}$$

$$\cup \{(t, 0 ; s = 0, \sigma) \mid \sigma \neq 0\}$$

On voit donc que Φ^μ peut-être prolongé à tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ qui soit C^∞ à l'origine et $P_{-(\mu+1)} \Phi^\mu f = f$; $\Phi^\mu P_{-(\mu+1)} f = f$, $WF'(\Phi^\mu f) \subset WF'(\Phi^\mu) \cup WF(f)$.

On peut alors définir l'opérateur :

$$G^\mu = \Phi^\mu \otimes I_x.$$

On aura :

$$WF'(G^\mu) \subset \Delta(T^* \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\})$$

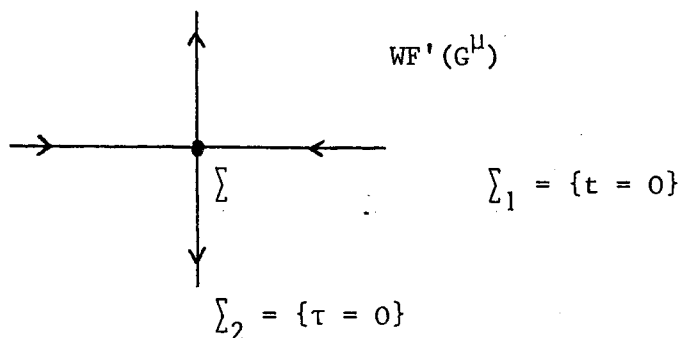
$$\cup \{(t, x, \tau, \xi) , (s, y, \sigma, \eta) \mid t=s=0 , x=y, \xi=\eta, \tau/\sigma \in [0, 1]\}$$

$$\cup \{(t, x, \tau, \xi) , (s, y, \sigma, \eta) \mid x=y , \xi=\eta, \tau=0, s=0, \sigma \neq 0\}$$

$$\cup \{(t, x, \tau, \xi) , (s, y, \sigma, \eta) \mid \tau=\sigma=0, x=y, \xi=\eta \neq 0, s/t \in [0, 1]\}$$

$$\subset \Delta(T^* \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\}) \cup (\sum_0 \times \sum_0).$$

Interprétation géométrique :



Noter que G^μ se prolonge aux distributions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que $WF(f) \cap N_{\Sigma_1} = \emptyset$.

Conséquence :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re } \lambda < 0$. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ tel que :

- 1) $\rho_0 = (0, x_0; 0, \xi_0) \in \Sigma \setminus WF(P_\lambda u)$
- 2) $(\gamma_1^+(\rho_0) \cup \gamma_1^-(\rho_0)) \cap WF(u) = \emptyset$,

alors $\rho_0 \notin WF(u)$.

Preuve :

On peut supposer que $WF(u) \cap N_\Sigma = \emptyset$ et alors

$$\rho_0 \in WF(u) \Rightarrow \rho_0 \in WF(G^{-\lambda-1} P_\lambda u) \text{ i.e.}$$

$$\exists \rho' \in WF(P_\lambda u) \quad (\rho_0, \rho') \in WF'(G^{-\lambda-1}) \Rightarrow \rho' \in \overline{\gamma_1^+(\rho_0) \cup \gamma_1^-(\rho_0)},$$

c'est absurde.

2ème théorème de propagation :

Si $\lambda \notin \{0, 1, 2, \dots\}$ on a les mêmes résultats.

Preuve :

Si $u(t, x)$ est C^∞ on écrit pour tout k :

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \gamma_j(u) t^j + t^k R_k(u)$$

avec

$$\gamma_j(u) = \partial_t^j u \Big|_{t=0}, \quad R_k(u) = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-\rho)^{k-1} (\partial_t^k u)(\rho t, x) d\rho.$$

la même formule s'étend à toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telle que

$WF(u) \cap N_{\sum_1} = \emptyset$ et l'on remarque que :

$$WF'(R_k) \subset \dots \text{ même ensemble de } WF'(G^\lambda)$$

Or si $(t \partial_t - \lambda)u = f$, on trouve que :

$$(j - \lambda) \gamma_j(u) - \gamma_j(f) \quad \forall j = 0, 1, \dots$$

Donc, puisque $\lambda \notin \{0, 1, \dots\}$, $\gamma_j(u) = \frac{1}{j-\lambda} \gamma_j(f)$.

On choisit $k \geq 0$ tel que $\text{Re } \lambda - k < 0$ et l'on définit l'opérateur :

$$H f = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!(j-\lambda)} \gamma_j(f) t^j + t^k G^{k-\lambda-1} (R_k f),$$

$$f \in \mathcal{E}' \quad WF(f) \cap N_{\sum_1} = \emptyset.$$

On a :

$$H P_\lambda f = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \gamma_j(f) t^j + t^k G^{k-\lambda-1} [R_k(P_\lambda f)].$$

Or :

$$R_k(P_\lambda f) = -\lambda R_k(f) + \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-\rho)^{k-1} (\partial_t^k [t \partial_t f]) (\rho t) d\rho.$$

Puisque :

$$\partial_t^k t \partial_t = k \partial_t^k + t \partial_t^{k+1}, \text{ il vient :}$$

$$R_k(P_\lambda f) = (k - \lambda) R_k(f) + t \partial_t R_k(f)$$

Donc :

$$G^{k-\lambda-1} R_k(P_\lambda f) = G^{k-\lambda-1} P_{\lambda-k}(R_k f) = R_k f$$

donc $H P_\lambda f = f$ et de la même manière $P_\lambda Hf = f$.

On note que :

$$WF'(G^{k-\lambda-1} R_k) \subset \text{m\^eme relation que pour } WF'(G^\lambda).$$

En outre :

$WF'(t^j \otimes \gamma_j) \subset \{(t, x; \sigma, \xi), (s=0, x; \sigma, \xi)\} \subset \text{m\^eme relation que pour } WF'(G^\lambda).$

En conclusion :

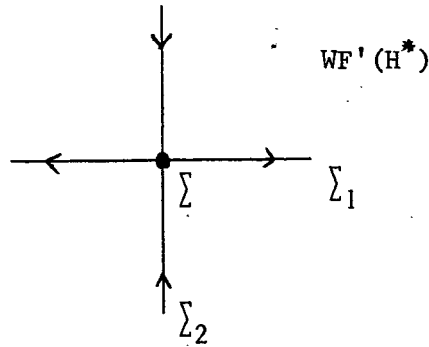
$$WF'(H) \subset \text{m\^eme relation que pour } WF'(G^\lambda).$$

3ème théorème de propagation :

Si $\lambda \notin \{-1, -2, \dots\}$ et si $\rho_0 \in \Sigma \setminus WF(P_\lambda u)$ et si $(\gamma_2^+(\rho_0) \cup \gamma_2^-(\rho_0)) \cap WF(u) = \emptyset$, alors $\rho_0 \notin WF(u)$.

Preuve :

On considère $P_\lambda^* = -P_{-(\bar{\lambda}+1)}$ donc $-(\bar{\lambda}+1) \notin \{0,1,\dots\}$. On prend H tel que $P_{-(\bar{\lambda}+1)} H = I$. On déduit que $(-H)^* P_\lambda = I$.



La conclusion s'ensuit

N.B. : Dans le cas où $P_\lambda = I_N t \partial_t - \Lambda$, Λ matrice $N \times N$ complexes les hypothèses sont :

$$\text{spectre } (\Lambda) \cap \{0,1,2,\dots\} = \emptyset \text{ et resp.}$$

$$\text{spectre } (\Lambda) \cap \{-1,-2,\dots\} = \emptyset.$$

Passons maintenant au cas où

$$P_\lambda = t \partial_t - \lambda(x, D_x^-),$$

avec $\lambda \in OPS^0(\mathbb{R}^n)$ classique et propre de symbole $\lambda(x, \xi) \sim \lambda_0(x, \xi) + \lambda_{-1}(x, \xi) + \dots$

on essaie de "répéter" les arguments faits dans le cas $\lambda \in \mathbb{C}$. Tout ce que je dirais s'étend au cas $P = I_N t \partial_t - \Lambda(x, D_x)$ où Λ est une matrice $N \times N$ d'O.P.D. classiques et propres d'ordre 0.

