

SADDO AG ALMOULOU

Les coniques et Cabri-Géomètre : une expérimentation à So Paulo

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1995-1996, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. n° 1, p. 1-28

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1995-1996__3_A2_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1995-1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Les coniques et Cabri–Géomètre : une expérimentation à Sao Paulo

Saddo AG ALMOULOU

Pontificia Universidade Catolica de Sao Paulo – Brasil

Introduction

De nombreux facteurs interviennent dans le choix des objets d'enseignement, comme, par exemple, le mode d'administration, le système éducatif, le niveau de développement technologique, la formation des professeurs, etc. Aussi, comme tous les systèmes éducatifs, celui du Brésil est fortement influencé par son organisation et le système de formation des enseignants. L'aperçu sur l'organisation de l'enseignement au Brésil que nous proposons dans ce texte, permet de faire ressortir certains facteurs influençant l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en général et ceux des coniques et les concepts s'y rattachant en particulier.

Dans l'étude des coniques comme lieu géométrique, les élèves ont de réelles difficultés à imaginer la trace d'un point soumis à certaines contraintes mathématiques.

Sous l'effet de l'enseignement des coniques, généralement proposé, les élèves ne semblent retenir que la forme des courbes étudiées et oublient les propriétés géométriques et analytiques qui les définissent. L'une des raisons de ce fait est la disparition totale de la notion de lieu géométrique dans les manuels scolaires brésiliens. Son étude se fait de façon implicite sans mise en relation avec ses différents registres de représentation.

Ces constats nous ont conduits à construire et à expérimenter quelques situations de lieu géométrique (parabole, hyperbole et ellipse) pour des élèves du 2^{ème} degré (niveau lycée) et des étudiants de 3^{ème} degré (niveau 1^{ère} année DEUG). L'outil principal de l'expérimentation est le logiciel Cabri-Géomètre.

I Aperçu sur l'organisation de l'enseignement au Brésil

L'enseignement au Brésil se compose de trois niveaux : le premier degré(enseignement fondamental), le 2^{ème} degré(le Lycée) et l'enseignement supérieur.

L'enseignement fondamental (1^o grau) comprend deux cycles :

- le primaire (Primário) pour les enfants de 7 à 10 ans, avec quatre séries (1^o série, 2e série, 3e série et 4e série)
- le cycle d'orientation (Ginásio) (enfants de 11 à 14 ans) comprenant les classes suivantes : 5^o série(la sixième), 6^o série(la cinquième), 7^o série(la quatrième) et 8^o série(la troisième)

Le 2^o degré (qui correspond au Lycée), pour les élèves de 15 à 17 ans, se compose de trois niveaux : 1^o série(la seconde), 2^o série(la première) et 3^o série (la terminale).

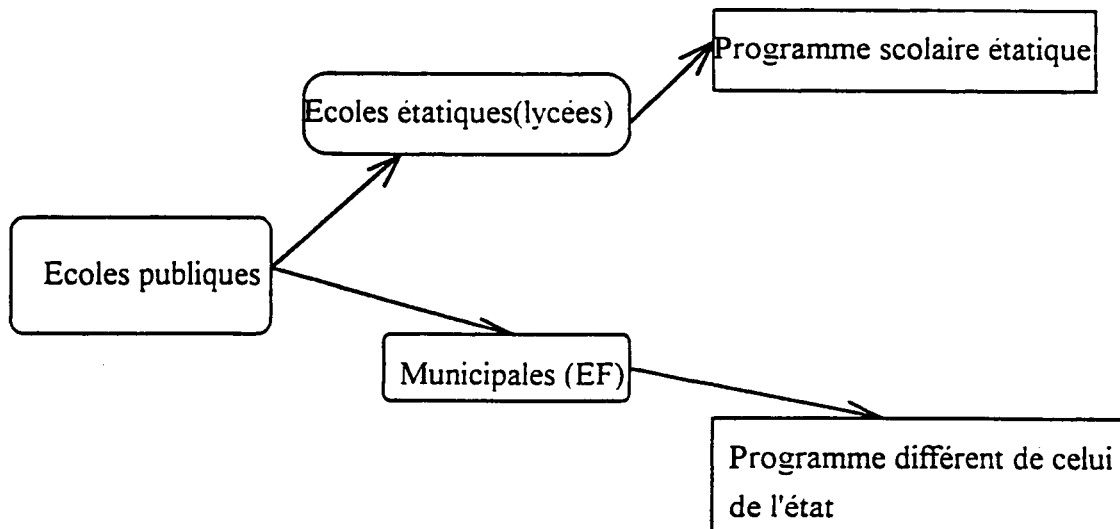
Mais nous avons aussi des écoles professionnelles (2^o grau professionnalisante) ayant comme disciplines de base (techniques informatique, chimique, en laboratoire, en électronique...). Les élèves de 17 ans au moins peuvent exercer une profession technique.

