MICHÈLE ARTIGUE
JEAN-LUC DORIER

Ingénierie didactique d'un point de vue méthodologique : étude d'une recherche sur l'enseignement de l'algèbre linéaire

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989, fascicule S6
« Vème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 131-139
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989___S6_131_0>

Vendredi 1er septembre 1989

Travaux dirigés : *"Ingéniérie didactique d'un point de vue méthodologique : étude d'une recherche sur l'enseignement de l'algèbre linéaire"*

par Michèle ARTIGUE, Jean-Luc DORIER

Université PARIS 7
Institut Fourier, Université de GRENOBLE 1

I - OBJECTIFS ET PRESENTATION GLOBALE DU TD

Cet atelier a pour objectif d'engager les participants dans l'analyse d'un point de vue méthodologique de textes relatifs à une recherche d'ingénierie didactique. Il s'agit d'une recherche en cours sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année, menée par J.L.Dorier à l'Université de Grenoble 1. Les textes fournis aux participants sont des textes provisoires et, en particulier, ils ne correspondent pas aux standard que l'on peut inférer du cours sur l'ingénierie didactique de la matinée. Si nous avons choisi ce type de texte, en dépit des difficultés que cela pouvait susciter, c'est parce que justement ils sont encore proches du travail privé du chercheur et que, comprendre leur organisation, le type de fonctionnement dont ils témoignent, analyser en quoi ce qui est en jeu là se rapproche ou se différencie d'un travail canonique d'ingénierie didactique, en quoi ce qui est écrit se rapproche où se différencie d'un texte achevé, comment peut se guider à partir de ce point le travail didactique, est à nos yeux un exercice didactique fondamental.

La recherche de J.L.Dorier est menée dans une section expérimentale où fonctionne une stratégie globale de débat scientifique (cf. cours de G.Arsac et M.Legrand) et elle s'appuie sur les résultats pratiques et théoriques qui ont été obtenus à ce niveau macro-didactique. Elle s'appuie aussi sur les recherches déjà menées sur l'algèbre linéaire, en particulier celles d'A.Robert et J.Robinet, de G.Harel et de B.Artmann. Par ailleurs une partie de cette recherche consiste en une anlyse historique des conditions d'émergence du concept d'espace vectoriel et de son évolution au sein de l'édifice mathématique. La partie proposée pour l'analyse concerne une activité métamathématique où sont introduits les axiomes de la structure d'espace vectoriel : après un travail individuel introductif sur les groupes, ces axiomes sont dégagés d'un ensemble de propriétés perçues comme nécessaires à la résolution simple de certaines équations. Le texte relatif à cette partie de l'ingénierie était trop long pour pouvoir être lu et travaillé dans le temps imparti. Nous avons décidé de centrer l'analyse sur deux moments de ce texte : l'un qui décrit et justifie les choix globaux effectués à ce niveau, l'autre qui présente une partie de l'analyse a priori de la situation d'introduction de l'axiomatique. Il s'agit d'une partie seulement puisque la séance s'appuie sur un travail préalable autonome des étudiants concernant justement la structure de groupe et la résolution d'équations sur la base d'un texte qui n'est pas fourni ici.

Il est clair qu'il s'agit là d'un compromis entre deux contraintes contradictoires : donner un texte suffisamment complet, donner un texte lisible en un temps relativement court et que la transformation de l'exercice fondamental décrit ci-dessus en exercice d'école oblige à un tel compromis.
A priori, les extraits choisis ici nous semblent réaliser un compromis acceptable. Nous faisons l'hypothèse que, bien que partiels, ils doivent permettre de lancer le travail méthodologique sans trop le fausser. Pour réduire les inconvénients du compromis, il est d'autre part prévu que J.L.Dorier puisse apporter des informations aux participants qui le demanderaient lors du travail en groupe, ou qu'il prenne la parole dans les phases

collectives si les interprétations apportées lui semblent pouvoir être invalidées par des éléments dont les participants n'auraient pas eu connaissance.