L'idée naturelle est d'essayer de trouver des noyaux du type :

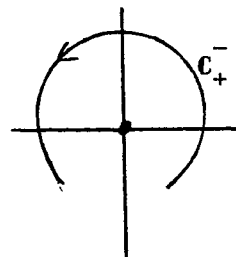
$$\begin{aligned} & H(t-s) \\ & \times \left[\begin{matrix} \lambda_0(x, \theta) & -\lambda_0(x, \theta) - 1 \\ (s \pm i0) & (s \pm i0) \end{matrix} \right] + \text{termes convenables} \\ & -H(s-t) \end{aligned}$$

On suppose (ce qui n'est pas restrictif) que :

$$|\lambda_0(x, \theta)| \leq C < +\infty \quad \forall (x, \theta) \in T^* \mathbb{R}^n \setminus 0.$$

Définition :

On pose $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \zeta = 0, \operatorname{Im} \zeta \leq 0 \}$.



On définit $B_m^N = \{ a(z, w; x, \theta) \mid (z, w) \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+, (x, \theta) \in T^* \mathbb{R}^n, \text{ qui sont holomorphes en } z, w \text{ et telles que :}$

$$|\partial_z^j \partial_w^k \partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a| \leq C |z|^{N-j} |w|^{N-k} (1+|\theta|)^{m-|\beta|},$$

pour $(z, w) \in$ borné de $\mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+, x \in$ compact de $\mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{R}^n$. C'est un espace de Fréchet.

L'exemple typique est donné par le symbole :

$$\lambda_0(x, \theta) \frac{-\lambda_0(x, \theta)-1}{z} \in B_0^{C+1+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0 (\text{e } \theta \neq 0).$$

Les deux lemmes suivants se démontrent par des arguments standards :

1) Soient $a_k \in B_{m_k}^N, m_0 \geq m_1 \geq \dots \rightarrow -\infty$; il existe $a \in B_{m_0}^N$ tel que :

$$a - \sum_{k < j} a_k \in B_{m_j}^N \quad \forall j.$$

2) Si $Q \in OPS^m(\mathbb{R}^n)$ est propre et $a \in B_m^N$, alors :

$$e^{-i\langle x, \theta \rangle} P(e^{i\langle \cdot, \theta \rangle} a(z, w; \cdot, \theta)) \in B_{m+m'}^N,$$

avec développement asymptotique :

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_{\theta}^{\alpha} q(x, \theta) \partial_x^{\alpha} a(z, w; x, \theta).$$

On va définir les noyaux qui nous intéressent.

Etant donné $a \in B_m^N$, on pose, pour tout $\varepsilon, \varepsilon' > 0$:

$$E_{\varepsilon, \varepsilon'}^a(x, t; y, s) = \int e^{i\langle x-y, \theta \rangle} a(s+i\varepsilon, t+i\varepsilon'; x, \theta) d\theta,$$

c'est à dire la distribution :

$$\begin{aligned} \langle E_{\varepsilon, \varepsilon'}^a, \chi(x, t; y, s) \rangle &= \\ &= \int e^{i\langle x-y, \theta \rangle} a(s+i\varepsilon, t+i\varepsilon'; x, \theta) \chi(x, t; y, s) \\ &\quad d\theta dx dy dt ds, \quad \chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+2}) \end{aligned}$$

(comme intégrale oscillante).

Or je dis qu'il existe la limite :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+, \varepsilon' \rightarrow 0+} E_{\varepsilon, \varepsilon'}^a \stackrel{\text{def}}{=} E_a^+ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n+2}).$$

On peut le voir facilement en considérant des fonctions test :

$$\psi(x, y) \phi_1(t) \phi_2(s). \quad \text{Si } \zeta \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \zeta(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| < 1 \\ 0, & |\sigma| > 2 \end{cases},$$

et si $T_k(\phi_j)$, $j = 1, 2$, et le polynôme de Taylor de ϕ_j d'ordre k , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \phi_1(t) \phi_2(s) &= [\phi_1 - T_k(\phi_1) \zeta(t)] \phi_2(s) + (1-\zeta(t)) T_k(\phi_1) \phi_2(s) = \\ &= [\phi_1 - T_k(\phi_1) \zeta(t)] [\phi_2 - T_k(\phi_2) \zeta(s)] + \\ &\quad + [\phi_1 - T_k(\phi_1) \zeta(t)] (1-\zeta(s)) T_k(\phi_2) + \\ &\quad + [\phi_2 - T_k(\phi_2) \zeta(s)] (1-\zeta(t)) T_k(\phi_1) + \\ &\quad + (1-\zeta(t))(1-\zeta(s)) T_k(\phi_1) T_k(\phi_2) \end{aligned}$$

Or si K est grand $\langle E_{\varepsilon, \varepsilon'}^a, \psi(x, y) [\phi_1 - T_k(\phi_1) \zeta(t)] [\phi_2 - T_k(\phi_2) \zeta(s)] \rangle$ a évidemment une limite finie pour $\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0+$, ainsi que :

$$\langle E_{\varepsilon, \varepsilon'}^a, \psi(x, y) [\phi_1 - T_k(\phi_1) \zeta(t)] (1-\zeta(s)) T_k(\phi_2) \rangle \quad \text{et}$$

$$\langle E_{\varepsilon, \varepsilon'}^a, \psi(x, y) [\phi_2 - T_k(\phi_2) \zeta(s)] (1-\zeta(t)) T_k(\phi_1) \rangle.$$

Le dernier terme étant supporté pour $|t| \geq 1$ et $|s| \geq 1$, l'existence de la limite est évidente. On estime maintenant le $WF(E_a^+)$. On trouve que :

$$WF(E_a^+) \subset \{(x, t, \xi, \tau; x, s, -\xi, \sigma) \mid t\tau = s\sigma = 0, \tau \geq 0, \sigma \geq 0\}$$

$$\cup \{(x, t, \theta, \tau; y, s, 0, \sigma) \mid t\tau = s\sigma = 0, \tau \geq 0, \sigma \geq 0\} = \mathcal{L} \cup \mathcal{m}$$

En plus, si $a \in S^{-\infty}$, on a $WF'(E_a^+) \subset \mathcal{m}$.

Pour le démontrer on considère :

$$\langle E_a^+, e^{-i[\langle x, \xi \rangle + \langle y, \eta \rangle + t\tau + s\sigma]} \psi(x, y) \phi_1(t) \phi_2(s) \rangle$$

avec ψ, ϕ_1, ϕ_2 à support compact.

Soit $\rho = (x_0, t_0, \xi_0, \tau_0; y_0, s_0, \eta_0, \sigma_0) \in T^*\mathbb{R}^{2n+2} \setminus 0$.

On voit que :

1) Si $\xi_0 \neq -\eta_0$, on peut intégrer par parties en x et y , et déduire que $\rho \notin WF(E_a^+)$.

2) Si $x_0 \neq y_0$ et $(\xi_0, \eta_0) \neq (0, 0)$ on intègre par parties en θ et puis en x et y (utilisant spectre) et $\rho \notin WF(E_a^+)$.

3) Si $\sigma_0 < 0$ ou $\tau_0 < 0$, alors $\rho \notin WF(E_a^+)$.

En effet si $g(z)$ est holomorphe sur \mathbb{C}_+ et si pour un N on a $|\partial_z^j g(z)| \leq C |z|^{N-j}$ sur les bornés de \mathbb{C}_+ , en définissant la distribution $g(s + i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g(s + i\varepsilon)$, on trouve que $\int e^{-is\sigma} g(s + i0) ds$ est nulle pour $\sigma < 0$.

4) Si $s_0 \sigma_0 \neq 0$ ou $t_0 \tau_0 \neq 0$ alors $\rho \notin WF(E_a^+)$.

Par exemple si $s_0 \sigma_0 \neq 0$, on intègre par parties en s en notant que près de $s_0 \neq 0$, $\partial_1^\ell E_a^+$ est une distribution d'ordre fini indépendant de ℓ !