2^o grau magistério (4 ans d'études)

Les instituteurs du primaire sont généralement formés dans le 2^o grau du Magistério, après le cycle d'orientation.

Les écoles sont publiques ou privées au niveau de l'enseignement fondamental et du Lycée.

Généralement la qualité de l'enseignement, dans le fondamental et le Lycée, est jugée très bonne dans les écoles privées, et moins bonne dans les Universités privées.



La majorité des écoles fondamentales sont municipales. et les Lycées sont généralement réservés à l'Etat. Chaque municipalité établit son programme scolaire indépendamment de l'Etat et de la Fédération.

“Licenciatura curta” (DEUG) est un cours universitaire de deux ans qui donne accès à la fonction de professeur au cycle d'orientation(Ginasio)

Licenciatura plena (la licence ou la maîtrise) est un cours universitaire de 3 ou 4 ans suivant les universités. Il permet d'enseigner au lycée ou de faire le “Mestrado”(équivalent du D.E.A.) qui se fait. suivant les universités, en 3 ou 4 années après la maîtrise.

Charge horaire des professeurs au cycle fondamental et au lycée

En raison de leur situation salariale précaire, les enseignants du cycle fondamental sont obligés d'assurer des cours dans plusieurs écoles, et peuvent ainsi se retrouver avec plus de 40 cours de 50 minutes par semaine. Le tableau ci-dessous décrit, pour les différentes séries du premier grau (enseignement fondamental), les matières à la charge d'un enseignant.

| Nombre de professeurs | 1° série | 2° série | 3° et 4° séries |
|------------------------------|--|--------------|---|
| 1 professeur | Portugais mathématiques études sociaux les sciences | idem | Portugais études sociaux les sciences |
| 1 professeur 1 professeur | | | mathématiques informatique |
| 1 professeur 1 professeur | d'éducation artistique d'éducation physique | idem idem | idem idem |

Le tableau ci-dessous décrit, pour les dernières séries du premier degré et les séries du 2ème degré(lycée), les matières enseignées et le nombre de cours par semaine.

| nombre de professeurs | Les 4 dernières séries du 1 ^o grau | Nombre de cours par semaine |
|--------------------------|---|-----------------------------|
| 1 professeur par matière | Portugais | 5 cours de 50 mn |
| | Mathématiques | 4 “ |
| | Histoire | 3 “ |
| | Géographie | 3 “ |
| | Les sciences | 3 “ |
| | Education artistique | 2 “ |
| | Dessin géométrique | 2 “ |
| | Education physique | 3 “ |

| Nombre de professeurs | Pour les séries du 2 ^o degré(Lycée) | Nombre de cours par semaine |
|----------------------------------|--|-----------------------------|
| 1 professeur pour chaque matière | Portugais | 5 |
| | Mathématiques | 4 |
| | Physique | 4 |
| | Chimie | 4 |
| | Géographie | 2 |
| | Histoire | 2 |
| | Biologie | 4 |
| | Education physique | 3 |
| | Laboratoire (physique, chimie, biologie) | 3 |

- Les Universités

Pour entrer à l'Université, les élèves passent un concours (Vestibular). Les Universités les plus recherchées sont celles de l'état de Sao Paulo ou de la fédération en raison de la gratuité et de la qualité des cours . Par exemple, dans l'état de Sao Paulo, nous avons les universités suivantes : USP(Universidade de Sao Paulo), UNICAMP(Universidade Estadual de Campinas) et UNESP(Universidade Estadual de São Paulo). Cette dernière Université appartient à l'état de Sao Paulo et ses facultés sont installées dans 15 villes différentes de l'Etat.

II Considérations théoriques sur l'études des coniques

1) Une brève étude historique et épistémologique à propos des coniques

On situe l'apparition de l'étude des coniques en Grèce en l'an 350 avant.J. C. On attribue à Menaecmus, disciple de Eudox, la decouverte de ces nouveaux objets mathématiques. A cette époque, il y avait deux manière de les définir: soit par combinaisons de mouvements uniformes ou comme intersections de surfaces géométriques. Menaecmus a découvert que l'intersection d'un cône et d'un plan est un ensemble de courbes qui permettent de faire la duplication du cube.

Apolônio de Perga, vers 200 avant J.C, généralise l'étude de Menaecmus. Sa première oeuvre "les coniques" est considérée jusqu'au 17^e siècle comme la plus grande et unique référence pour l'étude théorique de l'ellipse, la parabole et l'hyperbole.

Au début du 17^e siècle, Kepler établit une relation entre les coniques et les lois du mouvement des planètes.

Avec l'invention de la géométrie analytique au milieu du 17^e siècle, par Descartes et Fermat, les coniques sont étudiées à partir de leurs équations.