II - ORGANISATION PEDAGOGIQUE

L'organisation pédagogique prévue est articulée en quatre phases :

1) Introduction et mise en place de la phase 2 (10 minutes) :
Dans cette phase, il s'agit dans un premier temps de situer rapidement la recherche au sein de laquelle se situe le travail présenté, de présenter les objectifs du TD en soulignant le caractère provisoire et décontextualisé des extraits à analyser et en donnant les raisons de ce choix effectué et enfin de fixer clairement le contrat : il ne s'agit pas de juger de la pertinence des choix effectués mais d'analyser le travail d'un point de vue méthodologique à partir des éléments dont on dispose. Ceci est d'autant plus important que la tendance naturelle au dérapage sera sans doute ici particulièrement forte du fait même des choix effectués qui peuvent apparaître comme très formels.
Dans un deuxième temps, il s'agit de mettre en place l'activité de la phase 2, en précisant qu'on demande là une première analyse encore relativement grossière et qu'il importe de ne pas se perdre dans les détails. On donne aussi le temps imparti à cette activité : 50 minutes.

2) La première analyse des textes (50 minutes) :
Il est prévu de séparer les participants en groupes de 4 ou 5 personnes, avec si possible 2 groupes au moins et 3 au plus pour chaque texte. La lecture des textes est guidée par les questions suivantes :

Texte 1 :
1 - Réaliser un organigramme qui rende compte des éléments d'analyse présents dans ce texte d'introduction, de leur nature et de leur structuration (il s'agit de construire assez rapidement un instrument de travail pour aborder les autres questions)
2 - Quelles sont les dimensions d'analyse privilégiées ? Y-a-t- il des dimensions qui n'ont pas été prises en compte ? Ceci peut-il s'interpréter didactiquement ?
3 - Comment est organisée, l'interaction entre les considérations dépendant du contexte étudié ici et les considérations plus générales ?

Texte 2 :
1 - Représenter par un organigramme la structure de cette analyse a priori (il s'agit de construire assez rapidement un instrument de travail pour aborder les autres questions)
2 - La partie a-didactique de l'analyse : Qu'est-ce-qui est explicité dans cette composante au niveau descriptif, au niveau prédictif ?
3 - La place de l'enseignant dans l'analyse a priori : Quels sont les types d'intervention, les décisions de l'enseignant qui sont pris en compte ? Ceci peut-il s'interpréter didactiquement ?

Soulignons qu'à nos yeux, les organigrammes ont également pour fonction de constituer un support à la communication intergroupes dans la phase suivante.

3) Présentation et comparaison des travaux des différents groupes (30 minutes) :
L'objet de cette phase est d'abord de faire en sorte que chaque participant ait une vision des deux aspects (global et local) de l'analyse bien qu'il n'en ait traité personnellement qu'un. Il est ensuite, par la confrontation des productions relatives à un même texte, d'aider à mieux saisir l'enjeu d'un tel exercice didactique, son intérêt mais aussi sa difficulté. Il est enfin de parvenir au sein du TD à une cohésion suffisante par rapport au

travail engagé dans la phase 2 pour que la discussion collective prévue à la phase suivante puisse fonctionner efficacement.

4) Débat (30 minutes) :
L'objet de cette phase est de lancer le débat, en s'appuyant sur le cas particulier étudié, sur des questions, à nos yeux cruciales :
1 - En quoi l'analyse a priori effectuée dans le texte engage-t-elle une démarche de validation ?
2 - Ces textes véhiculent-ils une conception de la reproductibilité et si oui, laquelle ?
3 - Quelles propositions ferions-nous à un chercheur, d'un point de vue méthodologique, sur la base d'un texte comme celui-ci ?

Nous voudrions signaler que, malgré le travail fourni par les participants et le respect quasi-unanime du contrat passé, le TD n'a pas réussi à respecter cette organisation, la phase de constitution des organigrammes ayant pris plus d'une heure et demie au lieu des 50 minutes initialement prévues.

TEXTE 1

2) Analyse a priori.