N.B. : hors de $\{t = 0\} \cup \{s = 0\}$ E_a^+ est la distribution de Fourier :

$$\int e^{i\langle x-y, \theta \rangle} a(s, t, x, \theta) d\theta.$$

On définit alors le noyau :

$$H(t-s) E_a^+$$

On vérifie facilement, grâce au théorème d'Hörmander que :

$$WF'(H(t-s)E_a^+) \subset A_1 \cup A_2 \subset T^*(\mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\}) ;$$

où :

$$A_1 = \{(x, t, \xi, \tau; x, s, \xi, \sigma) \mid t \geq s, t\tau = s\sigma = 0, \tau \geq 0, \sigma \leq 0\}$$

$$\cup \{(x, 0, \xi, \tau; x, 0, \xi, \sigma) \mid \tau \geq \sigma\} \cup \Delta(T^*\mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\}),$$

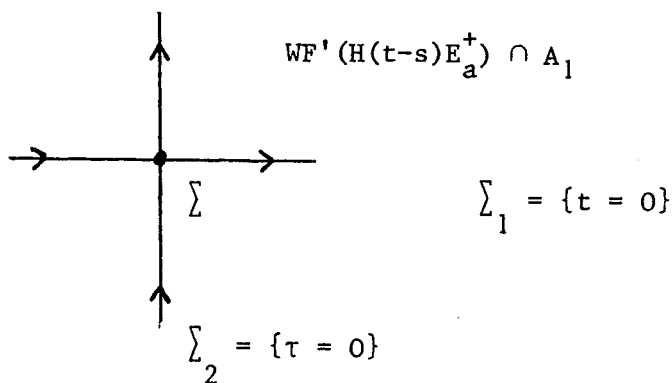
$$A_2 = \{(x, t, 0, \tau; y, s, 0, \sigma) \mid t \geq s, t\tau = s\sigma = 0, \tau \geq 0, \sigma \leq 0\}$$

$$\cup \{(x, 0, 0, \tau; y, 0, 0, \sigma) \mid \tau \geq \sigma\}$$

$$\cup \{(x, t, 0, \tau; y, t, 0, \tau) \mid \tau \neq 0\}.$$

Il convient de noter que si $a \in S^{-\infty}$, alors $WF'(H(t-s)E_a^+) \subset A_2$.

On a l'interprétation géométrique de A_1 (cf. le cas modèle):



On a le lemme fondamental :

Lemme :

$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in B_0^{c+1+\varepsilon}$ t.q. :

$$(t \partial_t - \lambda(x, D_x)) (H(t-s) E_a^+) = \delta(t-s) \otimes \delta(x-y) + R(x, t; y, s)$$

avec $WF'(R) \subset A_2$.

Preuve :

Quelque soit $a \in B_m^N$ on trouve :

$$t \partial_t H(t-s) E_a^+ = t \delta(t-s) E_a^+ + H(t-s) (t \partial_t - \lambda(x, D_x)) E_a^+.$$

Maintenant :

$$(t \partial_t - \lambda(x, D_x)) E_a^+ = E_b^+, \text{ avec}$$

$$b(z, w; x, \theta) = w \frac{\partial}{\partial w} a - e^{i\langle x, \theta \rangle} \lambda(x, D_x) [e^{i\langle \cdot, \theta \rangle} a(z, w; x, \theta)].$$

L'idée est de chercher $a \in B_0^N$ de façon que $b \in B_{-\infty}^N$.

Si $a \sim \sum_{j \leq 0} a_j$ on est conduit aux équations de transport suivantes :

tes :

$$w \frac{\partial}{\partial w} a_0 - \lambda_0(x, \theta) a_0 = 0$$

$$w \frac{\partial}{\partial w} a_{-1} - \lambda_0(x, \theta) a_{-1} = \lambda_{-1}(x, \theta) a_0 + \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n \partial_{\theta_j} \lambda_0 \partial_{x_j} a_0$$

D'autre part il faut considérer le terme :

$$t \delta(t-s) E_a^+ = \delta(t-s) E_{wa}^+ = E_{wa}^+ |_{z,w} |_{z=w}$$

Si l'on veut que $E_{wa}^+ = (x-y)$ on est conduit à imposer les conditions initiales :

$$wa \Big|_{z=w} = 1 \quad , \quad a \Big|_{z=w} = 1/w \quad ,$$

i.e. $a_0 \Big|_{z=w} = 1/w \quad , \quad a_{-j} \Big|_{z=w} = 0 \quad , \quad j \geq 1.$

Si bien qu'on trouve :

$$a_0(z, w; x, \theta) = z^{-\lambda_0(x, \theta) - 1} w^{\lambda_0(x, \theta)} \in B_0^{C+1+\varepsilon}.$$

Alors :

$$(w \frac{\partial}{\partial w} - \lambda_0) a_{-1} = z^{-\lambda_0 - 1} w^{\lambda_0} \{ \lambda_{-1} + \phi_{-1}(x, \theta) \log w - \phi_{-1}(x, \theta) \log z \}$$

avec un symbole ϕ_{-1} homogène de degré -1 en θ .

Il suffit alors de prendre :

$$\begin{aligned} a_{-1} = z^{-\lambda_0 - 1} w^{\lambda_0} \{ & \lambda_{-1} (\log w - \log z) + \\ & + \frac{1}{2} \phi_{-1}(x, \theta) (\log w)^2 - \phi_{-1}(x, \theta) \log z \log w \\ & + \frac{1}{2} \phi_{-1}(x, \theta) (\log z)^2 \} \in B_0^{C+1+\varepsilon} \end{aligned}$$

Noter que $a_{-1} \Big|_{z=w} = 0.$

Les autres équations de transport se traitent de la même manière en obtenant a_{-j} , $j \geq 1$, comme une combinaison de termes du type $(\log w)^{\ell} (\log z)^n$ x fonctions homogènes de degré -j en θ .

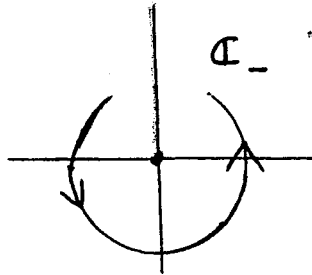
De façon analogue on trouve :

$$(t \partial_t - \lambda(x, D_x))(-H(s-t)E_a^+) = I + R.$$

Avec $WF'(H(s-t)E_a^+) \subset A'_1 \cup A'_2$ et $WF'(R) \subset A'_2$, (A'_1 et A'_2 sont définis comme A_1 et A_2 en changeant $t \geq s$ en $t \leq s$). De la même manière on considère :

$$a(z, w; x, \theta) \quad (z, w) \in \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+,$$

vérifiant des conditions analogues au cas \mathbb{C}_+ et, l'on définit :



$$E_a^- = \int e^{i\langle x-y, \theta \rangle} a(s-i\theta, t-i\theta; x, \theta) d\theta.$$

Ensuite on définit les noyaux $H(t-s)E_a^-$, $-H(s-t)E_a^-$.

On laisse maintenant au lecteur de continuer jusqu'à obtenir le 1er théorème de propagation des singularités comme dans le cas $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pour donner des résultats analogues sur ces modèles quand λ_0 évite les entiers, on définit :

Définition :

$$\hat{S}^m = \{ a(\rho, y, \theta) \in C^\infty(]0, 1[\times \mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\theta^n) \mid \forall \varepsilon > 0, \forall j, \alpha, \beta$$

$$\left| \rho^\varepsilon (\rho \partial_\rho)^j \partial_y^\alpha \partial_\theta^\beta a(\rho, y, \theta) \right| \leq C(1+|\theta|)^{m-|\beta|}$$

$$\forall \rho \in]0, 1[, \forall y \in \text{compact}, \forall \theta \in \mathbb{R}^n \}.$$

C'est un espace de Fréchet et on a les lemmes suivants :

1) Soient $a_j \in S^{\wedge_{m_j}}$, $m_j \rightarrow -\infty$; alors il existe $a \in S^{\wedge_{m_0}}$ tel que $a - \sum_{j < k} a_j \in S^{\wedge_{m_k}} \forall k$.

2) Soit $Q \in L^m(\mathbb{R}^n)$, propre et $a \in S^{\wedge_{m!}}$, alors :

$$e^{-i\langle y, \theta \rangle} Q [e^{i\langle \cdot, \theta \rangle} a(\rho, \cdot, \theta)] \in S^{\wedge_{m+m}},$$

avec le développement asymptotique :

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_{\theta}^{\alpha} q(y, \theta) \partial_y^{\alpha} a(\rho, y, \theta).$$

Exemple :

Si $\text{Re } \lambda_0(y, \theta) \geq 0$, alors $\rho^{\lambda_0(y, \theta)} \in S^{\wedge_0}$.

On construit maintenant un certain noyau.