John Wallis em 1665 publie le premier traité sur les coniques, les étudiant de façon analytique.

En 1639, Desargues étudie les coniques dans le cadre de la géométrie projective.

Pascal (1623-1662) et Philippe de La Hire(1640-1718) proposent une étude des coniques en s'appuyant sur les idées introduites par Desargues.

Poncelet(1788-1867) aussi reprend les idées de Desargues et développe une méthode plus générale pour l'étude des coniques

Chasles (1793-1880) a contribué de façon importante au développement de la théorie projective des coniques.

Menaecmus définit les coniques comme l'intersection d'un cône et d'un plan perpendiculaire à sa génératrice. L'ellipse, la parabole et l'hyperbole sont obtenues comme les sections de trois types de cône circulaire droit, suivant que l'angle au sommet du cône soit aigu, droit ou obtu.

Apolônio définit les coniques comme l'intersection d'un cône et d'un plan qui intercepte la génératrice, sans nécessairement être les sections perpendiculaires à la génératrice du cône. Il obtient ainsi à partir d'un cône unique les trois coniques en faisant varier l'inclinaison du plan de la section. Il démontre finalement que le cône choisi peut être quelconque.

Vers 320 après J.C., Pappus caractérise une conique de la façon suivante (en formalisme actuelle): "Soit d une droite et F un point n'appartenant pas à cette droite. On considère dans le plan (d, F) les segments PF et PA où A est la projection orthogonale de $P \in (d, F)$ sur la droite

d . Si le quotient $\frac{PF}{PA}$ est une constante, le point P décrit une conique. De plus, si cette constante est supérieure à 1, alors la conique est une hyperbole, si elle est égale 1, nous avons une parabole et si elle est inférieure à 1, la conique est une ellipse.

Au 9^{ème} siècle, Mohammed, fils de Moussa Ibn Shakir, étudie l'ellipse à partir de ses propriétés focales.

Guidobaldo del Monte, en 1579, a défini l'ellipse comme le lieu géométrique des points d'un plan dont la somme des distances aux foyers est constante.

Jan De Witt (1629-1672) présente des définitions cinématiques pour les sections des cônes et introduit la notion de directrice d'une conique.

Fermat (1601-1665) définit les coniques à partir de quatre équations, que nous pouvons écrire de nos jours sous la forme suivante : $xy = k^2$, $x^2 = ay$, $k^2 - x^2 = ay^2$ et $k^2 + x^2 = ay^2$

Philippe de La Hire (1640-1718) définit l'ellipse et l'hyperbole en termes de somme et de différence par rapport aux foyers, et la parabole comme l'ensemble des points qui sont à égale distance du foyer et de la directrice. Ces trois coniques sont définies comme trois courbes distinctes et leur étude est faite en fonction des propriétés particulières de chacune.

Euler (1707-1783) définit la conique comme étant celle dont l'équation cartésienne est $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Leconte Th., en 1935, propose une nouvelle définition des coniques. L'ellipse est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par un point fixe et tangentes intérieurement à un cercle donné. L'hyperbole est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui sont tangentes extérieurement à un cercle donné. Une parabole est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui sont tangentes à une droite donnée. Si nous considérons la droite comme un cercle de rayon infini, on peut donner une seule définition aux trois coniques : "C'est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui sont tangentes à un cercle donné..

Dans le travail proposé, l'étude des coniques se fait dans différents cadres et sous différents points de vue. On commence par une activité qui met en oeuvre la définition bifocale de La Hire, et nous poursuivons par une activité mettant en jeu la définition de Leconte. Nous proposons ensuite l'obtention des coniques en utilisant les équations de Fermat et finalement, nous terminons l'étude en s'appuyant sur la définition monofocale de Pappus.

2) Les hypothèses théoriques

a) Du côté du logiciel Cabri-Géomètre

Cabri-Géomètre est un outil efficace pour l'étude et la construction des lieux géométriques. C'est un logiciel qui permet de construire toutes les figures de la géométrie élémentaire qui peuvent être tracées sur une feuille de papier à l'aide d'une règle et d'un compas. L'une de ses caractéristiques importantes est de permettre la modification de façon dynamique des objets de base d'une figure. Cette caractéristique de Cabri-Géomètre est très importante dans la mesure où elle permet un accès rapide et continu à tous les cas de figures, ce qui fait du logiciel un outil riche de validation expérimentale des faits géométriques. Il permet également de visualiser la trajectoire d'un point soumis à certaines propriétés géométriques. Cette dernière option, offerte par Cabri-Géomètre, est fondamentale pour une meilleure appréhension de la notion de lieu géométrique.

b) Etude de la transposition didactique

Rappelons que la transposition didactique est l'ensemble des transformations subies par le savoir savant afin d'être, d'une part, enseigné par l'enseignant, et d'autre part, appris par un apprenant. Ce processus de transposition didactique met en jeu le professeur et les élèves. Dans l'étude des coniques nous avons la situation suivante.

