PASCAL AUSCHER

Étude de l'opérateur $\sqrt{bDaD}$

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 20-29
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___1_20_0>

ETUDE DE L'OPERATEUR $\sqrt{bDaD}$

Pascal AUSCHER

Nous décrivons dans cet exposé un travail effectué en collaboration avec Ph. Tchamitchian.

Le but de cette étude est d'obtenir des informations précises sur la nature de l'opérateur $\sqrt{bDaD}$, et plus particulièrement, sur son noyau-distribution. On retrouvera en corollaire des résultats dus à C. Kenig et Y. Meyer [K M].

Avant d'énoncer les résultats obtenus, rappelons quelques problèmes de la physique mathématique qui motivent cette étude.

L'opérateur D dénote $-i\dfrac{d}{dx}$ de domaine $H^1(\mathbb{R})$, $a(x)$ et $b(x)$ sont deux fonctions mesurables et l'on désigne par a et b respectivement les opérateurs de multiplication ponctuelle par $a(x)$ et $b(x)$. On supposera constamment que $a(x)$ et $b(x)$ sont bornées et accrétives :

(1) $$|a(x)| \le M \quad et \quad |b(x)| \le M \quad presque\ partout$$

(2) $$Re\, a(x) \ge \delta > 0 \quad et \quad Re\, b(x) \ge \delta \quad presque\ partout.$$

L'opérateur $bDaD$ est défini comme un opérateur non-borné sur $L^2(\mathbb{R})$, de domaine $\{f \in H^1(\mathbb{R})\ ;\ aDf \in H^1(\mathbb{R})\}$, dont on montre qu'il est dense. On peut alors donner un sens à $\sqrt{bDaD}$ (ce que nous ferons plus loin).

Voici deux équations de la physique mathématique :

(3) $$\partial_t^2 u + bDaD\, u = 0$$

où $u(x,t)$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(4) $$\partial_t^2 u - bDaD\, u = 0$$

où $u(x,t)$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Pour ces deux conditions, on peut poser soit le problème de Dirichlet, soit le problème de Neumann.

L'équation (3) modélise la propagation d'une onde dans un milieu linéaire non-homogène : les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ sont alors positives et dépendent de la résistivité et de la célérité du milieu. Une fonction de la forme $u(x,t) = exp\,(it\sqrt{bDaD})(f)(x)$ est formellement solution de (3). On a $u(x,0) = f(x)$. La dérivée $\partial_t\, u(x,t)|_{t=0}$ est alors donnée par $(i\sqrt{bDaD}\, f)\,(x)$. Pour bien poser le problème de Neumann, il importe donc de connaître le domaine de $\sqrt{bDaD}$.

L'autre équation généralise le problème du prolongement harmonique sur le demi-plan supérieur. En effet, si $a = b = 1$ (constante), $u(x,t)$ est une fonction harmonique. Si $u(x,0) = f(x)$ est suffisamment régulière alors on sait relier la dérivée normale $\partial_t\, u(x,t)|_{t=0}$ à la dérivée tangentielle $(\partial_x\, u)(x,0)$ par

(5) $$\partial_t\, u(x,t)|_{t=0} = H(\partial_x u(.,0))(x)$$

où H est la transformée de Hilbert, de symbole $-\,i\; sgn\xi$. En particulier les normes L^p, $1 < p < \infty$, de ces deux dérivées sont équivalentes.

Dans le cas où $a(x)$ et $b(x)$ sont quelconques, on écrit formellement $u(x,t) = exp\,(-\,t\,\sqrt{bDaD})(f)(x)$, ce qui implique

$$\partial_t\, u(x,t)|_{t=0} = -(\sqrt{bDaD}\, f)(x).$$

Ici aussi, le problème du domaine de $\sqrt{bDaD}$ se pose. Si l'on veut également relier dérivée normale et dérivée tangentielle $(\frac{d}{dx}\, f(x))$, on est amené à factoriser $\sqrt{bDaD}$ en RD et l'égalité ci-dessus devient

(6) $$\partial_t\, u(x,t)|_{t=o} = [i\, R(\partial_x u(.,0))]\,(x).$$

Pour que tout cela ait un sens, il faut que $u(x,0) = f(x) \in H^1(\mathbb{R})$ et également que $f(x) \in \mathcal{D}om\,(\sqrt{bDaD})$.