Les axiomes : un enjeu métamathématique.

1) Problématique et hypothèses.

Avant d'expliciter le type d'introduction que nous avons mis sur pied pour ce cours, il nous semble important de résumer, succintement, le trajet qui nous y a conduit.

Nous avons donc parallèlement à notre étude historique et à l'explicitation des prérequis, tenté de déterminer quel contenu et quelle forme pouvait prendre une introduction du cours d'algèbre linéaire tout en essayant de mieux cerner les connaissances visées par cet enseignement. Nos premières recherches nous ont amené à nous forger quelques hypothèses dans ce sens.

Tout d'abord nous pensons qu'on ne peut justifier une étude des concepts d'algèbre linéaire en se restreignant à la géométrie ou aux dimensions deux et trois. Au contraire nous croyons que c'est en donnant un champ d'applications le plus vaste possible, que l'on peut montrer l'intérêt de l'algèbre linéaire, qui, à notre avis, réside essentiellement dans l'aspect unificateur et simplificateur de la théorie des espaces vectoriels. Ce point de vue est déjà en opposition avec le contenu du programme auquel nous sommes tenu (cf annexe), il a par contre déjà été exprimé lors d'autres travaux sur cette question (ref J.Robinet A.Robert).

Ce premier point explicité, nous avons cherché du côté des résultats théoriques en didactique, un outil d'analyse pour mettre au point notre séquence d'introduction. Nous avons, tout d'abord, utilisé les travaux de G.Brousseau (ref) et surtout de R.Douady (ref). En nous appuyant sur la théorie de la dialectique outil-objet et du changement de cadre, nous avons cherché un problème satisfaisant aux conditions énoncées par R.Douady pour permettre d'introduire le concept un peu flou de linéarité ou un concept central en algèbre linéaire. Nous rappelons ici ces conditions en citant l'auteur (in RDM vol 7 n°2 p13, 1986).

" -L'énoncé (contexte et questions) a du sens pour les élèves.

- Compte-tenu de leurs connaissances, les élèves peuvent engager une procédure de résolution, mais ils ne peuvent pas résoudre complètement le problème.

- Les connaissances visées par l'apprentissage (contenu ou méthode) sont des outils adaptés au problème.

- Le problème peut se formuler dans deux cadres différents. ..."

En outre, nous avons eu connaissance de quelques tentatives menées par une équipe de Paris VI, qui ne répondaient que partiellement à notre

TEXTE 1

problématique. Ensuite
point en nous appuyant,
citée plus haut.

Notre choix s'est port
si on s'intéresse à la co
$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$), on a int
ou moins l'infini. Ceci pe
avec une calculette. De p
la divergence dans un n
problème sous un jour f
de dimension 2 , par un
une droite de suites con
divergentes.

Partant de ces remar
avons écrit un scénario
1988 en DEUG A à Greno
d'échec, au moins par
difficulté qu'il y a, dans
interaction avec la conna
les deux cadres dans les
analytique d'expériment
plus globale. Or plus qu'
qui ne sont peut-être
situation présente-, la c
semble bien être la prise
point de vue du local au
par coup, en fonction d
problème. En outre,
convergence, la découve
est un fait plus détermin
vraiment performante q
recherche de suites géo
de l'heuristique, et ne p
justifiables. Ces difficult
problème, dont une arti
(la découverte de la suit
rendent la phase finale d
pas réellement cerner l'o

Plus généralement, ce
si tous les concepts -par
un aspect outil avant d'
précédente, par exemp
génératrice ou de base,

exhibées, tout se résume à une banale résolution de système 2x2. Il semblerait bien plutôt que ces notions sans être fondamentales pour ce problème, permettent, si on les connaît, donc a posteriori, de mieux justifier certaines étapes dans la résolution et de classer ce type de problèmes dans une classe plus vaste ce qui permet de mettre en place automatiquement, des processus d'investigation.