L'ellipse est enseignée en physique lors de l'étude des lois de Kepler. En général, le professeur omet la définition géométrique de l'ellipse et met surtout l'accent sur la forme de sa courbe représentative. Cela constitue, généralement, le savoir institutionnalisé à ce niveau. C'est en fin de lycée que la définition analytique de l'ellipse est enseignée aux élèves. Elle leur est cependant présentée dans l'unique objectif de l'étudier à partir de son équation. Le travail

développé par la suite sur l'ellipse ne permet pas aux élèves de mettre en relation ses différents registres de représentation et les différents points de vue qui en découlent.

La parabole est aussi introduite comme étant la courbe représentative d'une fonction de 2^o degré. En général, dans ces conditions, l'élève ignore totalement la propriété géométrique qui la caractérise.

L'hyperbole apparaît dans l'enseignement de chimie et, elle est présentée comme étant la courbe représentative de la fonction définie par $y = \frac{1}{x}$. Sa propriété géométrique est présentée en fin de lycée. Mais, la compréhension de la définition de l'hyperbole comme lieu géométrique d'un point reste problématique pour les élèves, car l'étude des coniques sous ce point de vue est plutôt statique.

3) Le contrat didactique

Nous entendons par contrat didactique la négociation continue entre le professeur et l'élève dans leurs relations didactiques. Le professeur reçoit les élèves avec un ensemble de connaissances et il doit les conduire à un niveau supérieur de l'acquisition des savoirs. Ainsi s'établit entre le professeur et l'élève une relation qui détermine ce que chaque partenaire aura en charge. Cet ensemble d'obligations (implicites et explicites) réciproques au niveau de l'enseignement et de l'apprentissage joue un rôle important dans l'acquisition des savoirs.

Dans l'enseignement traditionnel brésilien, l'enseignant commence le cours par l'institutionnalisation du savoir suivie d'une série d'exercices ayant pour objectif la familiarisation des élèves avec le nouveau savoir présenté. Nous tentons de changer ce type de contrat par l'utilisation du logiciel Cabri-géomètre. Une des composantes importantes de Cabri-géomètre est le déplacement par manipulation directe des objets, offrant une rétroaction aux actions de l'utilisateur. Cette propriété du logiciel permet à l'élève d'avoir recours à ses connaissances anciennes pour reconstruire ses figures ou de découvrir des savoirs nouveaux.

4) Jeux de cadres

Un concept mathématique est généralement mieux assimilé par un sujet quand il est étudié dans divers cadres et sous divers points de vue. Les changements de cadres (algébrique, géométrique, etc.) sont de puissants outils qui permettent à l'enseignant d'analyser l'évolution

des acquisitions des élèves. Car nous savons que(citant M. Rogalski), pour faire des mathématiques, pour apprendre des mathématiques, il est essentiel :

- de savoir qu'une notion mathématique fonctionne dans plusieurs cadres et points de vue, et sous plusieurs registres, et savoir lesquels,
- de savoir changer de cadre, de point de vue ou de registre

Dans la série d'activités que nous proposons pour l'étude des coniques, nous utilisons fréquemment des changements de cadres, de points de vue et de registres de représentation. C'est ainsi que dans l'étude de l'ellipse nous passons du cadre géométrique (activités 1 et 2) au cadre algébrique et au registre graphique (activité 3). Ensuite, l'activité 4 a été conçue dans le cadre de la trigonométrie et le cadre graphique. Après les activités 1, 2, 3 et 4, nous étudions le cas général (activité 5). Changeant de point de vue sur le concept d'ellipse, l'activité 6 nous permet d'unifier les concepts d'ellipse, de parabole et d'hyperbole.

III Méthodologie

Nous avons organisé et réalisé une pré-experimentation avec 14 élèves du 2ème degré (Lycée) en 8 sessions de 90 minutes chacune. L'objectif principal des sessions est de familiariser les élèves à l'utilisation du logiciel Cabri-géomètre. Les résultats de l'analyse de ces sessions ont servi également pour la construction des situations-problèmes sur les coniques

La séquence didactique que nous avons ensuite élaborée est testée avec 4 des 14 élèves de la phase pré-expérimentale, en présence de trois observateurs. Ces élèves ont travaillé en binôme.