Etant donné $a \in S^{\wedge_m}$ on définit $T_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n+2})$ par :

$$\begin{aligned} \langle T_a, \phi(x, t; y, s) \rangle &= \text{def} \\ & \int_0^1 \int_0^1 \int e^{i\langle x-y, \theta \rangle} a(\rho, y, \theta) \phi(x, t; y, \rho t) d\rho d\theta dx dy dt \end{aligned}$$

Il convient de noter que l'opérateur associé :

$$T_a : C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

On estime :

$$\text{WF}'(T_a) \subset g \cup \mathcal{F} \subset T^*(\mathbb{R}^{2n+2}) \setminus 0$$

$$g = \{(x, t, \xi, \tau; x, s, \xi, \sigma) \mid \frac{s}{t} \in [0, 1], \frac{\tau}{\sigma} \in [0, 1], t \tau = s \sigma = 0\}$$

$$\cup \Delta(T^*\mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\}).$$

$$\mathcal{F} = \{(x, t, 0, \tau; y, 0, 0, \sigma) \mid t \tau = 0, \tau/\sigma \in [0, 1]\}$$

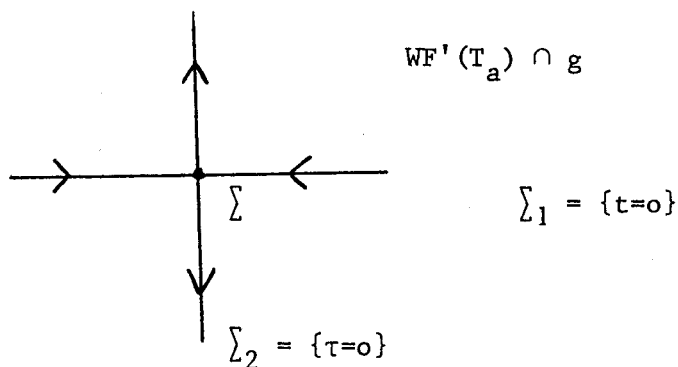
$$\cup \{(x, t, 0, \tau; y, t, 0, \tau) \mid \tau \neq 0\}.$$

Noter que si $a \in S^{\wedge-\infty}$, alors $WF'(T_a) \subset \mathcal{F}$

Démonstration :

On procède comme dans le cas modèle :

Interprétation géométrique de g :



On a maintenant le théorème :

Théorème :

Soit $\text{Re } \lambda_0(x, \xi) \leq -1 \quad \forall (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors il existe $a \in S^{\wedge 0}$ tel que

$$WF'(T_a P - I) \subset \mathcal{F}, \quad P = t \partial_t - \lambda(x, D_x).$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 (T_a P f)(x,t) &= \int_0^1 \int e^{i\langle x-y, \theta \rangle} a(\rho, y, \theta) [\rho t (\partial_t f)(\rho t, y) \\
 &\quad - \lambda(y, D_y) f(\rho t, y)] d\rho d\theta dy \\
 &= \int_0^1 \int e^{i\langle x-y, \theta \rangle} \{ \rho a(\rho, y, \theta) \frac{\partial}{\partial \rho} [f(\rho t, y)] \\
 &\quad - e^{i\langle y, \theta \rangle} T_{\lambda(y, D_y)} (e^{-i\langle \cdot, \theta \rangle} a(\rho, \cdot, \theta)) f(\rho t, y) \} \\
 &= \int e^{i\langle x-y, \theta \rangle} a(1, y, \theta) f(t, y) d\theta dy \\
 &\quad - \int_0^1 \int e^{i\langle x-y, \theta \rangle} \{ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} a + a e^{i\langle y, \theta \rangle} \\
 &\quad \quad [T_{\lambda(y, D_y)} (e^{-i\langle \cdot, \theta \rangle} a)] \} f(\rho t, y) d\theta d\rho dy
 \end{aligned}$$

On est conduit aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(1, y, \theta) \sim 1 \\ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} a + a e^{i\langle y, \theta \rangle} [T_{\lambda(y, D_y)} (e^{-i\langle \cdot, \theta \rangle} a)] \in \Lambda_{\infty} \end{array} \right.$$

En écrivant $a \sim \sum_{j>0} a_{-j}$, $a_{-j} \in S^{-j}$, on trouve les équations de transport suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} a_0 + a_0 + \lambda_0(y, \theta) a_0 = 0 \\ a_0(1, y, \theta) = 1 \\ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} a_{-1} + a_{-1} + \lambda_0(y, \theta) a_{-1} = \text{termes d'erreurs} \in \Lambda_{-1} \\ a_{-1}(1, y, \theta) = 0 \end{array} \right.$$

On obtient :

$$a_0 = \rho^{-\lambda_0(y,\theta)-1}$$

et ensuite :

$$a_{-j}(\rho, y, \theta) = \rho^{-\lambda_0(y,\theta)-1} \sum_{\ell \in \text{fini}} (\log \rho)^\ell h_{\ell, -j}(y, \theta)$$

↑
homogène de degré $-j$ en θ

On laisse au lecteur de démontrer le 2ème et 3ème théorème de propagation des singularités comme dans le cas modèle $\lambda \in \mathbb{C}$, (supposant, respectivement, $\lambda_0(y, \theta) \notin \{0, +1, +2, \dots\}$ ou $\lambda_0(y, \theta) \notin \{-1, -2, \dots\}$).

Références :

N. HANGES : "Parametrics and propagation of singularities for operators with non-involutive characteristics". Ind. Math. J., 28 (1979), 87-97.

PARAMETRIXES POUR DES SYSTEMES FUCHSIENS

PARENTI

Istituto Matematico "S. Pincherle"

Piazza di Porta S. Donato, 5

40 127 - BOLOGNA - ITALY

(Chapitre II)

On considère maintenant un système Fuchsien général :

$$(1) \quad P u = (I_N t \partial_t - A(t, x, D_t, D_x)) u = f ,$$

où A est une matrice $N \times N$ d'o.p.d. classiques (et propre) d'ordre 0 définis sur \mathbb{R}^{n+1} ; on note par $a(t, x, \tau, \xi) \sim a_0(t, x, \tau, \xi) + a_{-1}(t, x, \tau, \xi) + \dots$ le symbole de A ($a_0(t, x, \tau, \xi)$ est le symbole principal de A). On s'intéresse à étudier $WF(u) \setminus WF(Pu)$ au voisinage d'un point $\rho_0 = (0, x_0, 0, \xi_0) \in \tilde{\Sigma} = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

L'idée naturelle est de chercher un o.p.d. Q d'ordre 0, elliptique au point ρ_0 , t.q. , $PQ \equiv Q(I_N t \partial_t - B(x, D_x))$ (près de ρ_0) avec une nouvelle matrice d'ordre 0, B qui ne dépend pas de t et de D_t . Si cela est possible on peut alors appliquer les résultats précédents.

On va montrer qu'une telle matrice Q existe si une certaine condition est satisfaite. Précisément, considérons le polynôme (indiciel) :

$$(2) \quad I_{\rho_0}^P(\zeta) = \det(\zeta I_N - a_0(\rho_0)), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Définition :

On dit que P satisfait la condition de Fuchs en ρ_0 si pour les racines $\zeta_1(\rho_0), \dots, \zeta_N(\rho_0)$ de $I_{\rho_0}^P(\zeta) = 0$ on a $\zeta_i(\rho_0) - \zeta_j(\rho_0) \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, \dots, N$.

On a le théorème suivant :

Théorème 1 :

Si P satisfait la condition de Fuchs au point ρ_0 , il existe deux matrices $N \times N$, Q_1, Q_2 , d'o.p.d. d'ordre 0, elliptiques près de ρ_0 ,

telles que :

$$(I_N t \partial_t - A(t, x, D_t, D_x))Q_1 \equiv Q_2(I_N t \partial_t - B(x, D_x)) \text{ (près de } \rho_0),$$

où B est une matrice N x N d'o.p.d. d'ordre 0 ; à noter que :

$$I_{\rho_0}^P(\zeta) = I_{\rho_0}^{P'}(\zeta), \quad P' = I_N t \partial_t - B(x, D_x).$$

Preuve :

Supposons qu'on ait déjà trouvée une matrice Q elliptique près de ρ_0 et telle que :

$$(I_N t \partial_t - A)Q \equiv Q(I_N t \partial_t - \tilde{A}), \quad \text{près de } \rho_0,$$

où \tilde{A} est une matrice N x N dont le symbole dépend seulement de x, ξ et de $t\tau$ dans un voisinage conique de ρ_0 (naturellement $\tilde{a}_0(\rho_0) = a_0(\rho_0)$). On va montrer qu'il existe une matrice N x N d'ordre 0, F elliptique près de ρ_0 , avec symbole dépendant seulement de x, ξ et de $t\tau$, t.q. $(I_N t \partial_t - \tilde{A})F = (I_N t \partial_t - B(x, D_x))$, avec B indépendante de t et de τ . Ceci est classique (astuce de Chazarain). On pose $F \sim I_N + F_{-1} + \dots$ et $B \sim B_0 + B_{-1} + \dots$ et on commence par chercher F_{-1} et B_0 , t.q. $(I_N t \partial_t - \tilde{A})(I + F_{-1}) = I_N t \partial_t - B_0$ modulo OPS^{-1} .