En définitive, les véritables situations ayant justifié historiquement l'utilisation de l'algèbre linéaire sont hors de portée des étudiants de DEUG et de toute façon ne touchent pas aux premiers concepts. De plus il semble que si beaucoup de problèmes mathématiques ont trouvé des solutions plus élégantes plus simples ou plus complètes grâce à l'algèbre linéaire, aucun ne saurait à lui seul justifier l'introduction des premiers concepts d'algèbre linéaire. Pourrait-on habilement utiliser une transposition didactique ou y-a-t-il vraiment un écueil théorique ? C'est une question de fond à laquelle on ne peut que donner des éléments de réponse partiels.

Pour notre part, incapable de trouver le "bon" problème permettant d'introduire l'algèbre linéaire, nous avons essayé de trouver un détour. Pour ce faire, nous nous sommes appuyé sur les réflexions d'A. Robert. S'appuyant sur les spécificités de l'enseignement post-obligatoire, A Robert suggère en effet qu'il est possible d'utiliser de nouveaux "leviers" en particulier le "levier" métamathématique.

Pour travailler dans cette direction il était nécessaire d'arriver à clarifier notre épistémologie de l'algèbre linéaire. Comme nous l'avons dit plus haut, nous pensons que l'intérêt principal de l'algèbre linéaire est d'unifier et de simplifier. Elle permet d'appliquer des résultats théoriques à une classe d'ensembles très variés, dont on oublie certaines carctéristiques extérieures, pour n'utiliser que la structure linéaire. La reconnaissance de cette structure linéaire, repose sur peu de critères qui sont les axiomes, dont tous les autres résultats, aussi élaborés soient-ils, découlent. Pour le spécialiste, dont la culture est étendue, l'algèbre linéaire représente donc un gain de temps aussi bien qu'une économie de pensée, puisqu'elle lui permet de répondre à des problèmes extérieurement très différents avec des outils identiques particulièrement performants. Ces considérations sont pourtant beaucoup trop générales pour le débutant qui manque de points de référence.

Pour une introduction, il faut donc trouver une transposition de cette épistémologie globale à un niveau plus local et accessible aux débutants. Dans le paragraphe qui suit nous allons montrer comment nous avons essayer de résoudre cette difficulté, et nous décrirons la séquence mise en place.

ii) Proposition

Un étudiant standart
avoir conscience de la
mécanismes de pensée
connaissances ne sont p
nécessaire, pour ressent
intégré, plus ou moins in
toujours en connaître
simples, est la résolution
de composition interne
équation se résoud facile
la recherche du symétri
place une technique a
l'exemple. On peut voir,
ce type d'équation dans
de la structure dans leur
conscience de tous ces p
dans des ensembles as
connait la définition axi
(même si ses connaissa
étendues). Si nous adr
connaissances d'un étu
d'une problématique acc
enseignement métamath
est initialement destin
pouvoir confirmer avec t

Nous proposons d'ut
notre séquence d'introd
initiatique à notre prob
dans un domaine où la
étudiants. De plus, la que
d'une structure en fonct
axiomes apparaisent c
équations x□a=b se r
retrouver cette démarc
vectoriel. Enfin la struct
d'espace vectoriel, ainsi
plan métamathématiqu
mathématique, il nous p

Pour rattacher cette
fils directeurs. Tout d'ab
(cf partie hist), nous int
sur $\mathbb{Q}$, comme un prolon

TEXTE 1

qui se fait "naturellement" sur un groupe "additif". L'utilité de ce prolongement peut se justifier par le besoin d'une proportionalité plus opérationnelle en particulier, pour la résolution des équations du type $2x=3a$. Ensuite, il nous semble important, toujours dans notre problématique générale de montrer dès le départ, le côté opérationnel et simplificateur des axiomes. Ainsi nous essaierons de mettre en place une activité où les étudiants auront à leur charge de dégager les axiomes d'un ensemble plus vaste de propriétés -on envisagera plusieurs scénarios permettant d'arriver à cet ensemble de propiétés-.

