XAVIER PELGRIN

Un problème à frontière libre

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 185-191
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___1_185_0>

UN PROBLÈME À FRONTIÈRE LIBRE.

XAVIER PELGRIN

1. Préliminaires.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ dont le complémentaire est connexe.
Soit $j \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ t.q :

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(j) \subset K, \\ \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{j} \ \mathrm{dx} > 0 \,. \end{cases}$$

Pour $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, on note $\Omega_u = \{x \in \mathbb{R}^2 / u(x) \neq 0\}$, $|\Omega_u|$ la mesure de Lebesgue de Ω_u et χ_u l'indicatrice de Ω_u.

On définit :

$$A(\gamma) = \{w \in H^1(\mathbb{R}^2) \,/\, |\Omega_w| \leqslant \gamma\}$$

et :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v^2(x) \quad dx - \int_{\mathbb{R}^2} j(x)\, v(x)\, dx \,.$$

On considère le problème :

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in A(\gamma) \text{ tel que :} \\ \forall v \in A(\gamma) \quad , \quad J(u) \leqslant J(v) \,. \end{cases}$$

On admettra :

- Le problème (P) a une solution u_γ.
- $u_\gamma \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ (donc est lipschitzienne), et a un support borné.
- On a : $-\Delta u_\gamma = j$ dans Ω_{u_γ} (qui est ouvert).
- $(\partial u_\gamma)^2 = s - \lambda\, T \chi_{u_\gamma}$, où :

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} \quad \int_{\mathbb{R}^2} (j\,\partial u)(x-y)\, y^{-1}\, dy \,,$$

$$\lambda = -\frac{1}{2\gamma} \quad \int_{\mathbb{R}^2} j\, \nabla u . \vec{x}\, dx \,,$$

$$Tg = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|y|>\varepsilon} g(x-y)\, y^{-2}\, dy \,.$$

Remarques :

- Tg est la transformée de Beurling de g.

- On a utilisé les notations :
$\partial v = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - i\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)$,
$y = y_1 + i\, y_2$,
$dy = dy_1\, dy_2$: mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

- Pour γ assez grand, on a : $K \subset \Omega_{u_\gamma}$ et $u_\gamma > 0$ sur Ω_{u_γ}.
- On pose :

$$u_\infty(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y|\, j(y)\, dy$$

et on a alors $-\Delta u_\infty = j$ dans $\mathbb{R}^2$.

On peut montrer que $(u_\gamma(x) - u_\gamma(0)) - (u_\infty(x) - u_\infty(0))$ tend vers 0 quand γ tend vers $+\infty$ dans $\mathcal{C}^\infty(B)$ pour toute boule B .

En utilisant cela, plus le fait que les ensembles de niveau de u_∞ : $\{x / u_\infty(x) \geqslant u_\infty(x_0)\}$ sont convexes pour $|x_0|$ assez grand, on montre que u_γ a *au moins un ensemble de niveau convexe et contenant* K, pour γ assez grand. On note $\Lambda = \{x / u_\gamma(x) \geqslant a\}$ cet ensemble.

2. La frontière est lipschitzienne.

Ce qui précède va nous permettre d'utiliser un "réarrangement étoilé" (*starshaped rearrangement*, cf [1]).

On suppose que $\Lambda = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2, \rho \leqslant r(\theta)\}$, où r est une fonction donnée telle que : $\forall \theta, r(\theta) > \delta$, δ étant une constante positive et (ρ,θ) désignant les coordonnées polaires de $\mathbb{R}^2$.

Soit c fixé. On pose :

$$\begin{cases} D_c = \{x \,/\, u_\gamma(x) \geqslant c\}\,, \\ D(\theta) = \{\, t > \delta \,/\, (t,\theta) \in D_c\}\,, \\ \ell(\theta) = \displaystyle\int_{D(\theta)} \frac{dt}{t}\,, \\ R(\theta) = \delta\, e^{\ell(\theta)}\,. \end{cases}$$

On définit alors :

$$D_c^* = \bigcup_{\theta \in [0,2\pi[} \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2, \rho \leqslant R(\theta)\}$$

et :

$$\begin{cases} \tilde{u}(x) = \sup\{c \in [0,a] \,/\, x \in D_c^*\}\,, \\ u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \in \Lambda\,, \\ \tilde{u}(x) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

On a alors (cf [1]) $|\Omega_{u^*}| \leqslant |\Omega_u|$ et $\|\nabla u\|_{L^2} \geqslant \|\nabla u^*\|_{L^2}$ d'où, en prenant $u = u_\gamma$: $u_\gamma^* \in A(\gamma)$ et $J(u_\gamma^*) \leqslant J(u_\gamma)$.