En égalant les symboles principaux, on trouve :

$$it\tau f_{-1}(t, x, \tau, \xi) - \tilde{a}_0(x, \xi, t\tau) = -b_0(x, \xi)$$

posons : $b_0(x, \xi) = \tilde{a}_0(x, \xi, 0)$ et

$$f_{-1}(t, x, \tau, \xi) = \frac{1}{i} \frac{\tilde{a}_0(x, \xi, 0) - \tilde{a}_0(x, \xi, t\tau)}{t\tau}$$

Il vient que f_{-1} est bien défini et C^∞ (et dépend seulement de x, ξ, t, τ). En procédant de cette manière, on arrive à la conclusion. On pose alors $Q_1 = QF, Q_2 = Q$.

Donc tout le problème revient à montrer l'existence d'une matrice d'ordre $0, Q$ elliptique près de ρ_0 , et telle que $IQ = Q(I_N t \partial_t - \tilde{A})$ avec le symbole de \tilde{A} dépendant seulement de x, ξ et t, τ dans un voisinage conique de ρ_0 .

Commençons par un cas particulier. Supposons qu'au point ρ_0 $a_0(\rho_0)$ soit triangulaire supérieur de la forme :

$$(3) \quad a_0(\rho_0) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \square & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Admettons pour un instant le lemme suivant.

Lemme 1 :

Soit M une variété C^∞ et soit $a(z; t, \tau) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^2)$ une matrice $N \times N$. Soit $z_0 \in M$ et supposons que :

$$a(z_0; 0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \square & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Alors il existe deux matrices $N \times N, q(z; t, \tau) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^2)$ et

$\tilde{a}(z;s) \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ avec :

i) $q(z_0;0,0) = I_N$

ii) $\tilde{a}(z;0) = a(z_0;0,0)$

telles que :

$$\begin{aligned} \text{Lq} &\stackrel{\text{def}}{=} (t \partial_t - \tau \partial_\tau)q(z;t,\tau) - [a(z;t,\tau)q(z;t,\tau) - q(z;t,\tau)\tilde{a}(z;t\tau)] \\ &= 0 \text{ au voisinage } W \times [-T,T] \times [-T,T] \text{ de } (z_0;0,0). \end{aligned}$$

Supposons $|\xi_0| = 1$ et considérons les ensembles :

$$\begin{aligned} \Lambda^\varepsilon(\rho_0) &= \{(t,x;\tau,\xi') \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}_\tau \times \mathbb{S}^{n-1} \mid |\xi' - \xi_0| < \varepsilon, \\ &\quad |x - x_0| < \varepsilon, |t|, |\tau| < \varepsilon\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^\varepsilon(\rho_0) &= \{(t,x;\tau,\xi) \in T^*\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \mid \xi \neq 0, (t,x, \frac{\tau}{|\xi|}, \frac{\xi}{|\xi|}) \\ &\quad \in \Lambda^\varepsilon(\rho_0)\}, \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

On cherche $Q, \tilde{A} \in OPS^0$ avec symboles $\sum_{j \geq 0} q_{-j}, \sum_{j \geq 0} \tilde{a}_{-j}$.

Imposant que $(I_N t \partial_t - A)Q = Q(I_N t \partial_t - \tilde{A})$ on obtient des équations de transport. La première est :

$$(t \partial_t - \tau \partial_\tau)q_0 - \{a_0 q_0 - q_0 \tilde{a}_0\} = 0$$

On utilise le lemme 1 avec $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$, $z = (x, \xi')$, si bien

qu'il existe deux matrices $\hat{q}_0(t, x; \tau, \xi')$, $\tilde{a}_0(x, \xi'; t\tau)$ (définies sur $M \times \mathbb{R}_{(t, \tau)}^2$) telles que :

$$\hat{q}_0(0, x_0; 0, \xi_0) = I_N, \quad \tilde{a}_0(x, \xi_0; 0) = a_0(\rho_0) \text{ et}$$

$$(t \partial_t - \tau \partial_\tau) \hat{q}_0 = a_0 \hat{q}_0 - \hat{q}_0 \tilde{a}_0 \text{ sur } \Lambda^\varepsilon(\rho_0) \text{ (pour quelque } \varepsilon > 0).$$

On définit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0(t, x; \tau, \xi) = \hat{q}_0(t, x, \tau/|\xi|, \xi/|\xi|) \\ \tilde{a}_0(t, x, \tau, \xi) = \tilde{a}_0(x, \xi/|\xi|; t\tau/|\xi|) \end{array} \right. \quad (\text{sur } V^\varepsilon(\rho_0))$$

On peut bien supposer que q_0 et \tilde{a}_0 soient définies sur $T^*\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$.

Donc, si Q_0 et \tilde{A}_0 sont des o.p.d. de symbole q_0 et \tilde{a}_0 , on trouve déjà

$$I_N(t \partial_t - A)Q_0 = Q_0(I_N t \partial_t - \tilde{A}) \text{ modulo } OPS^{-1} \text{ dans un voisinage conique de } \rho_0.$$

En continuant (et utilisant une variante du lemme 1 avec second membre) on conclut.

Montrons maintenant le lemme 1. Avant tout, on prouve le lemme au niveau de séries formelles, i.e. étant données $a(z; t, s) \sim \sum a^{rs}(z) t^r s^s$, on cherche $q(z; t, s) \sim \sum q^{rs}(z) t^r s^s$ et $\tilde{a}(z; t\tau) \sim \sum \tilde{a}^\ell(z) (t\tau)^\ell$ telles que $(Lq)^{rs}(z) = 0$, $\forall r, s \geq 0$. Or $(Lq)^{00}(z) = -[a^{00}(z)q^{00}(z) - q^{00}(z)\tilde{a}^0(z)] = 0$. Cette relation est satisfaite au point z_0 si $q^{00}(z_0) = I_N$ et $\tilde{a}^0(z_0) = a^{00}(z_0)$.

L'application :

$$(q, \tilde{a}) \mapsto F(z; q, \tilde{a}) = a^{00}(z)q - q\tilde{a}$$

est telle que l'application linéaire dérivée partielle :

$$dF_{(q, \tilde{a})}(z_0; q = I_N, \tilde{a} = a^{00}(z_0))$$

$$: (\Delta q, \Delta \tilde{a}) \mapsto a^{00}(z_0) \Delta q - \Delta q a^{00}(z_0) - \Delta \tilde{a}$$

est surjective. Utilisant le théorème des fonctions implicites il y a donc un voisinage $V \ni z_0$ et deux matrices C^∞ sur V , $q^{00}(z)$, $\tilde{a}^{00}(z)$, avec $q^{00}(z_0) = I_N$, $\tilde{a}^{00}(z_0) = a^{00}(z_0)$ t.q. : $F(z, q^{00}(z), \tilde{a}^{00}(z)) = 0, \forall z \in V$.

En imposant $(Lq)^{10}(z) = 0$ on trouve :

$$q^{10}(z) - a^{10}(z)q^{00}(z) - a^{00}(z)q^{10}(z) + q^{10}(z)\tilde{a}^{00}(z) = 0$$

i.e. :

$$(4) \quad q^{10}(z)(I_N + \tilde{a}^{00}(z)) - a^{00}(z)q^{10}(z) = a^{10}(z)q^{00}(z).$$

Dès que le spectre de $I_N + \tilde{a}^{00}(z_0)$ et celui de $a^{00}(z_0)$ sont disjoints, on peut résoudre (4) (en C^∞ !) dans un voisinage $V' \subset V$ de z_0 . De la même manière on résoud $(Lq)^{01}(z) = 0$ sur V' . Pour résoudre $(Lq)''(z) = 0$, on observe que $(t \partial_t q - \tau \partial_\tau q)^{11} = 0$ et on est conduit à résoudre : $a^{00}(z)q''(z) - q^{00}(z)\tilde{a}'(z) =$ matrice connue. On pose $q''(z) = I_N$ et puisque $q^{00}(z_0) = I_N$, on détermine $\tilde{a}'(z)$ sur un voisinage $V'' \subset V'$ de z_0 .