Nous avons donc explicité les grandes lignes de la séquence d'introduction. Les principales connaissances que nous pensons pouvoir ainsi viser sont :

-La définition axiomatique des espaces vectoriels et leurs premières propriétés -règles de calculs-, pour ce qui est du contenu strictement mathématique.

et sur un plan plus métamathématique :

-Un aspect de l'approche simplificatrice et unificatrice de l'étude des structures. Cet aspect est très local mais il a l'avantage d'être opérationnel et il servira d'amorce à un discours métamathématique récurrent dans notre cours.

- Une implication personnelle (des étudiants) dans l'explicitation d'une axiomatique, qui oblige à l'utilisation du formalisme.

TEXTE 2

Nous allons , à présent donner une description détaillée de ce que nous avons mis en place, avec une analyse a priori des comportements possibles des étudiants.

Le discours métamathématique sur les équations $a\square x=b$, devant opérer à des degrés différents sur les individus, nous avons décidé de le présenter sous forme de polycopié distribué, plusieurs jours avant le premier cours. Pour avoir un retour sur cette activité de travail individuel, nous avons proposé quelques exercices en demandant de rédiger des solutions (on trouvera le contenu de ce polycopié en annexe).

Le contenu de ce polycopié, a été en partie justifié plus haut. Nous allons maintenant mieux expliciter certains choix plus locaux.

Par rapport aux deux équations explicites proposées en exemple au début du polycopié, voici les raisons qui nous les ont fait choisir. Nous pensons que les deux opérations en jeu (composition des bijections du plan affine et produit vectoriel) sont connues des étudiants mais pas assez encore pour qu'ils trouvent ces deux équations "faciles". Leurs résolutions devrait être à la portée des étudiants sans être trop facile. De plus toutes deux paraissent de difficultés a priori identiques, pourtant les mécanismes de pensée à mettre en œuvre ont des natures fondamentalement différentes. Pour la première on peut appliquer un

schéma connu qui est ce
structure de groupe nou
sans parler de bijection
$F=T(2e_1)\circ R(0;-\pi/2)$. Par
plus de connaissances su
spécifique à ce cas préci
faut savoir que l'on a
système de trois équat
inconnues. Les résoluti
l'étudiant ait une part a
du sens au discours méta
que peu de traces. Par
les quelques exercices du
sur l'engagement et les d

Il nous a semblé imp
pour les exemples prop
mettre en défaut, même
cette tâche est très déli
espaces vectoriels.

On ne fait pas un co
l'examen des propriétés
du neutre et de celle
d'utilisation des axiomes
intéressant pour la stru
(conjecture: dans un gro
lecteur prenne en charge
aussi parce que cette p
terrain pour le travail q
ce résultat sert en effet à

Le terme de groupe
spécialiste. Comment en
simplement le nom don
groupe commutatif serai
aux exemples donnés pa
niveau où nous nous pla
semble-t-il, ne prête pas

Nous pensons que l
l'activité du lecteur d
fonctionnements élémen
cohérence. Une façon de
; alors $(-n).(-x)=-((-x)+...+$
on a que $((-x)+...+(-x))+x+$
tassez délicate et il n'est
prendre en charge, un pr

gros (illusion de transparence) et qu'ils voient qu'il y a réellement quelque chose à démontrer. Il serait bon, au vu des résultats donnés par écrit, de retravailler cette question en TD pour y répondre entièrement.

Nous allons voir ci-dessous comment le dernier exercice pourra nous être utile pour envisager un scénario de prolongement de cette première activité.

Avant tout, il faudra s'occuper du devenir de ce polycopié. On pourra en parler, avant le cours, en séance de TD, pour recueillir les premières impressions, et pour éventuellement restimuler ceux qui auraient négligé cette activité. L'introduction mise en tête du polycopié pousuit le même but ; elle doit être complétée par un petit discours lors de la distribution de ce polycopié et par des rappels lors des cours.

TEXTE 1

Avant le cours, les feuilles d'exercices auront été relevées par l'enseignant. En fonction du contenu des réponses en particulier à la dernière question nous envisageons deux déroulements possibles.

