PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

FERRUCCIO COLOMBINI

Sur l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 85-90
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___1_85_0>

Sur l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre

Ferruccio Colombini

§1. Introduction

Dans cet exposé * on considère le problème de l'unicité de la solution du problème de Caüchy, par rapport à la surface S donnée par $\{t = 0\}$, pour des opérateurs du type

$$(1) \qquad P = \partial_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}) + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\partial_{x_j} + c(t,x)$$

sous l'hypothèse d'ellipticité faible

$$(2) \qquad a(t,x,\xi) = \sum a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall(t,x) \in \Omega^+.$$

Les coefficients a_{ij} de P sont des fonctions C^∞ dans un voisinage Ω de l'origine de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ à valeur réels, tandis que b_j et c sont des fonctions mesurables et bornées à valeurs complex; on a posé $\Omega^+ = \Omega \cap \{t \geq 0\}$.

On dira que P a la proprieté de l'unicité dans C^k au point $(t_0, x_0) \in S$ si, pour tout voisinage Ω' de (t_0, x_0) (contenu dans Ω), toute solution $u \in C^k(\Omega')$ de $Pu = 0$ dans Ω' telle que $\operatorname{supp} u \subseteq \Omega' \cap \{t \geq 0\}$, est nulle dans un voisinage de (t_0, x_0). On dira de plus que P a la proprieté de l'unicité compacte si toute solution $u \in C^k(\Omega')$ de $Pu = 0$ dans Ω', telle

---

* *Les résultats exposés ici ont été obtenus en collaboration avec D.Del Santo et C.Zuily (voir* [3] *et* [4] *pour des énoncés plus complets et pour les démonstrations)*

que $\operatorname{supp} u \subset \Omega' \cap \{t \geq 0\}$ et $\operatorname{supp} u \cap \{t = 0\} \subset\subset \Omega'$, est nulle dans un voisinage de (t_0, x_0).

Le problème de l'unicité pour des opérateurs elliptiques dégénérés a été consideré, dans un contexte plus général, par Alinhac dans [1]; mais c'est Nirenberg qui, dans [5], a obtenu un résultat très précis pour ce type d'opérateurs: si on suppose qu' il existe une constante C telle que

$$\left\{\begin{array}{l} Ca(t,x,\xi) + \partial_t a(t,x,\xi) \geq 0 \\ Ca(t,x,\xi) \geq |\sum b_j(t,x)\xi_j|^2 \end{array}\right. \tag{3}$$

alors on a l'unicité compacte pour l'opérateur P dans C^2 à l'origine.

§2. Unicité dans C^∞

En partant de ce résultat, et de ce d'Alinhac, on a prouvé dans [4] qu' on peut affaiblir l'hypothèse (3), en obtenant encore l'unicité compacte, mais seulement dans C^∞. Précisement on a prouvé le théorème suivant:

Théorème 1. *Supposons que l'opérateur P donnée par* (1) *vérifie l'hypothèse suivante: il existe deux constantes ϵ et $c > 0$ t.q.*

$$(2-\epsilon)a(t,x,\xi) + t\partial_t a(t,x,\xi) \geq ct^2 \ |\sum b_j(t,x)\xi_j|^2. \tag{4}$$

Alors P a l'unicité compacte dans C^∞ à l'origine.

Remarque 1. L'hypothèse (4) (ainsi que (3)) peut s'enoncer d'une façon invariante par changement de variables.

Remarque 2. Le théorème 1 est prouvé par des estimations de Carleman avec des poids singuliers (du type $t^{-\gamma}$ avec γ grand): c'est à cause de ça qu' on doit renoncer à l'unicité dans C^2 et se borner à C^∞.

Le théorème 1 donne l'unicité compacte; nous n'avons pas été capables à obtenir la vraie unicité que dans deux cas particuliers:

Théorème 2. *Sous les hypothèses du théorème 1, supposons que* $n = 1$ *(1 variable d'espace) ou que les coefficients* a_{ij} *de la partie principale de* P *ne dépendent que de* t*; alors* P *a la proprieté de l'unicité.*

Ce théorème est prouvé par un changement de variables singulier (outre que par des estimations de Carleman).

Exemple. Il est facile de trouver des opérateurs qui vérifient (4) mais non (3); par exemple pour l'opérateur

$$P_\lambda = \partial_t^2 + (\partial_{x_1} + t\partial_{x_2})^2 + \lambda t^2 \partial_{x_2}^2 \tag{5}$$

on voit aisément qu' il ne vérifie (3) pour aucune valeur de λ, tandis qu' il vérifie (4) dès que $\lambda > 1/8$. On peut observer que pour telles valeurs de λ on a l'unicité pour P_λ (th. 2) non seulement dans C^∞, mais dans C^2 aussi, puisqu' il est hypoelliptique.

La chose la plus intéressante du théorème 1 est que la condition (4) est à peu près nécessaire pour avoir l'unicité pour des opérateurs elliptiques dégénérés, comme on le voit par le théorème suivant; il faut d'abord donner une définition: on dénotera par B_∞ l'ensemble des fonctions $f(x,s,\delta)$ qui sont C^∞ par rapport à x, s et une puissance fractionnaire de $\delta \geq 0$, dans un voisinage de $(0,1,0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [0,+\infty)$.