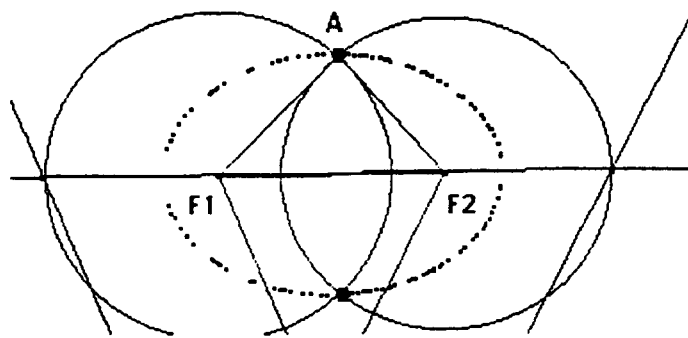
IV Résultats et discussions

Trois séquences didactiques ont été présentées aux élèves. Elles ont pour objectif, comme nous l'avons déjà signalé, de faire comprendre, à travers diverses situations, les concepts d'ellipse, d'hyperbole et de parabole. Pour la réalisation de ces trois séquences sur ces trois coniques, nous avons respectivement monté 6, puis 5 et 4 situations.

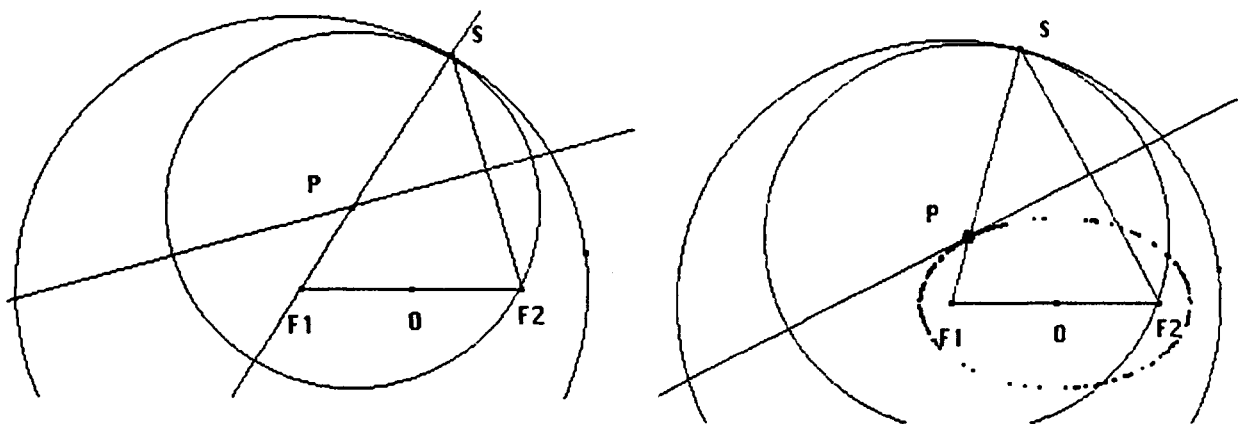
Dans ce texte, nous présentons les principaux résultats obtenus à partir de l'analyse des séquences d'activités élaborées pour l'étude de la définition géométrique et des propriétés de l'ellipse et de la parabole.

1) L'ellipse

La première activité(cf. annexes 1) avait pour objectif de caractériser l'ellipse comme étant le lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Les élèves ont construit un triangle AF_1F_2 , de base constante F_1F_2 avec $AF_1+AF_2=\text{constante}$ et ont perçu que le lieu géométrique des points A vérifiant la relation ci-dessus, est une courbe ovale. A la phase d'institutionnalisation, cette courbe est appelée "ellipse" et l'accent a été mis sur ses propriétés géométriques qui ont permis de la définir.



L'activité 2 (cf. annexes 1) avait pour objectif de définir l'ellipse par une autre propriété géométrique. Les élèves ont découvert à partir de cette activité que le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui sont tangentes intérieurement à un cercle, était aussi une courbe ovale. De plus, ils ont constaté (à l'aide de Cabri-géomètre) et démontré que les points de cette courbe avaient la propriété suivante : "la somme des distances de ces points à deux points fixes est une constante". Cette propriété a permis aux élèves de conclure qu'il s'agissait du même objet mathématique étudié dans l'activité 1 : l'ellipse.