Ensuite, on résoud $(Lq)^{20} = 0, (Lq)^{02} = 0$ et ainsi de suite. Il faut remarquer qu'il existe un voisinage $W \ni z_0$ sur lequel on peut construire toutes les matrices $q^{rs}(z), \tilde{a}^{kl}(z) \in C^\infty(W)$ d'une façon que $(Lq)^{rs}(z) = 0, \forall z \in W$ et $\forall r, s$. Pour s'en convaincre il suffit de tenir compte du fait que les équations linéaires $\alpha(K I_N + \tilde{a}^{00}(z)) - a^{00}(z)\beta =$ donné, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sont toutes résolubles (en C^∞) sur un même voisinage de z_0 .

En conclusion, utilisant le lemme de Borel on construit deux matrices : $\hat{q}(z;t,\tau), a(z,t\tau) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^2)$ telles que $L\hat{q} = (t \partial_t - \tau \partial_\tau)\hat{q} - [a \hat{q} - \hat{q} a] = g$ est C^∞ et plate pour $t = 0, \tau = 0$ sur un voisinage $W \ni z_0$. Il est alors facile de trouver $\hat{q}(z;t,\tau) \in C^\infty(W \times \mathbb{R}^2)$, plate sur $t = 0, \tau = 0$ et telle que $(\hat{q})' = -g$ sur $W \times [-T, T] \times [-T, T]$ pour quelque $T > 0$.

En posant $q = \hat{q} + \hat{q}$ on conclut la démonstration du lemme 1. Il faut passer maintenant du cas simple où $a_0(\rho_0)$ a la forme (3) au cas général (supposant toujours la condition de Fuchs satisfaite). On se rend alors facilement compte qu'on peut supposer $a_0(\rho_0)$ triangulaire supérieure par Blocs, de la manière suivante :

$$(5) \quad a_0(\rho_0) = \begin{pmatrix} a_{11}(\rho_0) & & & \\ & a_{22}(\rho_0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{kk}(\rho_0) & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad k \geq 2$$

avec :

$$i) \quad a_{jj}(\rho_0) = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \quad \lambda_j \in \mathbb{C}$$

ii) Spectre $(a_{jj}(\rho_0) + r I_{N_j}) \cap \text{spectre}(a_{ii}(\rho_0)) = \emptyset$,
 $i, j = 1, \dots, k, i \neq j, r \in \mathbf{Z}$.

On va montrer qu'on peut découper le système (1) en k blocs correspondants aux $a_{jj}(\rho_0), j = 1, \dots, k$.

Pour simplifier un peu je supposerai que $k = 2$. Admettons pour un instant le lemme suivant :

Lemme 2 :

Soit M une variété C^∞ et soit $a(z; t, \tau) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^2)$ une matrice $N \times N$. Soit $z_0 \in M$ et supposons que :

$$a(z_0; 0, 0) = \begin{pmatrix} a_{11}(z_0; 0, 0) & & & 0 \\ & \cdots & & \\ & & & \\ 0 & & & a_{22}(z_0; 0, 0) \end{pmatrix}$$

$a_{jj}(z_0; 0, 0)$ étant deux blocs de dimension $N_j, j = 1, 2, N_1 + N_2 = N$. On fait l'hypothèse que $\text{spectre}(a_{11}(z_0) + r I_{N_1}) \cap \text{spectre}(a_{22}(z_0)) = \emptyset$ pour chaque $r \in \mathbf{Z}$.

Alors il existe deux matrices $N \times N, q(z; t, \tau), \tilde{a}(z; t, \tau) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^2)$ avec :

i) $q(z_0; 0, 0) = I_N$

$$ii) \tilde{a}(z;t,\tau) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(z;t,\tau) & 0 \\ \text{---} & \text{---} \\ 0 & \tilde{a}_{22}(z;t,\tau) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \tilde{a}_{jj}(z_0;0,0) = \\ a_{jj}(z_0;0,0), \quad j=1,2, \end{matrix}$$

telles que :

$$Lq = (t \partial_t - \tau \partial_\tau)q - [aq - q\tilde{a}] = 0$$

sur un voisinage $W \times [-T, T] \times [-T, T]$ de $(z_0; 0, 0)$.

Le lemme étant admis on cherche $Q, \tilde{A} \in OPS^0$ avec symboles

$\sum_{j \geq 0} q_{-j}, \sum_{j \geq 0} \tilde{a}_{-j}$ de façon que $(I_N t \partial_t - A)Q \equiv Q(I_N t \partial_t - \tilde{A})$ près de ρ_0 . La première équation de transport qu'on obtient est toujours :

$$(t \partial_t - \tau \partial_\tau)q_0 - [a_0 q_0 - q_0 \tilde{a}_0] = 0$$

On utilise le lemme 2 avec $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$, $z = (x, \xi')$, si bien qu'il existe deux matrices $\hat{q}_0(t, x; \tau, \xi), a_0(t, x; \tau, \xi)$ t.q. : $\hat{q}_0(0, x_0; 0, \xi_0) = I_N$, $a_0(\rho_0) = a_0(\rho_0)$ et $(t \partial_t - \tau \partial_\tau)\hat{q}_0 = a_0 \hat{q}_0 - \hat{q}_0 \tilde{a}_0$ sur $\Lambda^\varepsilon(\rho_0)$, pour quelque $\varepsilon > 0$. On définit alors :

$$\begin{cases} q_0(t, x; \tau, \xi) = \hat{q}_0(t, x, \tau/|\xi|, \xi/|\xi|) \\ \tilde{a}_0(t, x; \tau, \xi) = \tilde{a}_0(t, x, \tau/|\xi|, \xi/|\xi|) \end{cases} \quad (\text{sur } V^\varepsilon(\rho_0))$$

On prolonge q_0 et \tilde{a}_0 sur $T^*\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 (\xi \neq 0)$ et si Q_0 et \tilde{A}_0 sont des o.p.d. dans OPS^0 avec symbole q_0 et \tilde{a}_0 on trouve que $(I_N t \partial_t - A)Q_0 - Q_0(I_N t \partial_t - \tilde{A}) \in OPS^{-1}$ (dans un voisinage unique de ρ_0). En continuant (et utilisant encore une variante du lemme 2 avec second membre) on conclut.

Pour démontrer le lemme 2 on se limite au cas formel (on ajoutera ensuite un terme plat à $t = 0, \tau = 0$ exactement comme dans le lemme 1).

Posons : $a(z;t,\tau) \sim \sum a^{rs}(z)t^r\tau^s$ et cherchons $q(z;t,\tau) \sim \sum q^{rs}(z)t^r\tau^s$, $\tilde{a}(z;t,\tau) \sim \sum \tilde{a}^{rs}(z)t^r\tau^s$ de façon que $(Lq)^{rs}(z) = 0 \forall r,s \geq 0$. On a :

$$(Lq)^{00}(z) = - [a^{00}(z)q^{00}(z) - q^{00}(z)\tilde{a}^{00}(z)]$$

Pour :

$$(\hat{q}, \tilde{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & q_{12} \\ q_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}, \quad (\hat{q}, I_N) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} I_{N_1} & q_{12} \\ q_{21} & I_{N_2} \end{pmatrix}, \quad (0, \tilde{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{12} \end{pmatrix}$$

on considère la fonction (quadratique !) :

$$(\hat{q}, \tilde{a}) \rightarrow F(z; \hat{q}, \tilde{a}) = a^{00}(z) (\hat{q}, I_N) - (\hat{q}, I_N) (0, \tilde{a}).$$

On a :

$$F(z_0; \hat{q} = 0, \tilde{a} = a(z_0; 0, 0)) = 0.$$

D'autre part la différentielle par rapport à (\hat{q}, \tilde{a}) est donnée

par :

$$(\Delta\hat{q}, \Delta\tilde{a}) \mapsto dF_{(\hat{q}, \tilde{a})}^{(z_0)}(\Delta\hat{q}, \Delta\tilde{a}) = \begin{pmatrix} -\Delta\tilde{a}_{11} & a_{11}(z_0)\Delta q_{12} - \Delta q_{12}a_{22}(z_0) \\ a_{22}(z_0)\Delta q_{21} - \Delta q_{21}a_{11}(z_0) & -\Delta\tilde{a}_{22} \end{pmatrix}$$

qui est surjective dès que $a_{11}(z_0)$ et $a_{22}(z_0)$ n'ont pas de valeurs propres communes. On utilise le théorème de Dini pour conclure qu'il existe deux fonctions C^∞ , $z \rightarrow (\hat{q}(z), \tilde{a}(z))$ sur un voisinage $V \ni z_0$, telles que :
 $F(z; \hat{q}(z), \tilde{a}(z)) = 0$ sur V et $\hat{q}(z_0) = 0$, $\tilde{a}(z_0) = a^{oo}(z_0)$.