Le premier travail est donc d'identifier $H^1(\mathbb{R})$ à ce domaine, ce qui est un théorème de C. Kenig et Y. Meyer.

Mais en comparant (6) à (5) on peut, en outre, se demander si R est un opérateur d'intégrale singulière. Nous allons montrer que c'est toujours le cas. Il faudrait aussi donner un sens aux opérateurs de diffusion $exp\,(-\,t\sqrt{bDaD}\,)$ et $exp\,(it\sqrt{bDaD}\,)$, aspect que nous ne discuterons pas ici.

Un cas remarquable est celui où $a(x) = b(x)$. C. Kenig et Y. Meyer montrent alors que R est l'opérateur de Cauchy (correctement normalisé) sur la courbe lipschitzienne dont une représentation paramétrique est $z(x) = \int a(x)^{-1}\, dx$:

$$Rf(x) = \frac{1}{\pi i}\, v.p. \int \frac{f(y)}{z(y)-z(x)}\, dy. \tag{7}$$

Pour le vérifier, nous utilisons un autre chemin que celui suivi par ces auteurs et réécrivons (3) et (6) à l'aide de la variable complexe. Soit Γ la courbe lipschitzienne d'équation $z(x) = \int_0^x a^{-1}(y)\, dy$. Soit $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, une fraction rationnelle, $0(|z|^{-1})$ à l'infini et holomorphe au voisinage de Γ (ces fonctions forment un ensemble dense dans $L^2(\Gamma)$ et tous les calculs sont valides pour de telles fonctions).

Pour $t > 0$, on pose $\omega = z + i\,t$ et $\omega^* = z - i\,t$, $z \in \Gamma$. On pose

$$F_+(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - \omega}\, d\zeta\,,$$

$$F_-(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - \omega^*}\, d\zeta\,,$$

et $F(\omega) = F_+(\omega) - F_-(\omega)$. Remarquer que F_+ est holomorphe mais que F_- n'est pas anti-holomorphe. Des formules de Plemejl

$$\lim_{t \to 0} F_\pm(\omega) = Cf(z) \pm \frac{1}{2} f(z)$$

où $Cf(z) = \frac{1}{2\pi i}\, v.p. \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$, on déduit

$$\lim_{t \to 0} F(\omega) = f(z).$$

On peut aussi calculer $\partial_t F(\omega)$ en dérivant sous le signe intégral puis en intégrant par parties. En passant à la limite, il vient

$$\lim_{t \to 0} \partial_t F(\omega) = 2\,i\,C\,(\frac{d}{dz} f)\,(z).$$

Ces calculs sont valides, en fait, en les $z = z(x)$ où $z'(x)$ existe.

Enfin, on vérifie que

$$\partial_t^2 F(\omega) + \partial_z^2 F(\omega) = 0\,, \quad \omega = z + i\,t\,, \quad t > 0\,, \quad z \in \Gamma.$$

Si maintenant on procède au changement de variable $F(\omega) = u(x,t)$ où $\omega = z(x) + i\,t$, ∂_z devient $a(x)\,\partial_x$ avec $a(x) = z'(x)^{-1}$ et on a

$$\partial_t^2\, u + a\,\partial_x\, a\,\partial_x\, u = 0\,,$$

$$u(x\,,0) = \tilde{f}(x) = f(z(x))\,,$$

$$\partial_t\, u(x,t)\big|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\, v.p.\int \frac{1}{z(y)-z(x)}\,\frac{d}{dy}(\tilde{f}(y))\, dy.$$

En comparant la dernière égalité à (6), on obtient l'identité (7).

