PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

PHILIPPE CARBONNE

Algèbres graduées normales II - Construction d'un schéma sur certains anneaux $\mathbb{N}^n$-gradués

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 4
« Séminaires de mathématiques - science, histoire et société », , p. 71-95
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___4_71_0>

Algèbres graduées normales II -

Construction d'un schéma sur certains anneaux $\mathbb{N}^n$-gradués.

Philippe CARBONNE

*

On sait que si X est une variété algébrique sur le corps k, affine, d'anneau A, l'existence d'une action de k^* correspond à l'existence sur la k- algèbre A d'une $\mathbb{Z}$-graduation. Si de plus $A_0 = k$ et $A_n = 0$ pour $n < 0$, le point p correspondant à l'idéal maximal $A_+ = \bigoplus_{n > 0} A_n$ est le seul point fixe par l'action de k^*. Ce point p est en outre le seul point de X pouvant être singulier.

Dans un exposé [4] Michel Demazure a montré comment on pouvait décrire les k-algèbres $\mathbb{N}$-graduées normales au moyen de diviseurs de Weil à coefficients rationnels. De façon plus précise il a établi le théorème :

Théorème A : (3.5. p. 17 de [4]).

Soit k un corps commutatif, A une k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée, de type fini, intégralement close. On suppose en outre qu'il existe, dans le corps Fr(A) des fractions de A, T homogène de degré 1.

Soit X le k-schéma intégralement clos : X = Proj A. Alors il existe un diviseur de Weil D à coefficients rationnels ($D \in W\,\mathrm{Div}(X,\mathbb{Q})$) unique tel que :

dans $F_r(A)$:	$A_n = H^{\circ}(X, \mathcal{O}(nD))T^n$	pour tout $n \in \mathbb{N}$.
et sur X :	$\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}_X(nD)T^n$	pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

L'existence de T de degré A traduit le fait que $A \neq A_0$ et que le semi-groupe $\{n | A_n \neq 0\}$ n'est pas inclus dans un $m\mathbb{N}$ pour $m > 1$. Nous avons alors un isomorphisme entre Spec A et le cône affine : $\Gamma^+(X,D) = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{n > 0} H^{\circ}(X, \mathcal{O}_X(nD))T^n)$.

Ce théorème généralise un théorème de I.V. Dolgachev et H. Pinkham (voir [9]) établi en dimension 2 dans le cas où $k = \mathbb{C}$.

De là naît l'idée d'étudier des algèbres graduées normales obtenues au moyen d'un diviseur de Weil et de lire géométriquement les résultats obtenus (voir [1]). Plus précisément on prend une droite affine $C = \mathrm{Spec}\, k[t]$, un diviseur de Weil D de C à coefficients rationnels. On introduit alors l'anneau $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^{\circ}(C, \mathcal{O}_C(nD))$. Localement, en chaque point

de C, nous avons un anneau de valuation discrète $\mathcal{O} = k[t]_{(t-\alpha)}$, de corps résiduel k et de corps de fraction $K = k(t)$. Nous avons aussi une $\mathcal{O}$-algèbre $A = B_{m_\alpha}$ (où : $m_\alpha = (t-\alpha, B_n)_{n>0}$), de type fini, plate, $\mathbb{N}$-graduée (comme $\mathcal{O}$-algèbre), normale, et telle que nous ayons un isomorphisme de K-algèbres $\mathbb{N}$-graduées : $A \otimes_{\mathcal{O}} K \simeq K[T]$ (où T est une indéterminée).

Il est alors naturel d'étudier le même problème dans le cas de $\mathbb{N}^n$ graduations. Dans un article à paraître au Journal of Algebra [2] j'ai démontré le résultat suivant :

Théorème B

On désigne par $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète de corps résiduel k_0. On suppose $k_0 \subset \mathcal{O}$. On note t une uniformisante de $\mathcal{O}$, v la valuation correspondante et K le corps des fractions de $\mathcal{O}$. A est une $\mathcal{O}$-algèbre, $\mathbb{N}^n$-graduée (comme $\mathcal{O}$-algèbre). On suppose en outre qu'il existe un isomorphisme gradué entre les K-algèbres $\mathbb{N}^n$-graduées :

$$A \otimes_{\mathcal{O}} K \simeq K[T_1,\dots,T_n]$$

où les T_i sont des indéterminées. Nous notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A ci-dessous :

$$\mathfrak{m} = t\,A_{\mathcal{O}} + \bigoplus_{\substack{I \in \mathbb{N}^n \\ I \neq 0}} A_I .$$

Nous notons $\mathcal{O}^*$ les éléments non nuls de $\mathcal{O}$.
Alors :

1) Il y a équivalence entre les propriétés (i) et (ii) :

(i) A est une $\mathcal{O}$-algèbre de type fini, normale, admettant une suite régulière formée de n+1 éléments homogènes et commençant par l'uniformisante t de $\mathcal{O}$.

(ii) A peut s'écrire : $A = \bigoplus_{I \in \mathbb{N}^n} \mathcal{O}\xi^I$, la multiplication de ξ^I étant donnée par :

$$\xi^I . \xi^J = a_{I,J}\xi^{I+J}$$

où les $a_{I,J}$ sont des éléments de $\mathcal{O}^*$ dont les valuations sont obtenues ainsi :

Il existe des entiers $a_1,\dots,a_n,b$ tels que : $(a_1,\dots,a_n,b) = 1$ et $0 \leq a_k < b$ (pour k de 1 à n) et si l'on pose :

$$\delta(I) = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b}\, i_k\right] \quad (\text{pour } I = (i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{N}^n),$$

nous avons :

$$v(a_{I,J}) = \delta(I+J)-\delta(I)-\delta(J) .$$

2) Lorsque les propriétés (i) et (ii) sont vraies nous avons la propriété :

(iii) A est une $\mathcal{O}$-algèbre de type fini dont le complété $\hat{A}$ pour la topologie m-adique est isomorphe à l'algèbre des séries formelles $k_0[[\Sigma]]$ associée au semi-groupe de congurence :

$$\Sigma = \{(i,j_1,\ldots,j_n) \in \mathbb{N}^n | i+(b-a)j_1+\ldots+(b-a_n)j_n \equiv 0(b)\}.$$

3) Si de plus A est local, alors la propriété (iii) est équivalente aux propriétés (i) et (ii).