On pose alors :

$$q^{oo}(z) = \begin{pmatrix} I_{N_1} & \hat{q}_{12}(z) \\ \hat{q}_{21}(z) & I_{N_2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{a}^{oo}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(z) & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22}(z) \end{pmatrix}$$

Pour construire $q^{rs}(z)$ on observe que :

$$(Lq)^{rs}(z) = 0 \iff (r-s)q^{rs}(z) - [a^{oo}(z)q^{rs}(z) - q^{rs}(z)\tilde{a}^{oo}(z)] + q^{oo}(z)\tilde{a}^{rs}(z) = \text{matrice donnée.}$$

Avec les mêmes notations qu'avant on considère l'application (linéaire !) :

$$\begin{aligned} (\hat{q}, \tilde{a}) &\rightarrow F_{r-s}(z; \hat{q}, \tilde{a}) = (r-s)(\hat{q}, 0) \\ &\quad - [a^{oo}(z)(\hat{q}, 0) - (\hat{q}, 0)\tilde{a}^{oo}(z)] + q^{oo}(z)(0, \tilde{a}) \end{aligned}$$

En $z = z_0$ on trouve :

$$F_{r-s}(z; \hat{q}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & q_{12} a_{22}(z_0) - [a_{11}(z_0) - (r-s)I_{N_1}] q_{12} \\ q_{21} a_{11}(z_0) - [a_{22}(z_0) - (r-s)I_{N_2}] q_{21} & \hat{a}_{22} \end{pmatrix}$$

Grâce à l'hypothèse du lemme 2 on reconnaît facilement que les applications F_{r-s} sont inversibles (en C^∞) sur un même voisinage de z_0 , ce qui permet de construire les $q^{rs}(z), \hat{a}^{rs}(z) \in C^\infty$ sur un même voisinage W de z_0 . Le théorème 1 est ainsi démontré.

Si la condition de Fuchs n'est pas satisfaite les constructions précédentes tombent en défaut. On a toutefois le théorème suivant :

Théorème 2 :

Etant donné le système Fuchsien :

$$P = I_N t \partial_t - A(t, x; D_t, D_x) ,$$

supposons qu'au point $\rho_0 \in \Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, P ne vérifie pas la condition de Fuchs.

Il existe alors un système Fuchsien :

$$\tilde{P} = I_{\tilde{N}} t \partial_t - B(x, D_x) ,$$

où B est une matrice $\tilde{N} \times \tilde{N}$ d'o.p.d. classiques d'ordre 0 ne dépendant pas de t et de D_t , avec :

$$i) I_{\tilde{\rho}_0}^{\tilde{P}}(\zeta) = I_{\rho_0}^P(\zeta)$$

ii) $\tilde{N} > N$, \tilde{N} dépendant seulement de $a_0(\rho_0)$, tel que, quelles que soient $u, f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})^N$ avec

$$\rho_0 \notin WF(f) \quad , \quad \rho_0 \notin WF(Pu - f),$$

il existe $U, F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})^{\tilde{N}}$ avec

i) $WF(F) = WF(f)$ et $WF(u) = WF(U)$ dans un voisinage conique de

ρ_0 ,

ii) $\rho_0 \notin WF(\tilde{P}U - F)$.

Il est alors évident que l'étude de $WF(u) \setminus WF(f)$ près de ρ_0 se ramène à l'étude de $WF(U) \setminus WF(F)$ (près de ρ_0).

On démontre le théorème 2 en utilisant une astuce de Kashiwara-Oshima. On va donner dans la suite une démonstration du théorème 2 dans le cas particulier, mais significatif où $a_0(\rho_0)$ est formée par deux blocs triangulaires supérieurs du type suivant :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0(\rho_0) = N_1 \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{N_1} \\ \left(\begin{array}{cc} a_{11}(\rho_0) & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{\quad}_{N_2} \\ & a_{22}(\rho_0) \end{array} \right) \end{array} \right\} N_2, \quad N_1 + N_2 = N, \\ \\ a_{11}(\rho_0) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad a_{22}(\rho_0) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & * \\ & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \end{array} \right.$$

On a alors le lemme :

Lemme 3 :

Supposons que $a_0(\rho_0)$ ait la forme (6). Alors il existe :

- 1) Deux matrices $N \times N$, $Q_1, Q_2 \in OPS^0$, elliptiques près de ρ_0
- 2) Une matrice $N \times N$, $\mathcal{A}(t, x; D_t, D_x) \in OPS^0$ de la forme :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \overbrace{B_{11}(x, D_x)}^{N_1} & D_1(x, D_x) t \\ \hline E_1(x, D_x) \partial_t & \underbrace{B_{22}(x, D_x)}_{N_2} \end{pmatrix}^{N_2}$$

(A vertical dashed line separates the two columns. A horizontal dashed line separates the two rows. Brackets indicate dimensions: N_1 for the top-left block, N_2 for the bottom-right block, and N_1 for the left column and N_2 for the right column.)

avec $E_1 \in OPS^{-1}$ (de dimension $N_2 \times N_1$), $D_1 \in OPS^0$ (de dimension $N_1 \times N_2$),
telles que :

- i) $\mathcal{A}_0(\rho_0) = a_0(\rho_0)$
- ii) $(I_N t \partial_t - A)Q_1 = Q_2(I_N t \partial_t - \mathcal{A})$, près de ρ_0

En plus, si $a_0(t, x; \tau, \zeta)$ est triangulaire inférieure (par blocs) dans un voisinage conique de ρ_0 , on peut prendre $D_1(x, D_x) = 0$. On va montrer comment déduire le théorème 2 du lemme 3.

Si $Pu = f$, $u, f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})^N$, $\rho_0 \notin WF(f)$, posons $V = Q_1^{-1} u$,

$g = Q_2^{-1} f$. On aura $\mathcal{P}v = g$ (près de ρ_0), où $\mathcal{P} = I_N t \partial_t - \mathcal{A}$. Ecrivons $v = (v_1, v_2)$, $g = (g_1, g_2)$, si bien que :

$$\begin{cases} t \partial_t v_1 = B_{11} v_1 + D_1 t v_2 + g_1 \\ t \partial_t v_2 = E_1 \partial_t v_1 + B_{22} v_2 + g_2 \end{cases}$$

Posons : $w_1 = v_1$, $w_2 = t v_2$, $w_3 = v_2$. Alors :

$$t \partial_t w_1 = t \partial_t v_1 = B_{11} w_1 + D_1 w_2 + g_1 ;$$

$$t \partial_t w_2 = t \partial_t (t v_2) = t v_2 + t(t \partial_t v_2) = w_2 + t E_1 \partial_t w_1 +$$

$$+ B_{22} w_2 + t g_2 ; t \partial_t w_3 = t \partial_t v_2 = E_1 \partial_t w_1 + B_{22} w_3 + g_2.$$

Donc :

$$t \partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}(x, D_x) & D_1(x, D_x) & 0 \\ t E_1(x, D_x) \partial_t & I_{N_2} + B_{22}(x, D_x) & 0 \\ E_1(x, D_x) \partial_t & 0 & B_{22}(x, D_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ t g_2 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

En posant $\phi_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = w_3$, on trouve que :

$$(7) \quad t \partial_t \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t, x; D_t, D_x) & 0 \\ \phi_{21}(t, x; D_t, D_x) & \phi_{22}(t, x; D_t, D_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$$

où :

$$\Phi_{11} = \begin{pmatrix} B_{11} & D_1 \\ t E_1 \partial_t & I_{N_2} + B_{22} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{21} = (E_1 \partial_t \quad 0), \quad \Phi_{22} = B_{22} \quad \text{et}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_1 \\ t g_2 \end{pmatrix}, \quad G_2 = g_2.$$