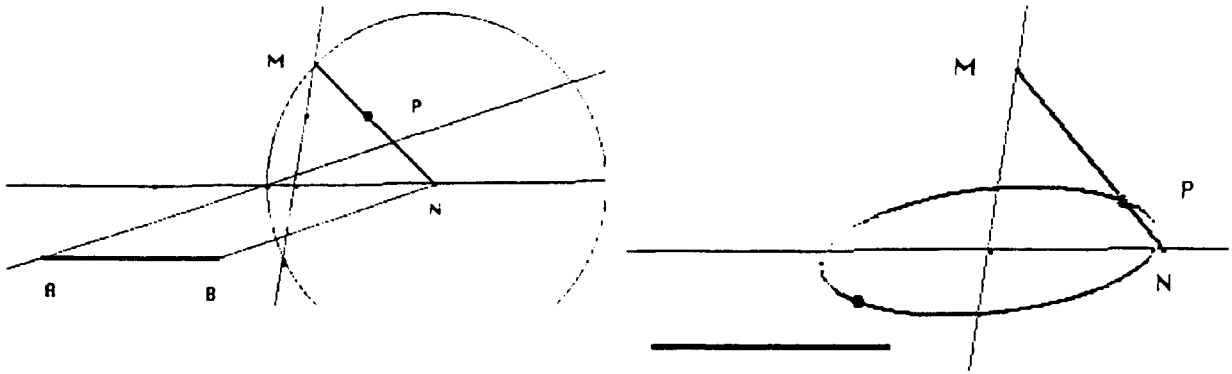
L'utilisation de l'option "lieu géométrique" de Cabri-Géomètre permet d'obtenir la courbe d'une ellipse de foyers F1 et F2 de coordonnées respectives $(-\sqrt{3}, 0)$ et $(\sqrt{3}, 0)$. Les élèves ont finalement perçu et démontré ensuite que la somme des distances d'un point quelconque de cette courbe aux foyers était une constante.

Cette activité a donc permis, aux élèves de voir le concept d'ellipse sous deux points de vue différents : une définition analytique et une définition géométrique du même objet mathématique.

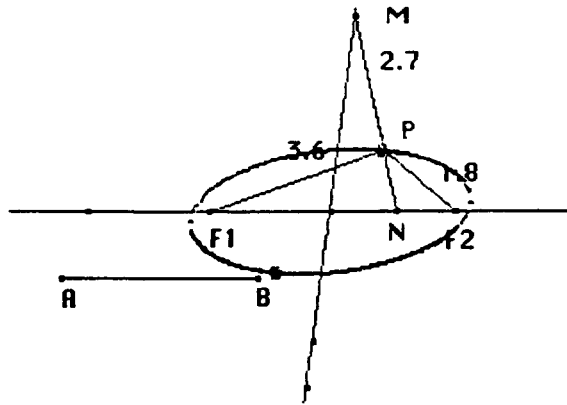
L'activité 4(cf. les annexes) propose une étude de l'ellipse dans le cadre de la trigonométrie. Les élèves construisent un point de coordonnées $(2\cos\alpha, \sin\alpha)$. La trajectoire de ce point quand α varie de 0 à 2π est une courbe ovale. La construction des points F1 et F2 de coordonnées respectives $(-\sqrt{3}, 0)$ et $(\sqrt{3}, 0)$ et la vérification de la propriété géométrique (la constance de la somme des distances de F1 et F2 à un point quelconque de l'ellipse) de l'ellipse, a permis aux élèves de constater qu'il s'agissait du même objet mathématique que dans l'activité 4. Certains élèves ont travaillé avec les expressions $x=2\cos\alpha$ et $y=\sin\alpha$ pour trouver l'équation de l'ellipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, alors que d'autres ont démontré que la somme des distances d'un point quelconque de la courbe aux points fixes F1 et F2 est une constante.

Dans l'activité 5 (cf. annexes 1), nous travaillons le concept général d'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Pour atteindre cet objectif, nous utilisons un théorème intéressant attribué à Proclus(400 après J.C) : "Si les extrémités d'un segment de droite de longueur fixe se déplacent sur deux droites concourantes, alors un point quelconque de ce segment décrit une portion d'ellipse."

Les élèves ont construit un segment MN de longueur constante dont les extrémités sont situées respectivement sur les axes ox et oy d'un repère cartésien xoy. Le lieu géométrique d'un point quelconque P du segment MN tels que MP=a et NP=b ($a \neq b$) est une courbe ovale. La construction des points de coordonnées respectives $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ et $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ et l'obtention du lieu géométrique du point P ont permis aux élèves de percevoir qu'il s'agissait d'une ellipse.



Pour construire un segment de longueur $\sqrt{a^2 - b^2}$, il suffit de construire un triangle rectangle d'hypoténuse a et dont un des côtés a pour longueur b .