Donc, u_γ et u_γ^* sont deux solutions de (P) qui coïncident sur K. En remarquant que Ω_{u_γ} est connexe et que $\Delta(u_\gamma - u_\gamma^*) = 0$ sur $\Omega_{u_\gamma} \cap \Omega_{u_\gamma^*}$, on obtient d'abord : $u_\gamma = u_\gamma^*$ sur $\Omega_{u_\gamma} \cap \Omega_{u_\gamma^*}$.

On en déduit que $\Omega_{u_\gamma} = \Omega_{u_\gamma^*}$ (et donc que $u_\gamma = u_\gamma^*$ sur $\mathbb{R}^2$) : en effet, sur la frontière de $\Omega_{u_\gamma} \cap \Omega_{u_\gamma^*}$, $u_\gamma = u_\gamma^*$ par continuité, or sur cette frontière $u_\gamma = 0$ ou $u_\gamma^* = 0$, d'où $u_\gamma = u_\gamma^* = 0$ et on en déduit que $\Omega_{u_\gamma} \cap \Omega_{u_\gamma^*} = \Omega_{u_\gamma}$, d'où le résultat.

Or, par construction, la fonction u_γ^* possède certaines propriétés :

- Ses lignes de niveau sont étoilées par rapport à O.
- Elle est décroissante à l'extérieur de Λ sur toute demi-droite issue de O.

u_γ va donc vérifier les mêmes propriétés. De plus, tout point de Λ peut servir d'origine pour les coordonnées polaires à la place de O.

On en déduit :

- *Les ensembles de niveau de u_γ sont étoilés par rapport à tous les points de Λ. (C'est donc vrai en particulier pour Ω_{u_γ}.)*
- *La fonction u_γ est décroissante sur toute demi-droite sortant de Λ .*

On déduit de la première propriété que $\partial\Omega_{u_\gamma}$ est *lipschitzienne.* (En effet, comme Ω_{u_γ} est étoilé par rapport à tout point de Λ, pour tout x appartenant à $\partial\Omega_{u_\gamma}$, on peut trouver un cône C_x de sommet x contenant Λ et tel que l'intersection de $\partial\Omega_{u_\gamma}$ avec C_x soit réduite à $\{x\}$.)

3. Comportement de ∇u_γ sur la frontière.

Par un principe du maximum appliqué à $h(x) = (x - x_0)\nabla u_\gamma$, on montre facilement que :

$$\forall x_0 \in \Lambda, \forall x \in (\Omega_{u_\gamma} \setminus \Lambda), (x - x_0)\nabla u_\gamma(x) < 0$$

et donc $\nabla u_\gamma \neq \vec{0}$ On va à présent étudier le comportement de ∇u_γ au voisinage de $\partial\Omega_{u_\gamma}$, et plus précisément : $\lim\limits_{t\to 1^-} \nabla u_\gamma(tx_0)$ avec $x_0 \in \partial\Omega_{u_\gamma}$.

On utilise : $(\partial u_\gamma)^2 = s - \lambda T\chi_{u_\gamma}$ et $(\partial u_\gamma)^2 = 0$ en dehors de Ω_{u_γ}.

On pose : $h = \frac{x}{|x|}$ et on calcule, pour $\alpha > 0$:

$(\partial u_\gamma)^2(x - \alpha\, h) - (\partial u_\gamma)^2(x + \alpha\, h)$, puis on fait tendre α vers 0.

Comme s est continue, $\lim\limits_{\alpha\to 0^-} (s(x - \alpha\, h) - s(x + \alpha\, h)) = 0$.

On s'intéresse donc à la limite de

$$T\chi_{u_\gamma}((x - \alpha\, h) - T\chi_{u_\gamma}(x + \alpha\, h)).$$

Formellement :

$$T\chi_{u_\gamma}((x - \alpha\, h) - T\chi_{u_\gamma}(x + \alpha\, h)) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} T\chi_{u_\gamma}(x + \alpha\, z)\frac{4zh}{(z^2 - h^2)^2}\, dz\,.$$

On suppose que $\partial\Omega_{u_\gamma}$ admet une tangente en x et on note Π_x le demi-plan contenant O et limité par cette tangente.

On a alors : $\chi_{u_\gamma}(x+\alpha z) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \chi_{\Pi_x}(x+z)$ pour p.t. z.