Enonçons maintenant le résultat principal.

***Théorème* 1.**

Soient $a(x)$ et $b(x)$ deux fonctions accrétives. Alors l'opérateur $R = \sqrt{bDaD}\,D^{-1}$ est un opérateur de Calderon–Zygmund (donc borné sur $L^2(\mathbb{R})$), qui vérifie $R(a^{-1}) = {}^tR(b^{-1}) = 0$ dans BMO. En outre, R est inversible sur $L^2(\mathbb{R})$ et on a l'identité remarquable

$$R^{-1} = -a^{-1}\,{}^tR\;b^{-1}\,,$$

où ${}^tR$ est ici l'adjoint réel de R.

Corollaire.

Pour tout $f \in H^1(\mathbb{R})$, $\|Df\|_2 \sim \|\sqrt{bDaD}f\|_2$ et $H^1(\mathbb{R}) = \mathcal{D}om\,(\sqrt{bDaD}\,)$. De plus, pour $1 < p < \infty$ et $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, $\|Df\|_p \sim \|\sqrt{bDaD}f\|_p$.

La partie $p = 2$ est le résultat de Kenig et Meyer.

Pour démontrer le théorème 1 nous ne disposons plus des identités algébriques du cas où $a(x) = b(x)$. Il nous faut donc revenir à la définition même de $\sqrt{bDaD}$, que nous présentons maintenant.

On commence par définir DaD comme l'opérateur maximal accrétif associé à la forme sesquilinéaire, de domaine $H^1(\mathbb{R})$,

$$J(f\,,g) = \int_{\mathbb{R}} a\; Df\;\overline{Dg}\;.$$

L'accrétivité de $a(x)$ implique que pour tout λ avec $Re\,\lambda > 0$,

$$Re < (\lambda + DaD)\,u\,,u > \;\geq\; Re\,\lambda < u\,,u >\,,\;\; \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}).$$

On en déduit que

$$(\lambda + DaD)^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

avec

(8) $$\|(\lambda + DaD)^{-1}\| \leq (Re\,\lambda)^{-1}.$$

L'image de $L^2(\mathbb{R})$ par cet opérateur est un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R})$ qui coïncide avec le domaine $\mathcal{D}$ de DaD. Cet espace n'est autre que l'ensemble des $f \in H^1(\mathbb{R})$ telles que $aDf \in H^1(\mathbb{R})$.

L'opérateur $bDaD$ est bien défini de $\mathcal{D}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et l'on montre l'existence d'un demi-cône ouvert $\mathscr{C}$ d'axe $]-\infty,0[$ tel que pour tout $\lambda \in \mathscr{C}$, $\lambda + bDaD : \mathcal{D} \to L^2(\mathbb{R})$ soit un isomorphisme avec

(9) $$\|(\lambda + bDaD)^{-1}\| \leq C\,(Re\,\lambda)^{-1}.$$

On déduit (9) de (8) où C et l'ouverture du cône $\mathscr{C}$ ne dépendent que de $\|b\|_\infty$ et $\|b^{-1}\|_\infty$.

Pour $f \in \mathcal{D}$, on voit alors que la fonction $t \to \|(1 + t^2\, bDaD)^{-1}\, bDaD\, f\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, l'intégrale au sens de Bochner

(10) $$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 + t^2\, bDaD)^{-1}\, bDaD\, f\; dt$$

définit une fonction Tf. L'opérateur T n'est pas fermé sur $\mathcal{D}$: son domaine contient $\mathcal{D}$. Par des changements de contour dans l'intégrale, on montre que $T^2 = bDaD$. On note alors $T = \sqrt{bDaD}$.