On remarquera que :

1°) $WF(\phi) = WF(u)$, $WF(G) = WF(f)$ près de ρ_0

2°) La matrice $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & 0 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure

3°) Le symbole principal $\Phi_0(\rho_0)$ est encore de la forme

$$\begin{matrix} N_1 + N_2 & N_2 \\ \left\{ \begin{matrix} N_1 + N_2 \\ N_2 \end{matrix} \right. & \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & * & & \\ & & & \\ \hline & & \lambda^{-1} & * \\ & & & \lambda^{-1} \end{array} \right) \end{matrix}$$

On peut alors appliquer encore une fois le lemme 3, si bien que le système (7) se traduit (dans un voisinage conique de ρ_0) dans un système:

$$(8) \quad t\partial_t \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} N_1+N_2 \\ \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} N_1+N_2 \\ C_{11}(x, D_x) & 0 \\ C_{21}(x, D_x)\partial_t & \underbrace{C_{22}(x, D_x)}_{N_2} \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} N_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$$

ayant même polynôme indiciel à ρ_0 ($C_{21} \in OPS^{-1}$) et avec $\psi, H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})^{N_1+2N_2}$

t.q. $WF(\psi) = WF(u)$, $WF(H) = WF(f)$ près de ρ_0 . Définissons maintenant :

$$U_1 = \psi_1, U_2 = \partial_t \psi_1, U_3 = \psi_2.$$

Alors on vérifie que :

$$t\partial_t \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(x, D_x) & 0 & 0 \\ 0 & C_{11}(x, D_x) - I_{N_1+N_2} & 0 \\ 0 & C_{21}(x, D_x) & C_{22}(x, D_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_1 \\ \partial_t H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$$

Le théorème 3 s'en suit en posant :

$$B(x, D_x) = \begin{pmatrix} C_{11}(x, D_x) & & 0 \\ 0 & C_{11}(x, D_x) - I_{N_1+N_2} & 0 \\ 0 & C_{21}(x, D_x) & C_{22}(x, D_x) \end{pmatrix},$$

qui a dimension $2N_1+3N_2$ et $B_0(\rho_0) = a_0(\rho_0)$. Noter que $WF(U) = WF(u)$,

$$WF \begin{pmatrix} H_1 \\ \partial_t H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = WF(f) \text{ près de } \rho_0.$$

Il reste donc à montrer le lemme 3. Un argument du type de ce que l'on a utilisé au début de la démonstration du théorème 1 montre qu'il suffit de construire une matrice $Q \in OPS^0$, elliptique en ρ_0 , telle que :

$$PQ = Q(I_N t \partial_t - \tilde{\mathcal{A}}(t, x; D_t, D_x)) \quad (\text{près de } \rho_0)$$

avec :

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{matrix} & \underbrace{\hspace{10em}}_{N_1} & & \\ & \left(\begin{array}{cc} B_{11}(t, x; D_t, D_x) & D_1(t, x; D_t, D_x)t \\ E_1(t, x; D_t, D_x)\partial_t & \underbrace{B_{22}(t, x; D_t, D_x)}_{N_2} \end{array} \right) & & \\ & \left. \begin{matrix} N_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} & & \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ N_2 \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

où $B_{11}, B_{22}, D_1 \in OPS^0$, $E_1 \in OPS^{-1}$ mais avec symboles dépendant seulement de x, ξ et de τ dans un voisinage conique de ρ_0 (et, bien sûr, avec $\tilde{\mathcal{A}}_0(\rho_0) = a_0(\rho_0)$).

Exactement comme dans la démonstration du théorème 1, l'existence de Q et de $\tilde{\mathcal{A}}$ se déduit du lemme suivant.

Lemme 4 :

Soit M une variété C^∞ et soit $a(z; t, \tau) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^2)$ une matrice $N \times N$. Soit $z_0 \in M$ et supposons que :

$$a(z_0; 0, 0) = \begin{matrix} & \underbrace{\hspace{10em}}_{N_1} & & \\ & \left(\begin{array}{cc|c} a_{11}(z_0) & & 0 \\ \hline & & \\ \hline & 0 & \\ & & \underbrace{a_{22}(z_0)}_{N_2} \end{array} \right) & \\ & \left. \begin{matrix} N_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} & & \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ N_2 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad \text{avec}$$

$$a_{11}(z_0) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad a_{22}(z_0) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & * \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Il existe alors :

i) Une matrice $N \times N$ $q(z;t,\tau) \in C^\infty$, avec $q(z_0;0,0) = I_N$

ii) Une matrice $\in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ de la forme :

$$N_1 \left\{ \begin{pmatrix} \overbrace{C_{11}(z;s)}^{N_1} & d(z;s) \\ \vdots & \vdots \\ e(z;s) & \underbrace{C_{22}(z;s)}_{N_2} \end{pmatrix} \right\} N_2$$

avec $c_{jj}(z_0;0) = a_{jj}(z_0)$, $j = 1,2$,

telle que en posant :

$$\tilde{a}(z;t,\tau) = \begin{pmatrix} C_{11}(z;t\tau) & d(z;t\tau)t \\ \vdots & \vdots \\ e(z;t\tau)\tau & C_{22}(z;t\tau) \end{pmatrix}$$

on a :

$$Lq = (t \partial_t - \tau \partial_\tau)q - [aq - q\tilde{a}] = 0$$

sur un voisinage $W \times [-T,T] \times [-T,T]$ de $(z_0;0,0)$.

Il suffit de démontrer le lemme 4 au niveau des séries formelles.

On se donne $a(z;t,\tau) \sim \sum a^{rs}(z)t^r\tau^s$ et l'on cherchera : $\sum q^{rs}(z)t^r\tau^s$,
 $\sum c_{jj}^\ell(z)(t\tau)^\ell, j = 1,2, d(z;t\tau) \sim \sum d^\ell(z)(t\tau)^\ell, e(z;t\tau) \sim \sum e^\ell(z)(t\tau)^\ell$ de façon
à obtenir $(Lq)^{rs}(z) = 0, \forall r,s. (Lq)^{00} = 0$ équivaut à $a^{00}(z)q^{00}(z) - q^{00}(z)c^0(z) = 0$
où :

$$c^\ell(z) = \begin{pmatrix} c_{11}^\ell(z) & | & \\ \hline & & c_{22}^\ell(z) \end{pmatrix}, \ell \geq 0$$

On résoud cette équation comme dans le lemme 2 (on utilise seulement le fait que $a_{11}(z_0)$ et $a_{22}(z_0)$ ont un spectre disjoint !).

La nécessité d'introduire les termes d et e se manifestent quand l'on veut résoudre $(Lq)^{10} = 0$ et $(Lq)^{01} = 0$.

En effet :

$$(Lq)^{10} = q^{10} - (a^{00} q^{10} + a^{10} q^{00}) + q^{10} c^0 + q^{00} d_0.$$

Pour avoir $(Lq)^{10} = 0$ on doit résoudre :

$$q^{10}(I + C^0) - a^{00} q^{10} + q^{00} d_0 = a^{10} q^{00}$$

On cherche q^{10} sous la forme $\begin{pmatrix} \hat{q}_{11} & | & 0 \\ \hline & & \hat{q}_{22} \end{pmatrix}$. En tenant compte

que $C^0(z_0) = a^{00}(z_0)$, on trouve, au point z_0 , l'équation :

$$\begin{pmatrix} -c_{11}^1 & a_{11}(z_0)\hat{q}_{12} - \hat{q}_{12}a_{22}(z_0) \\ a_{22}(z_0)\hat{q}_{21} - \hat{q}_{21}a_{11}(z_0) & -c_{22}^1 \end{pmatrix}$$

= matrice donnée

Ce système est résoluble en C^∞ et après on trouve toutes les q^{r1} et q^{ls} et les d^ℓ et e^ℓ en résolvant des système linéaires. En procédant de cette manière on achève la preuve du lemme.

Références :

- 1 - M. KASHIWARA - I. OSHIMA : "Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems".
Ann. of Math., 106 (1977), 145-200.
- 2 - A. BOVE - J.E. LEWIS - C. PARENTI : "To appear in Lecture Notes in Math".
Springer Verlag, 1983.