On suppose d'abord que $\Pi_x = x + \{(z_1,z_2)/z_2 \geqslant 0\}$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} T\chi_{\Pi_x}(x+z)\frac{4zh}{(z^2-h^2)^2}\,dz = -\pi\,.$$

Dans le cas général (qui s'en déduit par rotation), on trouve $\pi(\nu_1 - i\,\nu_2)^2$ où $\vec{\nu}$ est la normale extérieure à Π_x. Donc : $\lim\limits_{\alpha\to 0^-}(\partial u_\gamma)^2(x-\alpha\,h) = \frac{\lambda}{2}(\nu_1 - i\,\nu_2)^2$.

Remarque : $\partial\Omega_{u_\gamma}$ étant lipschitzienne, elle a une tangente en $\mathcal{H}^1$ presque tout point.

On en déduit : $\lim\limits_{\alpha\to 0^-} \nabla u_\gamma(x-\alpha h) = \mu\vec{\nu}$, en posant : $\mu = -\sqrt{2\lambda}$.

4. Analycité de la frontière.

On pose : $\Omega = (\Omega_{u_\gamma}\setminus\Lambda)\setminus S$ où S est un segment reliant Λ à $\partial\Omega_{u_\gamma}$.

On a : $\Delta u_\gamma = 0$ dans Ω, c'est donc la partie imaginaire d'une fonction holomorphe : $f = v + i\,u_\gamma$.

Comme $\nabla u_\gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, ∇v est dans $L^\infty(\Omega)$; d'où, comme d'autre part $\partial\Omega_{u_\gamma}$ est lipschitzienne, v est (localement) lipschitzienne au voisinage de $\partial\Omega_{u_\gamma}$; on peut donc prolonger v de manière lipschitzienne sur $\partial\Omega_{u_\gamma}$. (En faisant tendre ε vers 0 dans $v((1-\varepsilon)x) - v((1-\varepsilon)y)$ où x et y sont deux points de $\partial\Omega_{u_\gamma}$ où il y a une tangente, on obtient que $v = \mu\,\sigma$ sur $\partial\Omega_{u_\gamma}$, σ étant l'abscisse curviligne sur $\partial\Omega_{u_\gamma}$.). On considèrera donc désormais que f et v sont définies sur $\Omega\cup\partial\Omega_{u_\gamma}$.

On considère à présent la ligne de niveau de u_γ : $\mathcal{L} = \{x/u_\gamma(x) = l\}$ paramétrée par son abscisse curviligne σ.

On pose : $V(\sigma) = v(x(\sigma))$; on a : $V'(\sigma) = \pm|\nabla u_\gamma(x(\sigma))|$; le signe dépendant de l'orientation prise sur $\mathcal{L}$. Donc V est strictement monotone sur $\mathcal{L}$. On en déduit que f est bijective de $\Omega\cup\partial\Omega_{u_\gamma}$ sur son image; on note $g = f^{-1}$. f' ne s'annule pas sur Ω (puisque $\nabla u_\gamma \neq \vec{0}$), donc g est holomorphe dans $f(\Omega)$ et :

$$g'(v+i\,u) = \frac{1}{f'(g(v+i\,u)))}\,.$$

On veut montrer que g est lipschitzienne. Pour cela, on va montrer que $|g'|$ est majorée sur $f(\Omega)$ en montrant que $|f'|$ est minorée.

Pour cela , on se restreint à $\Omega\setminus\Lambda'$, où : $\Lambda' = \{x/u_\gamma(x)\geqslant a'\}$ (avec $a' < a$ pour avoir $\Lambda\subset\Lambda'$).

On définit : $\varphi(x) = -\vec{x}.\nabla u_\gamma = \vec{y}.\nabla v$, avec $\vec{y} = (-x_2, x_1)$. On sait que φ est strictement positive dans Ω .

Soit $x_0\in\partial\Omega_{u_\gamma}$, un point en lequel $\partial\Omega_{u_\gamma}$ a une tangente $\vec{\tau}$, prise telle que la base $(\vec{\tau},\vec{\nu})$ soit directe, $\vec{\nu}$ étant la normale extérieure à $\partial\Omega_{u_\gamma}$.

Comme Ω_{u_γ} est étoilé par rapport à tout point d'une boule B centrée en O, il existe un cône C de sommet x_0, d'angle au sommet α_0, tel que $B\subset C$ et $C\cap\partial\Omega_{u_\gamma} = \{x_0\}$ et $\vec{\tau}$ pointe nécessairement vers le complémentaire de C.