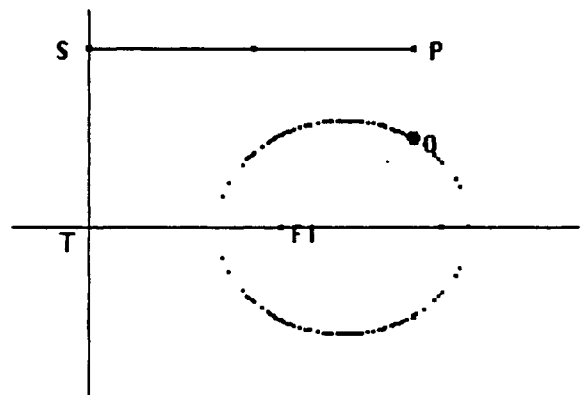
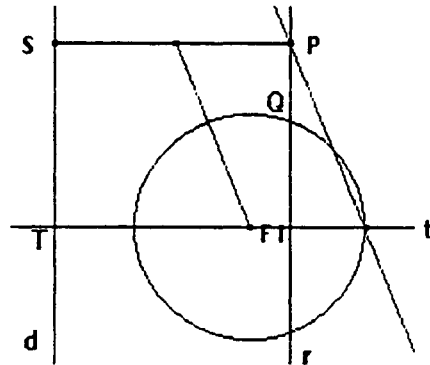
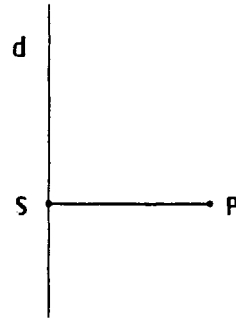
La dernière activité met en jeu une autre définition géométrique de l'ellipse: "Si a est la distance d'un point M de l'ellipse à un point fixe F_1 , et b la distance de M à une droite d , alors le rapport $\frac{a}{b}$ est une constante inférieure à 1."

Cette activité a pour objectif de montrer aux élèves, à l'issue des trois séquences, que les concepts d'ellipse, d'hyperbole et de parabole peuvent être définis à partir d'une seule propriété géométrique. Si $\frac{a}{b} = 1$, nous avons une parabole, et si $\frac{a}{b} > 1$, nous avons une hyperbole.

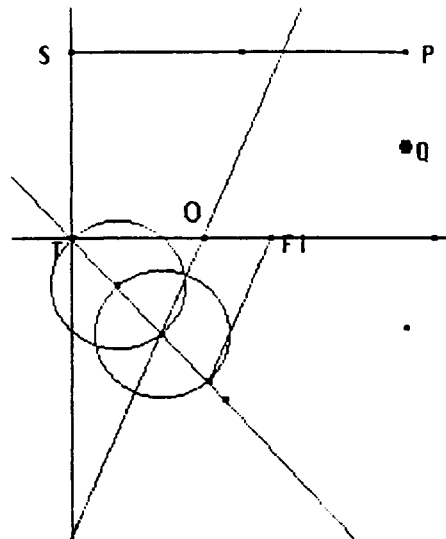
Dans le cas de l'ellipse, la droite d est la directrice et la constante $\frac{1}{2}$ est son excentricité. Le point F_1 est l'un de ses foyers.

La figure ci-contre est construite de façon que le cercle ait pour centre F_1 et pour rayon $\frac{SP}{2}$, et Q est le point d'intersection du cercle et de la droite r perpendiculaire à (SP) .

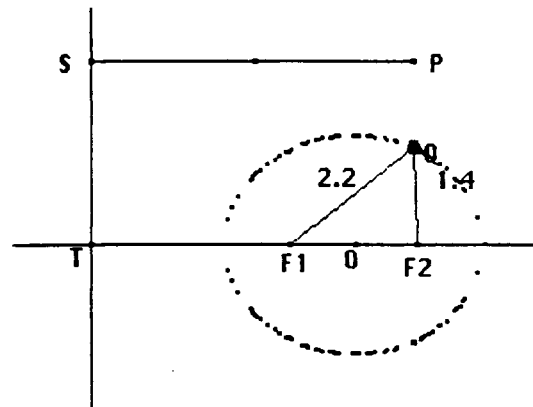
Le quotient des distances de Q à F_1 et à la droite d est égal $1/2$.



On applique le théorème de Thalès pour diviser le segment TF_1 en trois segments de même longueur. Le point O est le centre de l'ellipse et F_2 sera l'autre foyer..



Ci-contre le lieu géométrique des points Q et ses foyers F_1 et F_2 .



2) La parabole

Différentes situations-problèmes mettant en jeu les concepts de parabole, ont été conçues et expérimentées en classe. Les différentes activités proposées sont choisies de façon que les élèves passent, à travers la notion de lieu géométrique, de la définition géométrique de la parabole à sa définition algébrique, en observant qu'il s'agit de deux conceptions différentes du même objet mathématique.

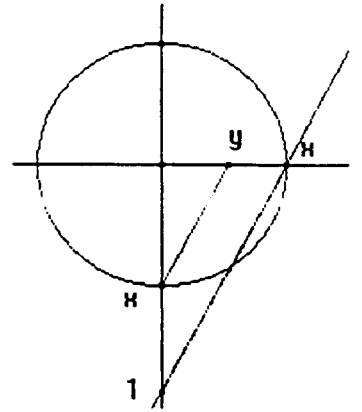
A travers ces activités (cf. les annexes 2), la parabole a été définie d'abord par ses propriétés géométriques. Les élèves, utilisant les propriétés de la médiatrice, ont observé que la parabole était l'ensemble des points M tels que $MF = MH$, où le point F est son foyer et H projection orthogonale de M sur la directrice.