Première alternative "favorable" : les étudiants ont dans leur réponses écrites proposé majoritairement, un nombre suffisant propriétés "intéressantes" de la multiplication externe. En particulier, les restrictions à $\mathbb{Z}$ des trois axiomes : $n(m.x)=(nm).x$, $(n+m).x=n.x+m.x$ et $n.(x+y)=n.x+n.y$, se retrouvent dans un nombre suffisant de copies. Il y a une part de subjectivité, que l'enseignant devra assumer, pour évaluer où placer la barre.

Dans cette alternative, pour commencer l'atelier, l'enseignant recopie alors (en les numérotant) les propriétés les "plus souvent rencontrées". Il y a encore une part de subjectivité dans les choix de l'enseignant. On peut néanmoins donner quelques règles qui permttrons de se guider. Il ne faut pas essayer d'écarter des difficultés, surtout si elles sont récurrentes ou significatives. Par exemple, on peut mettre plusieurs énoncés d'une même propriété. On demandera alors aux étudiants, en amphithéâtre, de commencer par un tri. On peut de même recopier des énoncés non conformes, ou correspondant à de fausses propriétés. L'activité de tri est dans ces cas une étape méthodologique habituelle en situation de débat quand les étudiants proposent leurs conjectures. Dans le cas présent le recul doit permettre à l'enseignant d'écarter certains énoncés qui n'enrichirait pas le débat à cause de leur caractère spécifique. Ces problèmes individuels pourront être résolus par un corrigé écrit de chaque copie. D'autre part s'il s'avérait que le nombre de propriétés était très grand, l'enseignant doit ne donner que les plus souvent citées, en expliquant que c'est pour que le débat à suivre soit pratiquement gérable.

Ensuite l'enseignant introduit le prolongement de la multiplication

TEXTE 2 : PARTIE A ANALYSER

externe au rationnel q
suivante:
" -Cette multiplicatio
additifs. Mais elle a des
introduit une "proporti
aurait bien envie de dire
de savoir définir la mul
pour tous les rationnels.
définir par exemple 3.
(3/2).y. Bien sûr cette m
c'est-à-dire que pour n
considère que n est ent
vient de trouver resten
définir une telle multipli
l'on a un espace vecto
sophistiquée que celle de
quels en sont les axiomes
s'en fait sentir chez les
axiome, avec l'aide du dé

Deuxième alternativ
résultats, en particulier
d'espace vectoriel n'ont
ayant constaté cela sur le
un début de séance légèr
Il introduit directem
propriétés avec les entie
l'équation $2.x=3.x_0$ où x_0
$x=(3/2)x_0$ on a besoin de
c'est à dire en fait que l'o
Puis, en s'inspirant d
explique que l'on voudra
des équations en x du ty
et x_0 des éléments de l'
$a \neq b$. Il demande alors qu
"simplement" les solution
Regardons ainsi quelle
Pour résoudre (1) o
$(a.(b.x)=(ab).x)$ pour écri
la propriété $1.x=x$. Cette
de la loi externe sur les
un des avantage de cette

cette propriété qui figure au rang des axiomes, mais et d'une nature différente des autres.

Pour résoudre (2) on a besoin de la première distributivité $(a.(x+y)=a.x+a.y)$ pour pouvoir écrire $a.x=b.x+b.x_0$ puis $a.x-b.x=b.x_0$ on peut alors utiliser $-b.x=(-b).x$ (propriété dont il faudra voir qu'elle se déduit des axiomes) et l'axiome de l'autre distributivité $((a+b).x=a.x+b.x)$ on se ramène ainsi au premier type : $(a-b).x=b.x_0$. On peut utiliser d'autres démarches, mais on utilise forcément les deux distributivités.

Dans le cas de la première alternative, on peut engager cette activité après avoir expliciter les axiomes, comme une application.