On obtient de tels anneaux en prenant sur une droite affine C = Spec $\mathbb{C}[t]$ n diviseurs de Weil à coefficients rationnels $D_1,\ldots,D_n$ et les localités aux points de C de l'anneau :

$$B = \bigoplus_{I=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} H^{\circ}(C,\mathcal{O}_C(i_1D_1+\ldots+i_nD_n))$$

On voit que l'on a rajouté une hypothèse du type Cohen-Macaulay. En fait c'est une hypothèse plus forte : je donne un contre-exemple qui montre que Cohen-Macaulay ne suffit pas.

En dimension 2 (i.e. n=1) cette condition n'apparaît pas. On sait déjà que "normal" entraine "Cohen-Macaulay" et on voit sans mal que, ici, "normal" donne la condition en question (existence d'une suite régulière formée de deux éléments homogènes et commençant par t).

Dans le même article on démontre que B est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini normale.

J'ai par ailleurs calculé le groupe des classes de diviseurs des anneaux vérifiant les hypothèses du théorème B ci-dessus. La technique utilisée, qui fait appel à l'existence à la fois d'une $\mathbb{N}^n$-graduation et d'une graduation par un semi-groupe de $\mathbb{Z}/_{b\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}^n$, peut s'appliquer à d'autres situations. On peut s'en servir, par exemple pour calculer $Cl(k_0[\Sigma])$ où Σ est un semi-groupe de congruence. Ces résultats devraient faire l'objet d'une autre publication. (Se reporter à [3] pour les anneaux $k_0[\Sigma]$ associés à des semi-groupes de congruence).

Un autre problème est la généralisation du théorème de M. Demazure (Théorème A ci-dessus) au cas des $\mathbb{N}^n$-graduations.

Une telle généralisation est possible -moyennant l'adjonction de certaines hypothèses-. Notre but est d'exposer ici la première étape de cette généralisation. Cette première étape consiste en la construction pour certains anneaux $\mathbb{N}^n$-gradués d'un schéma qui est une généralisation du Proj des anneaux $\mathbb{N}$-gradués.

Ce schéma, construit ici pour généraliser le théorème de M. Demazure, peut éventuellement jouer un rôle dans d'autres situations totalement différentes. C'est pour cette raison qu'il nous a semblé intéressant de publier cette construction pour elle-même.

* *
*

I - HYPOTHESES ET NOTATIONS

I.1 - L'anneau S est un anneau commutatif unitaire $\mathbb{N}^n$-gradué par : $S = \bigoplus_{I \in \mathbb{N}^n} S_I$. Pour I dans $\mathbb{N}^n$, on pose : $\sigma(I) = \{j \mid i_j \neq 0\} \subset \{1,\dots,n\}$ et pour x dans S et homogène, on pose $\sigma(x) = \sigma(d°x)$. On notera s(I) le cardinal de $\sigma(I)$ et s(x) celui de $\sigma(x)$.

L'ensemble :

$$\tilde{S} = \bigoplus_{s(I)=n} S_I$$

est un idéal de S inclus dans $S_+ = \bigoplus_{I \neq 0} S_I$.

On introduit alors :

$$\mathrm{Proj}^{(n)} S = \{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{P} \text{ premier homogène et } \mathfrak{P} \not\supset \tilde{S}\}.$$

Si $n = 1$, $\tilde{S} = S_+$ et $\mathrm{Proj}^{(1)} S = \mathrm{Proj}\, S$.

I.2 - Nous notons $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ les éléments de la base canonique de $\mathbb{N}^n$. Pour $\Phi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ appartenant à $\mathbb{N}^n$ nous notons :

$$S_{(\Phi)} = \prod_{i=1}^{n} S_{\varphi_i \varepsilon_i} \subset S_\Phi.$$

Nous nous <u>limiterons à des anneaux S qui vérifient l'hypothèse (- que nous désignerons sous le nom d'hypothèse (H) dans toute la suite -) ci-dessous</u> :

(H) $\left\{\right.$ <u>Pour tout g dans S, homogène et de degré non nul, il existe $m > 0$ et $\Phi \neq 0$ tels que : $g^m \in S_{(\Phi)}$</u>.

Pour f homogène dans S, nous notons :

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}^{(n)}S \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Pour $J = \{j_1,\dots,j_p\} \subset \{1,\dots,n\}$ et des f_{j_l} (l de 1 à p) homogènes, de degrés respectifs : $\alpha_l \varepsilon_{j_l}$ (avec : $\alpha_l > 0$) on note :

$$D_+(F_J) = \bigcap_{l=1}^{p} D_+(f_{j_l}) \quad .$$

L'hypohtèse (H), donnée sous forme algébrique, assure une propriété topologique de $\mathrm{Proj}^{(n)}S$: elle permet de dire que les $D_+(F_J)$ (pour tous les $J \subset \{1,\dots,n\}$) forment une base d'ouverts de la topologie de $\mathrm{Proj}^{(n)}S$. C'est encore elle qui va nous permettre de mettre sur $\mathrm{Proj}^{(n)}S$ une structure de schéma, structure qui va s'identifier à celle de Proj S dans le cas où $n = 1$.

I.3 - Nous avons de façon évidente les propriétés :

- $f \in S_0$ entraine $\sigma(f) = \emptyset$
- $\sigma(fg) = \sigma(f) \cup \sigma(g)$
- $\sigma(f^m) = \sigma(f)$ pour $m > 0$.