On a : $\lim_{t\to 1^-} \varphi(t\,x_0) = \vec{y_0}.\mu\vec{\tau} \geqslant |x_0|\,|\mu|\,\sin\alpha_0$.

Or $\sin\alpha_0 \geqslant \sin\alpha$ où α est donné par :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{R'} \quad \text{avec : } B(O,R) \subset \Lambda \subset \Omega_{u_\gamma} \subset B(O,R')\,.$$

Donc $\mu\,\vec{y_0}.\vec{\tau} \geqslant |\mu|\,R\sin\alpha = \delta_1$.

Comme φ est strictement positive et continue sur Ω, $\delta_2 = \min_{x\in\partial\Lambda'} \varphi(x) > 0$.

On pose $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$. On a : $\varphi \geqslant \delta$ sur $\partial\Lambda'$ et $\lim_{t\to 1^-} \varphi(t\,x_0) \geqslant \delta$ pour tout point x_0 de $\partial\Omega_{u_\gamma}$ où il y a une tangente, i.e. $\mathcal{H}^1$ presque partout sur $\partial\Omega_{u_\gamma}$.

Soit :

$$\varphi_t : \begin{cases} \Omega' \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \varphi(t\,x)\,. \end{cases}$$

La fonction φ_t est harmonique sur Ω', continue sur $\overline{\Omega'}$, on peut donc écrire en utilisant la *mesure harmonique* ω^{x_1} : (cf [2],[3])

$$\varphi_t(x_1) = \int_{\partial\Omega'} \varphi_t(x)\,d\omega^{x_1}(x)\,.$$

On fait ensuite tendre t vers 1 ; comme φ est continue en x_1, $\varphi_t(x_1)$ tend vers $\varphi(x_1)$; comme d'autre part : $\forall E \subset \partial\Omega'$, $\mathcal{H}^1(E) = 0 \Leftrightarrow \omega^{x_1}(E) = 0$ (car Ω' est lipschitzien,cf [4]), et que : $\lim_{t\to 1^-} \varphi(t\,x) \stackrel{\text{def}}{=} F(x) \geqslant \delta$ pour $\mathcal{H}^1$ p.t. $x \in \partial\Omega'$, on obtient en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le fait que ω^{x_1} est une mesure positive :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega'} \varphi_t(x)\,d\omega^{x_1}(x) &\xrightarrow{t\to 1} \int_{\partial\Omega'} F(x)\,d\omega^{x_1}(x) \\ &\geqslant \delta \int_{\partial\Omega'} d\omega^{x_1} = \delta\,. \end{aligned}$$

donc $\varphi(x_1) \geqslant \delta$ pour tout $x_1 \in \Omega'$.

On en déduit que $|f'| \geqslant \delta'$ et donc : $g' \in L^\infty(\Omega')$.

On va étudier g (et g') sur un (petit) rectangle $A =]\alpha_1,\alpha_2[\times[0,\beta[$. g' est bornée sur l'intérieur de A, donc *g est uniformément lipschitzienne sur l'intérieur de A*, et comme g est continue sur A, on en déduit que *g est lipschitzienne sur A*.

On pose :

$$\begin{cases} G_u(v) = g'(v + i\,u) & \text{pour } u > 0, \\ G_0(v) = \text{dérivée au sens de } \mathcal{D}'(]\alpha_1,\alpha_2[) \text{ de } t \stackrel{\tilde{g}}{\longmapsto} g(t). \end{cases}$$

Comme g est holomorphe sur l'intérieur de A, on a : $G_u \in \mathcal{C}^\infty(]\alpha_1,\alpha_2[)$ pour $u > 0$. Comme $\tilde{g}$ est uniformément lipschitzienne sur $]\alpha_1,\alpha_2[$, on en déduit que : $G_0 \in L^\infty(]\alpha_1,\alpha_2[)$.

Soit $x \in \partial\Omega_{u_\gamma}$, on a : $\tilde{g}^{-1}(x) = \mu\,\sigma(x)$ donc $\mu\,\tilde{g}'(v) = \vec{\tau}$, où $\vec{\tau}$ est la tangente à $\partial\Omega_{u_\gamma}$ en $\tilde{g}(v)$, d'où : $|G_0| = |\mu|^{-1}$ *p.p.* .

On peut montrer que $G_u(v)$ converge vers $G_0(v)$ pour presque tout v.