Théorème 3. *Soit* P *comme dans* (1), *mais avec* $b_j = c = 0$, *et* (2) *soit vérifiée . Supposons qu' il existe une fonction* $\xi(x,\delta) = \delta^{-M}\langle x, \bar{\xi}\rangle + \delta^{-1}\tilde{\xi}(x,\delta)$ *avec* $\tilde{\xi} \in B_\infty$ *tel que*

$$a(x,\delta,\nabla_x \xi(x,\delta)) \geq c_0 > 0$$

3

$$2a(x,\delta,\nabla_x\xi(x,\delta)) + \delta\partial_t a(x,\delta,\nabla_x\xi(x,\delta)) < 0$$

$$a(x,s\delta,\nabla_x\xi(x,\delta)) \in B_\infty \quad \frac{\partial a}{\partial \xi_j}(x,s\delta,\nabla_x\xi(x,\delta)) \in B_\infty \quad (j=1,\ldots,n).$$

Il existe alors deux fonctions u et c, nulles pour $t \leq 0$, telles que $Pu + cu = 0$ et $(0,0) \in \operatorname{supp} u$.

Exemple. On voit immédiatement que pour l'opérateur P_λ, défini par (5), si $\lambda < 1/8$ on peut appliquer le théorème 3 avec $\xi(x,\delta) = \langle x, \xi_0(\delta)\rangle$, où $\xi_0(\delta) = (1, -3/4(1+\lambda)\delta)$ et obtenir la non unicité dans C^∞.

Remarque 3. Dans [2] Bahouri a obtenu des résultats de non unicité pour des opérateurs sommes de carrés; si on veut les utiliser pour des opérateurs comme (5), on s'aperçoit que ça n'est possible que pour $\lambda = 0$, mais, comme on le verra ou §3, ce cas est vraiment "plus dégénéré" que ce de $\lambda > 0$.

§3. Unicité dans les classes de Gevrey

Dans [3] on a cherché à affaiblir encore l'hypothèse (3), cherchant l'unicité dans une classe plus petite que C^∞, notamment les classes de Gevrey $\mathcal{E}^s (s > 1)$; précisement on a obtenu le théorème

Théorème 4. *Soit P donné par* (1), *vérifiant* (2), *et soit $s > 1$. Supposons qu' il existe deux constantes ϵ et $c > 0$ t.q.*

(6) $$2\frac{s}{s-1}a(t,x,\xi) + t\partial_t a(t,x,\xi) \geq ct^{1+s/(s-1)} \,|\sum b_j\xi_j|^2.$$

Alors P a l'unicité compacte dans $\mathcal{E}^s$.

L'équivalent de la remarque 1 et du théorème 2 est encore valable; pour ce qui regarde la remarque 2 on a la suivante:

Remarque 4. Pour prouver le théorème 4 on utilise des estimations de Carleman avec des poids du type $\exp(-\gamma/t^\alpha)$, ce qui est possible puisque si $u \in \mathcal{E}^s$ et u est plate dans 0, alors elle est divisible par $\exp(-\gamma/t^\alpha)$, pour tout γ, si $\alpha < 1/(s-1)$. On pourrait affaiblir encore l'hypothèse (6), et obtenir l'unicité dans des classes plus petites que les $\mathcal{E}^s$, en utilisant des poids plus singuliers.

Pour ce qui regarde le théorème 3 de non unicité, on peut aussi prouver une variante dans les espaces de Gevrey, en obtenant que le théorème 4 est presque optimal.

Exemples. Pour l'opérateur défini par (5) on a que si $\lambda = 1/8$ on a l'unicité dans tous les Gevrey; si $0 < \lambda < 1/8$, on a l'unicité dans $\mathcal{E}^s$ pour $s < s_\lambda = \frac{1-2\lambda+2\sqrt{\lambda+\lambda^2}}{1-8\lambda}$, et la non unicité pour $s > s_\lambda$ (c.a.d. on peut construire deux fonctions c et u dans $\mathcal{E}^s$, telles que $Pu + cu = 0$, $u = c = 0$ pour $t \leq 0$ et $(0,0) \in \operatorname{supp} u$).

Avant de considérer P_λ avec $\lambda = 0$, étudions l'opérateur

$$Q = \partial_t^2 + (\partial_{x_1} + t\partial_{x_2})^2 + t^4\partial_{x_2}^2.$$

On peut alors prouver la non unicité dans $\mathcal{E}^s$ pour tout $s > 1$; mais on a encore l'unicité dans quelque espace de fonctions plus petit que $\mathcal{E}^s$ pour tout $s > 1$.

Pour P_λ avec $\lambda = 0$ on n'arrive à prouver l'unicité dans aucun espace (qui ne soit quasi–analytique), et par contre on peut construire une solution nulle (et une perturbation d'ordre zéro pour P_0) si plate que l'on veut.

Bibliographie

[1] S.Alinhac: *"Unicité du problème de Cauchy pour des Opérateurs du second ordre à symboles réels"*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **34** (1984), 89-109.

[2] H.Bahouri: *Non prolongement unique des solutions d'opérateurs "somme de carrés"*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **36** (1986), 137-155.

[3] F.Colombini, D.Del Santo: *"Remarks on the uniqueness in Gevrey spaces for degenerate elliptic operators"*, en préparation.

[4] F.Colombini, D.Del Santo, C.Zuily: *"Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem for degenerate elliptic operators"*, à paraître dans Amer. J. of Math.

[5] L.Nirenberg: *"Uniqueness in the Cauchy problem for a degenerate elliptic second order equation"*, In *"Differential Geometry and Complex Analysis"* Springer-Verlag, Berlin 1985, pp.213-218.

Dipartimento di Matematica
Università
Via F.Buonarroti, 2
56127 PISA
ITALIA