On en déduit sans mal que pour un anneau S vérifiant l'hypothèse (H) il y a équivalence entre les cinq propriétés ci-dessous (pour un idéal premier homogène $\mathfrak{p}$) :

(1) $\mathfrak{p} \not\supset \tilde{S}$

(2) pour tout j de 1 à n, il existe x_j homogène tel que :

$$\sigma(x_j) = \{j\} \text{ et } x_j \notin \mathfrak{p}.$$

(3) pour tout j de 1 à n, il existe x_j homogène tel que :

$$j \in \sigma(x_j) \text{ et } x_j \notin \mathfrak{p}.$$

(4) $\sigma(T_{\mathfrak{p}}) = \{1,\dots,n\}$.

(5) il existe x appartenant à $T_{\mathfrak{p}}$ tel que $s(x) = n$.

Dans les deux dernières propriétés : $T_{\mathfrak{p}} = S-\mathfrak{p}$ et $\sigma(T_{\mathfrak{p}}) = \bigcup_{x\in T_{\mathfrak{p}}} \sigma(x)$.

L'équivalence de (4) et (5) est indépendante de (H).

I.4 - Introduisons une dernière notion : pour $J \subset \{1,\ldots,n\}$ et I et I' appartenant à $\mathbb{N}^n$ nous dirons que <u>I = I' sur J</u> si I-I' appartient à $\sum_{j\notin J} \mathbb{Z}\, \varepsilon_j$. Ceci revient à dire que $i_j = i'_j$ pour tout j dans J (-ce qui justifie la terminologie-). Terminons par un lemme qui sera utile par la suite :

Lemme :

Les ouverts $D_+(h) \cap D_+(F_J)$ où h est homogène et de degré égal au degré de F_J^K sur J, pour un K appartenant à $\mathbb{N}^n$, forment une base d'ouverts de la topologie de $D_+(F_J)$.

Pour $K = (k_1,\ldots,k_p)$ appartenant à $\mathbb{N}^p$, la notation F_J^K désigne :

$$F_J^K = f_{j_1}^{k_1} \ldots f_{j_p}^{k_p} .$$

<u>Preuve du lemme</u> :

Soit $m = \alpha_1 \ldots \alpha_p > 0$ le déterminant des degrés des f_{j_l}. Pour tout g de S, homogène de degré non nul :

$$d^\circ(g^m) = md^\circ g \in \sum_{l=1}^{p} (\alpha_l \varepsilon_{j_l} \mathbb{N}) + \sum_{j\notin J} \varepsilon_j\, \mathbb{N}.$$

Donc il existe $K \in \mathbb{N}^p$ tel que : $d^\circ(g^m) = d^\circ(F_J^K)$ sur J. Comme par ailleurs :

$$D_+(g) \cap D_+(F_J^K) = D_+(g^m) \cap D_+(F_J^K)$$

la propriété est démontrée en utilisant les h égaux aux g^m.

II - DEFINITION DE L'ANNEAU SUR UN OUVERT DE LA BASE

II.1 - Nous utilisons les notations précédemment introduites.

Nous poserons :

$$S_{[F_J]} = \left\{ \frac{x}{F_J{}^K} \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{toutes les composantes homogènes de } x \text{ dans } S\\ \text{ont un degré égal à celui de } F_J{}^K \text{ sur } J \text{ (}K\\ \text{est quelconque dans } \mathbb{N}^p\text{).}\end{array} \right\}$$

Il est immédiat que $S_{[F_j]}$ est un sous-anneau unitaire de l'anneau $S_{F_J} = S_{f_{j_1},\ldots,f_{j_p}}$.

II.2.

II.2.1 - Il est clair que pour tout $m > 0$:

$$S_{[F_J{}^m]} = S_{[F_J]}$$

où $F_J{}^m = \{f_{j_1}{}^m, \ldots, f_{j_p}{}^m\}$.

II.2.2 - Si $s(J) = n$ alors $S_{[F_J]} = S_{(F_J)} = S_{(f_1, \ldots, f_n)}$ (c'est-à-dire le sous-anneau des termes de degré nul dans l'anneau gradué : $S_{f_1,\ldots,f_p}$).

II.3 - Pour tout $\mathfrak{p}$ appartenant à $\mathrm{Proj}^{(n)} S$ nous introduisons l'anneau :

$$S_{(\mathfrak{p})} = (T_{\mathfrak{p}}^{-1}S)_0 = \left\{ u \in T_{\mathfrak{p}}^{-1}S \;\middle|\; u = \frac{x}{f} \text{ , x et f homogènes de même degrés} \right\}$$

L'anneau $S_{(\mathfrak{p})}$ est local, d'idéal maximal :

$$m_{\mathfrak{p}} = \{u \in S_{(\mathfrak{p})} \mid x \in \mathfrak{p}\}.$$

Cet anneau apparaitra plus loin comme l'anneau de la fibre au point $\mathfrak{p}$ du schéma construit sur l'espace topologique $\mathrm{Proj}^{(n)}S$.

III - UN LEMME

III.1 - Commençons par un résultat qui permet de ramener les $\mathbb{N}^n$-graduations aux $\mathbb{N}$-graduations quand le besoin s'en fait sentir.

Lemme :

Soient Ω et Ω' deux parties non vides de $\mathbb{N}^n$, alors il existe $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ appartenant à $\mathbb{N}^n$ tel que si l'on pose :

$$l(I) = \alpha_1 i_1 + \ldots + \alpha_n i_n \text{ (pour : } I = (i_1,\ldots,i_n) \in \mathbb{N}^n),$$

il existe un unique élément I_0 de Ω et un unique élément J_0 de Ω' qui réalisent respectivement le minimum de $l(\Omega)$ et celui de $l(\Omega')$.