Idée de la démonstration : on prend $z = v + i\,u$, Γ un demi-cercle de centre z, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap \{u \geqslant \varepsilon\}$ et : $\Gamma_\varepsilon \cap \{u = \varepsilon\} = \{a_\varepsilon + i\,\varepsilon; b_\varepsilon + i\,\varepsilon\}$.

La formule de Cauchy donne :

$$G_u(v) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \frac{g'(t + i\,\varepsilon)}{t + i\,\varepsilon - z}\,dt + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{g'(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,.$$

On fait tendre ε vers 0, en utilisant : $g'(. + i\,\varepsilon_k) \underset{L^2\,\text{faible}}{\rightharpoonup} G_0$, pour une certaine suite $(\varepsilon_k)_k$, et on obtient :

$$G_u(v) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a_0}^{b_0} \frac{G_0(t)}{t - (v + i\,u)}\,dt + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{g'(\zeta)}{\zeta - (v + i\,u)}\,d\zeta\,.$$

A présent, on fait tendre u vers 0, la première intégrale est en fait $F_u(v) = (\Phi * \frac{1}{. + i\,u})(v)$ où $\Phi(t) = -G_0(t)\,\chi_{[a_0,b_0]}(t)$, et en utilisant la transformée de Fourier, on montre que F_u converge dans L^2, donc presque partout, quitte à extraire une sous-suite.

En utilisant le fait que les lignes de niveau de u_γ sont étoilées par rapport à tous les points d'une boule B, on montre que, à condition de prendre A assez petit, $\arg(g')$ reste dans un intervalle de longueur strictement inférieure à $2\,\pi$; on va donc pouvoir définir une fonction h holomorphe dans A par : $h(v + i\,u) = i\,\log(\mu g'(v + i\,u))$.

Si on pose $h_0(v) = i\,\log(\mu G_0(v))$, d'après ce qui précède, on a :

$(*)$ $\qquad h(v + i\,u)$ converge vers $h_0(v)$ qui est réel, quand u tend vers 0.

On pose :

$$\tilde{h}(v + i\,u) = \begin{cases} h(v + i\,u) & \text{si } u > 0,\\ \bar{h}(v + i\,u) & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

Soit Γ_0 un cercle de centre $z_0 \in \{u = 0\}$ et de rayon r_0 ; on le coupe à $u = \pm\varepsilon$.

On pose :

$$\begin{aligned}\Gamma_{+\varepsilon} &= \{u \geqslant \varepsilon\} \cup (\{u = \varepsilon\} \cap B(z_0, r_0))\,,\\ \Gamma_{-\varepsilon} &= \{u \leqslant -\varepsilon\} \cup (\{u = -\varepsilon\} \cap B(z_0, r_0))\,.\end{aligned}$$

Soit $z \in B(z_0, r_0)$, on a, si $u > 0$:

$$\tilde{h}(z) = h(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{+\varepsilon}} \frac{\tilde{h}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

et :

$$0 = \int_{\Gamma_{-\varepsilon}} \frac{\tilde{h}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,,$$

d'où, en faisant tendre ε vers 0 et en utilisant $(*)$:

$$\tilde{h}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{h}(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \,.$$

Donc $\tilde{h}$ est holomorphe sur $B = B(z_0, \frac{r_0}{2})$, et on en déduit que g est la restriction d'une fonction holomorphe sur B, et donc ,comme $\partial\Omega_{u_\gamma}$ est l'image par g de l'axe des réels (i.e. $\{u = 0\}$), on en déduit que $\partial\Omega_{u_\gamma}$ *est analytique.*

Remarque : Une fois que l'on sait que $\partial\Omega_{u_\gamma}$ est analytique, et donc que $|\nabla u_\gamma|$ =constante sur $\partial\Omega_{u_\gamma}$, on en déduit que $\partial\Omega_{u_\gamma}$ est *convexe.* (cf [5])

Références :

1. B. Kawohl, *Rearrangements and convexity of level set in PDE. Lecture Notes in Mathematics,1150*, Springer-Verlag, Berlin-New York.
2. R.A. Hunt , R.L. Wheeden, *On the boundary values of harmonic functions*, Trans. Am. Math. soc. **132** (1968), 307–322.
3. ———, *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Am. Math. soc. **147** (1970), 507–527.
4. B. Dahlberg, *On estimates of harmonic measure*, Arch. Rational Mech. Anal. **65** no. 3 (1977), 275–288.
5. D.E. Tepper, *Free boundary problem*, SIAM J. Math. Analysis **5** no. 5 (1974), 841–846.