Après ces deux débuts de séance possibles on arrive à un état commun. Les espaces vectoriels ont été définis comme des groupes additifs munis d'une multiplication externe par des rationnels, devant vérifier certaines propriétés. Celles-ci ne seront pas exactement les mêmes dans tous les cas, pourtant leur nombre devrait être sensiblement identique (autour de dix) et posséder un tronc commun important:

les propriétés liées au prolongement de $\mathbb{Z}$ (reprises du polycopié) :

(1) $0.x=0_E$

(2) $1.x=x$

(3) $n\in\mathbb{N}$ $n.x=x+x+...+x$ n fois.

(4) $n\in\mathbb{Z}$ $n.x=-(-n).x$

les axiomes (non encore reconnus comme tels) :

(5) $a(b.x)=(ab).x$

(6) $a.(x+y)=a.x+a.y$

(7) $(a+b).x=a.x+b.x$

Il semble fort probable a priori que l'on ait d'autres propriétés comme:

(8) $(-n)(-x)=nx$

(9) $(-b).x=-(b.x)$

(10) $b.(-x)=-(b.x)$

etc...

Pour mieux gérer le débat qui va suivre, il est utile de numéroter ces propriétés.

On demande donc de trouver les axiomes, c'est-à-dire le minimun de propriétés dont toutes les autres se déduisent (cf. débat éventuel sur la définition d'un axiome). Le temps de réflexion à laisser aux étudiants sera plus ou moins long suivant le nombre de propriétés relevées. Il peut être utile, après un temps de réflexion intermédiaire, de demander quelle est la méthodologie à employer pour arriver aux axiomes. En l'occurence la méthodologie qui semble s'imposer consiste à rayer une à une les propositions qui se déduisent des autres jusqu'à ce que ce ne soit plus possible ; les propriétés restantes seront alors les axiomes.

Pour aider à la compréhension on peut en même temps que l'on raye

TEXTE 2

effectivement les proposi
arbre matérialisant les d
axiomes.

Lors de cette activité,
problèmes:

- Un étudiant propose
pas valable, ce n'est pas u
arriver par contre surt
suffisamment fortes pour
alors intervenir pour expl
essayer d'abord de rayer
qu'elles contiennent les a
difficulté épistémologique
pourra d'ailleurs tester un
de l'apparition ou non
connaissance, il n'y a pa
systèmes d'axiomes équiva
qui semble être le premie
immédiatement -à des var
leur forme actuelle (cf.par
eu la nécessité d'une défin
qui s'est dès lors imposée
viennnent des étudiants,
avant ce problème de c
d'axiomes. C'est en effet u
(définition des entiers,
problématique en algèbre

- Le deuxième type
l'activité. Il y a en effet
propriétés ne puissent êtr
consensus apparaisse pour
large que les axiomes cl
semble bien que l'enseign
ou moins directive, soit en
pire en prenant en charg
paramètre que l'on devra
vue de l'apprentissage, s
quelques propriétés ont pu
été en grande partie att
charge la fin, on peut pe
active le rôle des axiom
démonstrations à suivre a

Plus généralement co
théorie, pour montrer que

des autres, il faudrait produire des contre-exemples, c'est-à-dire des ensembles qui les vérifient toutes sauf une, et ce pour chaque propriété. Il ne semble pas utile d'expliciter cette question -sauf peut-être si elle correspondait à une demande très forte d'une groupe important d'étudiants-, nous pensons que l'arrêt de l'activité sur une opinion collective subjective devrait être satisfaisant pour notre problématique. Finalement l'indépendance des axiomes n'est pas vitale, ce qui est important c'est d'avoir peu de propriétés à vérifier.

TEXTE 2

L'institutionnalisation de cette activité d'introduction portera donc sur l'effort de simplification mis en place. Après avoir précisé qu'on peut pareillement prolonger la loi externe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans certains cas, on donnera la définition axiomatique et les premières propriétés d'un espace vectoriel. On montrera la facilité de vérification des axiomes sur un exemple précis, puis on donnera la liste des espaces vectoriels classiques qui serviront de référence pour la suite.