III.2 - Donnons maintenant un résultat qui généralise celui donné dans [6] (II.2.1.9).

Lemme :

Supposons donné pour tout I de $\mathbb{N}^n$ un sous-groupe additif $\mathfrak{p}_I$ de S_I. Alors il y a équivalence entre les propriétés (1) et (2) ci-dessous :

(1) Il existe $\mathfrak{p}$, idéal premier homogène de S, tel que : $\mathfrak{p} \cap S_I = \mathfrak{p}_I$ pour tout I et $\sigma(T_{\mathfrak{p}}) = \{1,\dots,n\}$.

(2) (i) Pour tout I et tout J de $\mathbb{N}^n$: $S_J\mathfrak{p}_I \subset \mathfrak{p}_{I+J}$.

(ii) Pour tout I et tout J de $\mathbb{N}^n$, si f appartient à S_J, si g appartient à S_I et si fg appartient à S_{I+J}, alors :
f appartient à $\mathfrak{p}_J$ sinon g appartient à $\mathfrak{p}_I$.

(iii) Il existe x dans $T_{\mathfrak{p}}$, homogène et tel que $s(x) = n$.

De plus il y a alors <u>unicité</u> d'un tel idéal premier homogène $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{p} \cap S_I = \mathfrak{p}_I$.

III.3 - Dans les E.G.A. les conditions qui équivalent à (i), (ii) et (iii) dans le cas des $\mathbb{N}$-graduations sont imposées uniquement pour des entiers $\geq n_0$, c'est-à-dire appartenant à $n_0 + \mathbb{N}$. De même on peut se limiter ici à imposer (i), (ii) et (iii) pour des I appartenant à $I_0 + \mathbb{N}^n$ (pour un I_0 fixé). N'ayant pas besoin de ce raffinement supplémentaire, nous nous contenterons de démontrer le lemme tel qu'il est énoncé ci-dessus.

III.4 - Le fait que (1) entraine (2) est évident (en se reportant à I.3 pour (iii)).

III.5 - Partons maintenant de (2) et posons :

$$\mathfrak{P} = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} \mathfrak{P}_I .$$

III.5.1 - Compte tenu du fait que S est somme directe des S_I, il est clair que $\mathfrak{P} \cap S_I = \mathfrak{P}_I$.

Le fait que les $\mathfrak{P}_I$ sont des sous-groupes additifs et l'hypothèse (ii) entrainent que $\mathfrak{P}$ est un idéal de S. Par construction même, cet idéal est homogène. La propriété (iii) donne évidemment : $\sigma(T_{\mathfrak{P}}) = \{1,\ldots,n\}$.

III.5.2 - Montrons maintenant que l'idéal $\mathfrak{P}$ est premier.

Supposons que $x \notin \mathfrak{P}$, $y \notin \mathfrak{P}$ et $xy \in \mathfrak{P}$. Soient $x = \Sigma\, x_I$ et $y = \Sigma\, y_J$ les décompositions respectives de x et y en composantes homogènes. Posons :

$$\Omega = \{I \in \mathbb{N}^n \mid x_I \notin \mathfrak{P} \cap S_I = \mathfrak{P}_I\} \quad \text{et}$$
$$\Omega' = \{J \in \mathbb{N}^n \mid y_J \notin \mathfrak{P} \cap S_I = \mathfrak{P}_J\}.$$

Par hypothèse nous avons Ω et Ω' non vides. D'après le lemme III.1 il existe une forme linéaire l à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que son minimum sur Ω soit atteint en un seul point I_0 et son minimum sur Ω' soit atteint en un seul point J_0. En posant :

$$\Sigma_k = \bigoplus_{I \mid l(I)=k} S_I$$

nous avons une $\mathbb{N}$-graduation sur S : $S = \sum_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k$.

Posons $k_0 = l(I_0)$ et $k_0' = l(J_0)$. Dans cette $\mathbb{N}$-graduation la composante homogène de degré k_0 de x est :

$$\xi_{k_0} = \sum_{I \mid l(I)=k_0} x_I = x_{I_0} + x_0'.$$

Vu la définition de I_0, nous avons : $x'_0 = \sum_{\substack{l(I)=k_0 \\ I \neq I_0}} x_I \in \mathfrak{p}$.

De même la composante homogène de degré k'_0 de y est :

$$\zeta_{k'_0} = \sum_{J \mid l(J)=k'_0} y_J = y_{J_0} + y'_0$$

Ici nous avons : $y'_0 = \sum_{\substack{l(J)=k'_0 \\ J \neq J_0}} y_J \in \mathfrak{p}$.

Pour la $\mathbb{N}$-graduation liée à l, le produit xy se décompose en :

$$xy = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu_k .$$

Etant donné que $\mathfrak{p}$ est homogène pour la $\mathbb{N}^n$-graduation et donc, à fortiori, pour la $\mathbb{N}$-graduation et que xy est dans $\mathfrak{p}$, nous avons : $\nu_k \in \mathfrak{p}$ pour tout k. En particulier : $\nu_{k_0+k'_0} = \sum_{k+k'=k_0+k'_0} \xi_k \zeta_{k'}$ est dans $\mathfrak{p}$. Si $k < k_0$, pour tout I tel que $l(I) = k$ nous avons x_I dans $\mathfrak{p}$ (cf. définition de I_0 et de Ω). Si $k > k_0$, alors $k' < k'_0$ et de même pour tout J tel que $l(J) = k'$ nous avons y_J dans $\mathfrak{p}$. Donc tous les $\xi_k \zeta_{k'}$ de la somme $\nu_{k_0+k'_0}$ sont dans $\mathfrak{p}$ pour $(k,k') \neq (k_0,k'_0)$. Il en résulte que $\xi_{k_0} \zeta_{k'_0}$ est lui aussi dans $\mathfrak{p}$.