L'inverse de T, noté $(\sqrt{bDaD}\,)^{-1}$, est donné par

(11) $$(\sqrt{bDaD}\,)^{-1} f = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 + t^2\, bDaD)^{-1} f\, dt$$

et est défini et continu sur $L^2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{D}om\,(\sqrt{bDaD}) = \mathcal{D}'$. En fait, pour que l'intégrale converge il faut remplacer $bDaD$ par $bDaD + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

Le problème ici est de donner un sens à (10) pour $f \in \mathcal{D}'$. Nous montrerons en fait que les intégrales tronquées $\frac{2}{\pi} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} (1 + t^2\, bDaD)^{-1}\, bDaD\, f\, dt$ convergent faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ pour $f \in H^1(\mathbb{R})$, lorsque $\varepsilon \to 0$.

Posons $S_t = (b^{-1} + t^2\, DaD)^{-1}\, tDa$. Alors

$$(1 + t^2\, bDaD)^{-1}\, bDaD \;=\; S_t\, \tfrac{1}{t} D.$$

On a donc formellement

$$\sqrt{bDaD} = \{\tfrac{2}{\pi}\, \int_0^\infty S_t \tfrac{dt}{t}\}\, D.$$

Par un calcul similaire on obtient

$$(\sqrt{bDaD}\,)^{-1} \;=\; D^{-1}\,(-\,a^{-1}\,\{\tfrac{2}{\pi}\, \int_0^\infty {}^tS_\mu\, \frac{d\mu}{\mu}\}\, b^{-1}).$$

Ainsi, la continuité de R, son inversibilité et les propriétés de son noyau-distribution repose sur l'étude des intégrales $\int_0^\infty S_t\, \frac{dt}{t}$.

Appelons $P_t = (b^{-1} + t^2\, DaD)^{-1}$. On note $P_t(x,y)$ le noyau-distribution de P_t et $S_t(x,y)$ celui de S_t.

Théorème fondamental.

Pour toutes fonctions accrétives et bornées $a(x)$ *et* $b(x)$, *il existe* $C \geq 0$ *et* $\alpha > 0$ *ne dépendant que de* M *et* δ *dans* (1) *et* (2) *telles que pour tout* $t > 0$, *si* $p_t(u) = \frac{1}{t}(1 + \frac{|u|}{t})^{-1-\alpha}$,

(12) $$\left|P_t(x,y)\right| \;\leq\; C\, p_t(x-y)\,;$$

(13) $$\left|S_t(x,y)\right| \;\leq\; C\,(1 + log_-(\tfrac{|x-y|}{t}))\, p_t\,(x-y)\,;$$

(14) $$\left|S_t(x+h,y) - S_t(x,y)\right| \;\leq\; C\frac{|h|^\alpha}{|x-y|^\alpha}\; p_t\,(x-y),\;\; si\;\; |h| \leq \tfrac{1}{2}\; |x-y|\,;$$

(15) $$\left|S_t(x,y+h) - S_t(x,y)\right| \;\leq\; C\frac{|h|^\alpha}{|x-y|^\alpha}\; p_t\,(x-y),\;\; si\;\; |h| \leq \tfrac{1}{2}\; |x-y|.$$

Enfin, pour tout $t > 0$

(16) $$\int_{\mathbb{R}} S_t(x,y)\;\; a^{-1}(y)\, dy \;=\; 0 \;\; \textit{presque partout}\,;$$

(17) $$\int_{\mathbb{R}} S_t(x,y)\;\; b^{-1}(x)\, dx \;=\; 0 \;\; \textit{presque partout}.$$

De (13), (14) et (15) on déduit les estimations de Calderon-Zygmund pour le noyau $R(x,y)$ de R. La continuité de R sur $L^2(\mathbb{R})$ se montre à l'aide du théorème

$T(b)$ de David, Journé et Semmes [D J S]. C'est là qu'interviennent les égalités (16) et (17).

L'inégalité fondamentale dans ce résultat est l'inégalité (12).