Nous avons :

$$\xi_{k_0} \zeta_{k'_0} = x_{I_0} y_{J_0} + x_{I_0} y'_0 + x'_0 y_{J_0} + x'_0 y'_0 .$$

La somme est dans $\mathfrak{p}$ et les trois derniers termes sont aussi dans $\mathfrak{p}$. Nous avons donc : $x_{I_0} y_{J_0} \in \mathfrak{p}$. Nous avons donc

$$x_{I_0} \notin \mathfrak{p}_{I_0},\ y_{J_0} \notin \mathfrak{p}_{J_0} \text{ et } x_{I_0} y_{I_0} \in \mathfrak{p} \cap S_{I_0+J_0} = \mathfrak{p}_{I_0+J_0} .$$

Ceci contredit l'hypothèse (ii).

III.5.3 - L'unicité de $\mathfrak{p}$ est alors évidente.

IV - PROPRIETES DES $S_{[F_J]}$

IV.1 - Le résultat fondamental est le suivant :

Proposition :

Soit $J \subset \{1,\ldots,n\}$ de cardinal égal à $p \leq n$.
Alors :

$S_{[F_J]}$ est un anneau $\mathbb{N}^{n-p}$-gradué et

$D_+(F_J)$ est homéomorphe à $\mathrm{Proj}^{(n-)}(S_{[F_J]})$.

En particulier, si $p = n-1$:

$D_+(F_J)$ est homéomorphe à $\mathrm{Proj}(S_{[F_J]})$,

et si $p = n$:

$D_+(F_J)$ est homéomorphe à $\mathrm{Spec}(S_{(F_J)})$

IV.1.1 - Pour $u = \dfrac{x}{F_J{}^K}$ appartenant à $S_{[F_J]}$ et $L \in \mathbb{N}^{\complement J}$, la composante de degré L de u est :

$$u_L = \frac{x_I}{F_J{}^K}$$

où $I = d°(F_J{}^K)$ sur J et $I = L$ sur $\complement J$.

IV.1.2 - Pour tout $\mathfrak{p}$ appartenant à $D_+(F_J)$, on pose :

$$\psi(P) = \{u = \frac{x}{F_J{}^K} \in S_{[F_J]} \mid x \in \mathfrak{p}\}.$$

La condition imposée est indépendante de l'écriture de u sous forme de fraction. On vérifie sans mal que $\psi(\mathfrak{p})$ est un idéal premier homogène de $S_{[F_J]}$.

Il existe x homogène, appartenant à $T_{\mathfrak{p}}$ et tel que $s(x) = n$ (voir I.3). En se reportant à la démonstration du lemme donné en I.3, nous voyons que x^m est homogène, qu'il appartient à $T_{\mathfrak{p}}$ et que $s(x^m) = s(x) = n$. De plus $d^{\mathfrak{a}}(x^m) = d^{\mathfrak{a}}(F_J{}^K)$ sur J. Donc :

$$v = \frac{x^m}{F_J{}^K} \in T_{\psi(\mathfrak{p})}.$$

Enfin : $s(v) = n-p$ dans $S_{[F_J]}$. Nous avons donc bien : $\psi(\mathfrak{p}) \in \mathrm{Proj}^{(n-p)}(S_{[F_J]})$.

IV.1.3 - Soit h dans S tel que ses composantes homogènes sont toutes de degré égal au degré de $F_J{}^K$ (pour un K fixé) sur J. Alors, d'après la définition de $\psi(\mathfrak{p})$, nous avons :

$$k \notin \mathfrak{p} \text{ équivaut à } \frac{h}{F_J{}^K} \notin \psi(\mathfrak{p}).$$

En particulier un élément u homogène de $S_{[F_J]}$ s'écrit : $u = \frac{h}{F_J{}^K}$, où h est homogène et de degré égal au degré de $F_J{}^K$ sur J. Nous avons donc :

$$\psi^{-1}(D_+(u)) = D_+(h) \cap D_+(F_J)$$

L'application ψ est donc continue.

IV.1.4 - Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ différents appartenant à $D_+(F_J)$. $D_+(F_J)$ est un espace de Kolmogoroff. Il vérifie donc la propriété T_0 en se limitant à une base d'ouverts de sa topologie. En utilisant le lemme de I.3, nous en déduisons qu'il existe un ouvert $U = D_+(h) \cap D_+(F_J)$ où h est homogène et de degré égal à celui de $F_J{}^K$ (pour un K) sur J et tel que, par exemple : $\mathfrak{p} \in U$ et $\mathfrak{p}' \notin U$. C'est-à-dire que nous avons $h \notin \mathfrak{p}$ et $h \in \mathfrak{p}'$. D'après IV.1.3., il en résulte que $\frac{h}{F_J{}^K} \notin \psi(\mathfrak{p})$ et $\frac{h}{F_J{}^K} \in \psi(\mathfrak{p}')$. Nous pouvons conclure que ψ est injective.

IV.1.5 - Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier homogène de $S_{[F_J]}$. Pour tout I de $\mathbb{N}^n$ posons :

$$\mathfrak{p}_I = \{x \in S_I \mid \exists\ K \text{ tel que } I = d°(F_J^K) \text{ sur } J \text{ et } \frac{x}{F_J^K} \in \mathfrak{q}_L, \text{ où } L = I \text{ sur } CJ\}.$$

Il est facile de voir que les $\mathfrak{p}_I$ sont des sous-groupes additifs de S_I qui vérifient les hypothèses (i), (ii) et (iii) du lemme III.2. Il existe donc un unique idéal premier $\mathfrak{p}$ homogène de S tel que $\mathfrak{p} \cap S_I = \mathfrak{p}_I$ pour tout I et $\sigma(T_{\mathfrak{p}}) = \{1,\ldots,n\}$. Il est clair que $\mathfrak{p} \in D_+(F_J)$ (compte tenu du fait que $\mathfrak{q} \neq S_{[F_J]}$). Nous avons ensuite de façon évidente :

$$\psi(\mathfrak{p}) = \psi(\sum_L \sum_{I \mid I=L \text{ sur } CJ} \mathfrak{p}_I) = \sum_L \mathfrak{q}_L = \mathfrak{q}.$$

L'application ψ est donc <u>surjective</u>.

IV.1.6 - Pour un ouvert U de la base d'ouverts de $D_+(F_J)$ introduite en I.3, nous avons vu que : $\psi(U) = D_+(\frac{h}{F_J^K})$ qui est un ouvert de $\mathrm{Proj}^{(n-p)}(S_{[F_J]})$. L'application ψ^{-1} est donc <u>continue</u>.

IV.2.

IV.2.1 - On prend $J = \{j_1,\ldots,j_p\} \subset \{1,\ldots,n\}$ et $F_J = \{f_{j_1},\ldots,f_{j_p}\}$. On prend ensuite $J' \subset J$ et $G_{J'} = \{g_j \mid j \in J'\}$. Les f_j et les g_j sont homogènes et de degrés appartenant à $\mathbb{N}^*\varepsilon_j$. Pour les $j \in J-J'$, on pose $g_j = 1$ et on obtient ainsi $G_J = \{g_{j_1},\ldots,g_{j_p}\}$.

Proposition :

Nous avons un homomorphisme φ d'anneau gradué, conservant le degré, qui va de $S_{[F_J]}$ dans $S_{[F_J G_J]}$. De plus si $\mathfrak{q} \in \mathrm{Proj}^{(n-p)}(S_{[F_J G_J]})$, alors :

$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Proj}^{(n-p)}(S_{[F_J]})$. Si l'on pose $\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ on obtient ainsi une application continue qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} D_+(F_J) \arrow[r, "\psi_F"] & \mathrm{Proj}^{(n-p)}(S_{[F_J]}) \\ D_+(F_J G_J) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\psi_{FG}"] & \mathrm{Proj}^{(n-p)}(S_{[F_J G_J]}) \arrow[u, "\tilde{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

où i est l'injection canonique (l'inclusion).

Pour cela on pose : $\varphi\left(\frac{x}{F_J^K}\right) = \frac{G_J^K x}{(F_J G_J)^K}$.

IV.2.2 - Le seul point qui nécessite une démonstration est de prouver que $\sigma(T_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})}) = \complement J$. Tout le reste est immédiat. Nous poserons : $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$.

D'après I.3 il existe u homogène appartenant à T et tel que $\sigma(u) = \complement J$. On peut écrire : $u = \frac{y}{(FG)^K}$ et alors y est homogène de degré égal à celui de $(FG)^K$ sur J et $\sigma(y) \supset \complement J$.
D'après un raisonnement déjà fait (voir I.3) il existe $m > 0$ et il existe K' dans $\mathbb{N}^p$ tels que :

$$d°(y^m) = d°(F_J^{K'}) \text{ sur } J.$$

Comme par ailleurs : $d°(y^m) = m\, d°((FG)^K)$ sur J, on en déduit que :

$$d°F^{K'} = m\,(d°F^K + d°G^K).$$

Il en résulte que : $k'_j - m\, k_j \geqslant 0$ pour tout j de 1 à p et que $K_1 = K'-mK$ appartient à $\mathbb{N}^p$. Posons alors :

$$v = \frac{y^m}{F^{K'}} \in S_{[F_J]}.$$

Nous avons :

$$\varphi(v) = \frac{y^m G^{K'}}{(FG)^{K'}} = \frac{y^m}{(FG)^{mK}} \cdot \frac{G^{K'}}{(FG)^{K_1}} = u^m\, u'.$$

L'élément $u' = \dfrac{G^{K'}}{(FG)^{K_1}}$ est inversible dans $S_{[F_J G_J]}$ -son inverse est : $\dfrac{F^{K'}(FG)^{K_1}}{(FG)^{K'}}$- et donc n'appartient pas à $\mathfrak{q}$. Il en résulte que $\varphi(v) = u^m u'$ n'est pas dans $\mathfrak{q}$ et donc que v n'est pas dans $\mathfrak{p}$. Par ailleurs y étant homogène dans S, v est homogène dans $S_{[F_J]}$. Enfin compte tenu de $\sigma(y^m) = \sigma(y) \supset \complement J$, nous avons : $\sigma(v) = \complement J$. Ceci achève la démonstration.

IV.3 - La proposition qui suit est une trivialité qui ne nécessite pas de démonstration :

Proposition :

Si J et J' sont tels que $J \cap J' = \emptyset$ alors :

$$S_{[F_J,G_{J'}]} \simeq (S_{[F_J]})_{[\frac{G_{J'}}{1}]}.$$

Le fait que $J \cap J' = \emptyset$ donne un sens à $\frac{G}{1}$ dans $S_{[F_J]}$.
En particulier pour f et g homogènes de degrés $\alpha_j \varepsilon_j$ et $\beta_{j'} \varepsilon_{j'}$ (avec $j \neq j'$ et $\alpha_j \beta_{j'} > 0$) nous avons :

$$S_{[f,g]} = (S_{[f]})_{[\frac{g}{1}]} .$$

V - CONSTRUCTION DU SCHEMA $\mathrm{Proj}^{(n)}S$

V.1 - Nous avons vu que l'hypothèse (H) permet de dire que les $D_+(f)$ où f est homogène et tel que $s(f) = 1$ forment un recouvrement ouvert de $\mathrm{Proj}^{(n)}S$.