Elle cache en fait une représentation explicite de $P_t(x,y)$, qui permet ensuite de calculer $S_t(x,y)$ par

$$S_t(x,y) = -i\, t\, a(y) \frac{\partial}{\partial y} P_t(x,y) \tag{18}$$

puisque $S_t = P_t\,(tDa)$. L'égalité (16) est d'ailleurs une conséquence immédiate de (18). L'égalité (17) quant à elle s'obtient en remarquant que changer S_t en ${}^tS_t$ revient à échanger $a(x)$ et $b(x)$ dans la définition de S_t grâce à l'identité $(b^{-1} + t^2 DaD)^{-1}\, tDa = tbD\,(a^{-1} + t^2 DbD)^{-1}$.

L'idée de la preuve de (12) est la suivante : on relie $b^{-1} + t^2\, DaD$ à un opérateur d'intégrale singulière en effectuant une factorisation "à la Calderon". Les propriétés fonctionnelles de $b^{-1} + t^2 DaD$, notamment l'inversibilité sur les espaces de Sobolev, permettent alors d'inverser l'opérateur d'intégrale singulière associé : grâce aux résultats de Ph. Tchamitchian, cet inverse est encore un opérateur d'intégrale singulière. Cela permet, en retour, d'obtenir les estimées sur $P_t(x,y)$ en même temps qu'une formule de représentation.

Les détails de cet algorithme sont un peu longs à exposer et nous nous contentons de les résumer. On fait appel maintenant aux bases d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$. On prendra dans la suite $t = 1$ et $P(x,y) = P_1(x,y)$ (on se ramène à ce cas par une technique de renormalisation).

1 - On considère une base orthonormée d'ondelettes "ordinaires" $\mathcal{B}$ de $L^2(\mathbb{R})$ composée des fonctions basses fréquences $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, et des ondelettes hautes fréquences $\Psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\ \Psi(2^j x - k), j \geq 0, k \in \mathbb{Z}$. On supposera autant de décroissance et de régularité que nécessaire [M].

2 - On construit une base d'ondelettes $\mathcal{B}'$ plus adaptée à DaD [A T] : elle est constituée de fonctions $t_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, (basses fréquences) et de $2^{-j}\, \tau_{jk}(x)$, $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ (hautes fréquences), de telle sorte qu'elle est orthogonale pour la forme $\int a(x)\, f'(x)\, g'(x)\, dx$ (sans barre de conjugaison pour une raison technique).

3 - L'opérateur de changement de base U défini par $U\,\varphi_k = t_k$ et $U\,\Psi_{jk} = \tau_{jk}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$, de $H^1(\mathbb{R})$ sur $H^1(\mathbb{R})$ et de $H^2(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{D} = \mathscr{D}om\,(DaD)$.

4 – La factorisation de Calderon de $b^{-1} + DaD$ s'écrit :

$$T = \Lambda^{-1}\ {}^tU\,(b^{-1} + DaD)\,U\,\Lambda^{-1} \tag{19}$$

où Λ est défini par $\Lambda\,\varphi_k = \varphi_k$ et $\Lambda\,\Psi_{jk} = 2^j\,\Psi_{jk}$. Puisque $\Lambda : H^s \to H^{s-1}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme et que $b^{-1} + DaD : \mathscr{D} \to L^2(\mathbb{R})$ est un isomorphisme, on voit que $T : H^1(\mathbb{R}) \to H^1(\mathbb{R})$ est un isomorphisme. Comme, de plus, ${}^tT = T$, on en déduit que pour tout $s \in [-1,1]$ $T : H^s(\mathbb{R}) \to H^s(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

5 - La matrice de T dans la base $\mathscr{B}$ se compose des coefficients

$$\int (b^{-1} + DaD)\,(t_k)\,t_{k'}\ ,$$

$$\int (b^{-1} + DaD)\,(t_k)\,2^{-j'}\,\tau_{j'k'}\ ,$$

$$\int (b^{-1} + DaD)\,(2^{-j}\,\tau_{jk})\,t_{k'}\ ,$$

$$\int (b^{-1} + DaD)\,(2^{-j}\,\tau_{jk})\,2^{-j'}\,\tau_{j'k'}\,.$$

Grâce aux relations d'orthogonalité du point 2 et aux estimations en $2^{j/2}\,exp(-\,\gamma|2^j\,x - k|)$ des τ_{jk} et en $exp\,(-\,\gamma|x - k|)$ des t_k on obtient pour ces coefficients la majoration