Les anneaux $\mathbb{N}^{n-p}$-gradués $S_{[F_J]}$ vérifient aussi l'hypothèse (H). En effet, soit u appartenant à $S_{[F_J]}$, homogène et de degré non nul. Nous avons : $u = \dfrac{x}{F_J^{\,K}}$ où x est homogène dans S et $d°x = d°F_J^{\,K}$ sur J. L'hypothèse (H) appliquée à S dit qu'il existe $m > 0$ tel que :

$$x^m = g_1 \ldots g_n$$

où les g_j sont homogènes et de degré appartenant à $\mathbb{N}\varepsilon_j$ (et non tous nuls). Mais alors :

$$u^m = \frac{\prod\limits_{j \in J} g_j}{F_J^{\,mK}} \cdot \frac{\prod\limits_{j \notin J} g_j}{1} = u' \prod_{j \notin J} \frac{g_j}{1} .$$

Le degré de u' est nul dans $S_{[F_J]}$ et celui de $\frac{g_j}{1}$ pour chaque j non dans J appartient à $\mathbb{N}\varepsilon_j$. Nous avons donc bien ce que nous voulons.

On en déduit que les $D_+(F_J, f) = D_+(F_J) \cap D_+(f)$ pour les f homogènes et tels que $s(f) = 1$ et $\sigma(f) \cap J = \emptyset$ forment un recouvrement ouvert de $D_+(F_J)$ et donc que, pour les mêmes f, les $D_+(\frac{f}{1})$ recouvrent $\mathrm{Proj}^{(n-p)}(S_{[F_J]})$.

V.2 - Les f utilisés dans ce paragraphe sont tous homogènes et tels que $s(f) = 1$. Au niveau des espaces topologiques nous avons :

$$\mathrm{Proj}^{(n)}S = \bigcup_{f_1 | s(f_1)=1} D_+(f_1).$$

Puis :

$$\mathrm{Proj}^{(n-1)}S_{[f_1]} \simeq D_+(f_1) = \bigcup_{\substack{F_2=(f_1,f_2)\\ s(f_1 f_2)=2}} D_+(F_2).$$

$$\mathrm{Proj}^{(n-2)}S_{[F_2]} \simeq D_+(F_2) = \bigcup_{\substack{F_3=\{f_1,f_2,f_3\}\\ s(f_1\ f_2\ f_3)=3}} D_+(F_3).$$

....

Ceci s'arrête avec des $F_n = \{f_1,\ldots,f_n\}$ tels que $s(f_1 \ldots f_n) = n$ par :

$$\mathrm{Spec}\ S_{(F_n)} \simeq D_+(F_n).$$

Grâce aux propositions établies aux paragraphes IV.2 et IV.3. nous pouvons alors recoller les schémas par un procédé récurrent à partir des schémas affines $\mathrm{Spec}\ S_{(F_n)}$ sur les $D_+(F_n)$. (Voir [6], ou [7] exercice 2.12 page 80).

Nous obtenons ainsi un schéma sur l'espace topologique $\mathrm{Proj}^{(n)}S$, schéma que nous noterons aussi $\mathrm{Proj}^{(n)}S$.

V.3 - On remarque que tout $\mathfrak{p}$ appartenant à $\mathrm{Proj}^{(n)}S$ est bien dans un ouvert affine à savoir l'ouvert $D_+(x_1,\ldots,x_n)$ où les x_j sont ceux de I.3 (2)). La fibre en $\mathfrak{p}$ du schéma $\mathrm{Proj}^{(n)}S$ est donc $(S_{(F)})_{\psi(\mathfrak{p})}$ (où nous avons introduit la notation : $F = \{x_1,\ldots,x_n\}$ et où ψ désigne l'homéomorphisme entre $D_+(F)$ et $\mathrm{Spec}\, S_{(F)}$). On en déduit la proposition suivante :

Proposition :

La fibre en $\mathfrak{p}$ du schéma $\mathrm{Proj}^{(n)}S$ est l'anneau local $S_{(\mathfrak{p})}$.

Soit $v = \frac{y}{z}$ appartenant à $(S_{(F)})_{\psi(\mathfrak{p})}$. Alors :

$y = \frac{x}{F^K}$ avec x homogène et $d°x = d°(F^K)$ d'une part, et d'autre part : $z = \frac{x'}{F^L}$ avec x' homogène et $d°x' = d°(F^L)$ et $x' \notin \mathfrak{p}$ (vu que $z \notin \psi(\mathfrak{p})$). On pose alors : $\omega(v) = \frac{x\, F^L}{x' F^K}$. Vu que x' et les f_j ne sont pas dans $\mathfrak{p}$ nous avons : $x'F^K \notin \mathfrak{p}$. Par ailleurs : $d°(xF^L) = d°(x'F^K)$, et donc : $\omega(v) \in S_{(\mathfrak{p})}$.

Réciproquement, si l'on prend $u = \frac{x}{f}$ dans $S_{(\mathfrak{p})}$. Alors il existe $m > 0$ et il existe K dans $\mathbb{N}^n$ tels que : $d°(f^m) = d°(F^K)$. Posons : $y = \frac{x\, f^{m-1}}{F^K}$ et $z = \frac{f^m}{F^K}$. Alors :

$d°(x\, f^{m-1}) = d°(f^m) = d°(F^K)$ donc y et z sont dans $S_{(F)}$. De plus $f \notin \mathfrak{p}$ et donc $f^m \notin \mathfrak{p}$. z n'est pas dans $\psi(\mathfrak{p})$. Par suite $v = \frac{y}{z}$ appartient à $(S_{(F)})_{\psi(\mathfrak{p})}$. Mais :

$$\omega(v) = \frac{x\, f^{m-1}\, F^K}{f^m\, F^K} = \frac{x}{f} = u.$$

ω est l'isomorphisme cherché entre $(S_{(F)})_{\psi(\mathfrak{p})}$ et $S_{(\mathfrak{p})}$.

VI - EXEMPLES

Pour illustrer ce qui précède donnons deux exemples simples.

VI.1 - Si nous prenons $S = k[X,Y]$ muni de sa $\mathbb{N}^2$-graduation canonique, un idéal premier homogène non nul contient un $X^\alpha Y^\beta$ (où α ou β est non nul). Il contient donc X ou Y et donc l'idéal $\tilde{S} = X\ Y\ S$. Donc :

$$\mathrm{Proj}^{(2)}(k[X,Y]) = \{(0)\}.$$

Il en est de même pour $\mathrm{Proj}^{(n)}(k[X_1,\ldots,X_n])$.

VI.2 - Si nous prenons $S = k[X,Y,Z]$, $\mathbb{N}^2$-gradué par $d°(X^\alpha Y^\beta Z^\gamma) = (\alpha,\beta+\gamma)$ alors l'idéal $\tilde{S} = X\ Y\ S + X\ Z\ S$. Si l'on prend un idéal premier $\mathfrak{p}$ homogène non nul, ses générateurs sont des éléments homogènes de la forme :

$u_I = X^\alpha P(Y,Z)$ où $I = (\alpha,\delta)$ et où P est un polynôme homogène de degré global δ. Comme $\mathfrak{p} \neq (0)$ il y a au moins un tel générateur (et le degré de ce générateur n'est pas (0,0) car $\mathfrak{p} \neq S$). Il en résulte que : soit $X \in \mathfrak{p}$, mais alors $\mathfrak{p} \supset \tilde{S}$ ce qui est exclut, soit $P(Y,Z) \in \mathfrak{p}$. Nous avons donc :

$$\mathfrak{p} = \sum_{\delta \in \Delta \subset \mathbb{N}} P_\delta(Y,Z)S$$

en interdisant d'avoir à la fois $P_{\delta_1}(Y,Z) = Y$ et $P_{\delta_2}(Y,Z) = Z$ dans la liste des P_δ et en se limitant à des polynômes P_δ irréductibles dans $k[Y,Z]$.

VII - $\mathrm{Proj}^{(n)}$ COMME QUOTIENT D'UN OUVERT "n-cône".

VII.1 - Nous redonnons d'abord un résultat de M. Demazure [4].

Soit A une k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée. Il y a alors une bijection entre Spec A_0 et le fermé $V(A_+)$ de Spec A (où $A_+ = \bigoplus_{m>0} A_m$). Cette bijection est celle qui fait correspondre à un idéal premier $\mathfrak{p}_0$ de A_0 l'idéal $\mathfrak{p}_0 \oplus A_+$ de A et à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $V(A_+)$ l'idéal premier $\mathfrak{p} \cap A_0$ de A_0.

Nous pouvons donc écrire :

$$\mathrm{Spec}\ A - \mathrm{Spec}\ A_0 = \{\mathfrak{p} \text{ premiers} \mid \mathfrak{p} \not\supset A_+\}.$$

La graduation de A définit une action de k^* sur Spec A, action qui laisse fixe Spec A_0. Le schéma Proj A est alors le quotient "géométrique" de l'ouvert Γ = Spec A - Spec A_0 de Spec A par cette action de k^*. <u>Proj A apparait ainsi comme le quotient d'un "cône ouvert" par une action de k^*</u>.

VII.2 - Cette propriété se généralise aux schémas $\mathrm{Proj}^{(n)}$. Soit A une k-algèbre $\mathbb{N}^n$-graduée. On considère l'ouvert $U = \mathrm{Spec}\ A - V(\tilde{A})$ de Spec A. L'action de $(k^*)^n$ définie par la $\mathbb{N}^n$-graduation de A laisse globalement invariant le fermé $V(\tilde{A})$ de Spec A. Le schéma $\mathrm{Proj}^{(n)}$ A est alors le quotient "géométrique" de l'ouvert U par cette action de $(k^*)^n$. (L'anneau est supposé vérifier l'hypothèse (H)).

VII.3 - C'est à partir de là qu'il est possible de démontrer la généralisation annoncée en introduction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - J. BERTIN. Automorphismes des surfaces non complètes et surfaces affines réglées. Thèse - Université Paul Sabatier - Toulouse - (1981).

[2] - P. CARBONNE. Algèbres Graduées Normales. Journal of Algebra (à paraître) (Sera vraisemblablement paru quand paraîtront les actes du Colloque d'Algèbre).

[3] - P. CARBONNE. Sur les singularités cycliques qutient. Colloque d'Algèbre. Université de Rennes I (1980), p. 187-200.

[4] - M. DEMAZURE. Anneaux gradués normaux. Séminaire Demazure - Giraud - Tessier sur les singularités des surfaces. Ecole Polytechnique (1979).

[5] - I.V. DOLGACHEV. Automorphic forms and quasihomogeneous singularities.
Funk. Anal. i Priložen 9-(2). p. 67-68. (1968).
Traduit dans : Funct. Anal. Appl.

[6] - A. GROTHENDIECK. Eléments de géométrie algébrique I.H.E.S. (Surtout le ch. II).

[7] - R. HARTSHORNE. Algebraic Geometry. G.T.M. n° 52. Springer Verlag (1977).

[8] - P. ORLIK et P. WAGREICH. Singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$-action. Math. Ann. 193. p. 121-135. (1971).

[9] - H. PINKHAN. Normal singularities with $\mathbb{C}^*$-action. Math. Ann. 227, p. 183-193 (1977).

Signalons en outre les deux articles suivants :

[10] - H. PINKHAM. Deformations of normal singularities with $\mathbb{C}^*$-action. Math. Ann. 232, p. 65-84 (1978).

[11] - K. WATANABE. Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings.
Nagoya Math. J. 83, p. 203-211 (1981).

U.E.R. de Mathématiques
Université de Toulouse Le Mirail
5, Allée Antonio Machado
31058 - Toulouse-Cedex