$$C(\beta)\,2^{-|j-j'|(\frac{1}{2}+\beta)}\,\left(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|k\,2^{-j}-k'\,2^{-j'}|}\right)^{-1-\beta} \tag{20}$$

où $\beta \in]0,1[$ est indépendant de $j \geq 0$, $j' \geq 0$, k, $k' \in \mathbb{Z}$ et $C(\beta)$ dépend de β (et aussi de M et δ en (1) et (2)).

6 - Le théorème d'inversion de Tchamitchian s'applique grâce à 4 et 5 et les coefficients de T^{-1} dans la base $\mathscr{B}$ vérifient une estimation du type (20) pour un $\beta \in [0,1[$.

7 - En utilisant à nouveau la factorisation (19) et des relations d'orthogonalité, on écrit $P(x,y)$ en une somme de 4 séries

$$\Sigma\, t_k(x)\, m_{kk'}\, t_{k'}(y) + \ldots + \Sigma\, \tau_{jk}(x)\, 2^{-j}\, m_{jkj'k'}\, 2^{-j'}\, \tau_{j'k'}(y)$$

où les $m_{kk'}$, ... , $m_{jkj'k'}$ sont les coefficients de la matrice de T^{-1} dans la base $\mathscr{B}$. On en déduit (12) par des estimations élémentaires, puis (13) et (14) en utilisant (18).

Cela démontre le théorème fondamental.

Terminons par 2 remarques.

Remarque 1. Cet algorithme s'applique aux opérateurs $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ où $V(x)$ est un potentiel non nécessairement accrétif. Il suffit que $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et soit tel que $H : H^1(\mathbb{R}) \to H^{-1}(\mathbb{R})$ soit un isomorphisme. Pour passer à la dimension supérieure où $H = -\Delta + V(x)$, cette méthode, globale, nécessite que $H : H^{\frac{n}{2}+1}(\mathbb{R}^n)$ $\to H^{\frac{n}{2}-1}(\mathbb{R}^n)$ soit un isomorphisme. Il faut donc que $V(x)$ soit au minimum un multiplicateur de $H^{\frac{n}{2}-1}(\mathbb{R}^n)$ (avec $V(x)$ borné).

Remarque 2. Si $a(x)$ et $b(x)$ sont C^∞ (bornées et accrétives) alors (20) est vérifiée pour tout $\beta > 0$ et $T : H^s(\mathbb{R}) \to H^s(\mathbb{R})$ est un isomorphisme pour tout $s > 0$. Un examen de la preuve du théorème de Tchamitchian montre que les coefficients matriciels de T^{-1} dans la base $\mathscr{B}$ vérifient (20) également pour tout $\beta > 0$. L'opérateur T^{-1} appartient alors à l'algèbre de Bourdaud (voir [M]) et à ce titre, est un opérateur pseudo-différentiel classique de la classe interdite $S^0_{1,1}$ de Hörmander.

Références

[A T] : P. AUSCHER et Ph. TCHAMITCHIAN
Ondelettes et conjecture de Kato.
C. R. Acad. Sci. Paris **313** (1991), 63-66.

[D J S] : G. DAVID - J.L. JOURNE et S. SEMMES
Opérateurs de Calderon–Zygmund, fonctions para–accrétives et interpolation.
Rev. Mat. Iberoamaricana, **1** (1985), 1-56.

[K M] : C. KENIG et Y. MEYER
The Cauchy integral on Lipschitz curves and the square root of second order accretive operators are the same.
Recent progress in Fourier analysis, Math. Studies **111** (1985), 123-145.

[M] : Y. MEYER
Ondelettes et opérateurs.
Tomes I et II, Hermann, Paris, 1990.

[T] : Ph. TCHAMITCHIAN
Ce volume.