Comme cas particulier, nous présentons un autre aspect du lieu géométrique-parabole. Il s'agit d'obtenir la parabole par son équation. C'est ainsi que nous avons choisi la parabole

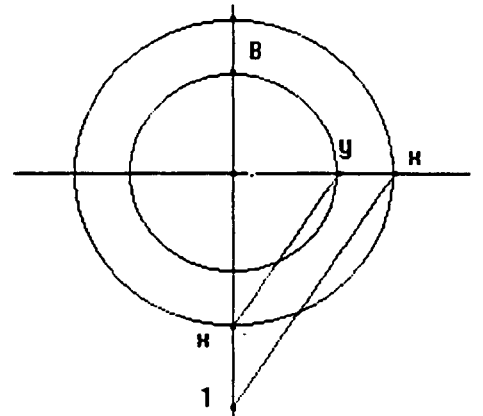
d'équation $y = \frac{x^2}{4} - 1$ (cf. activité 3 aux annexes 2), de foyer le point F de coordonnées (0, 2) et de directrice l'axe des x. Les pré-requis nécessaires à la résolution de cette situation sont le théorème de Thalès et un savoir-faire : le transport de segment.

A la question a) de l'activité 4, l'application du théorème de Thalès permet d'obtenir sur l'axe ox le segment de longueur x^2 . Car, de

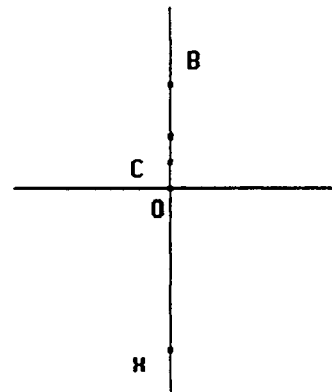
$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y}, \text{ nous tirons } y = x^2.$$



La construction du cercle de centre O et rayon y permet d'obtenir le segment OB de longueur $y = x^2$

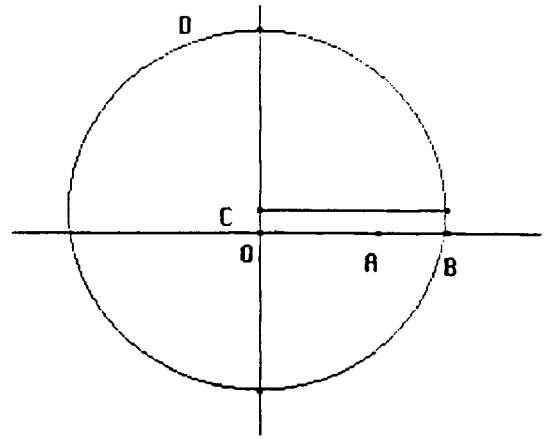


La construction du segment OC de longueur $\frac{x^2}{4}$, se fait en appliquant deux fois l'option "milieu d'un segment" sur [OB]. Nous obtenons ainsi le point $C(0, \frac{x^2}{4})$

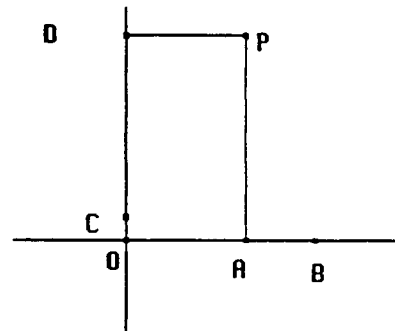


Le transport de la longueur 1 sur l'axe des y, à partir point C, à l'aide de l'option "Cercle défini par deux points" permet d'obtenir le segment OD de longueur $\frac{x^2}{4} + 1$.

On observe alors que $D(0, \frac{x^2}{4} + 1)$, $C(0, \frac{x^2}{4})$, $A(x, 0)$ et $B(1, 0)$.

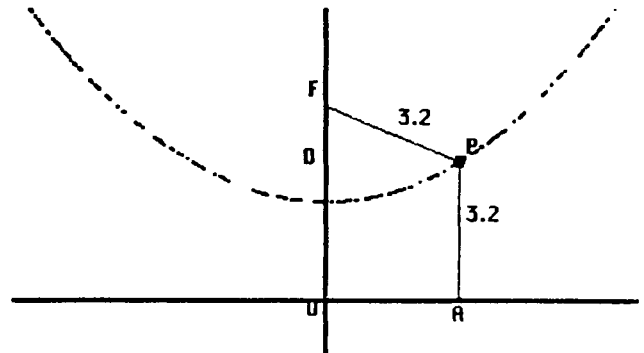


Le point P est l'intersection des droites DP et AP respectivement perpendiculaires aux axes oy et ox. Par conséquent le point P a pour coordonnées $(x, \frac{x^2}{4} + 1)$.



L'ensemble des points $P(x, \frac{x^2}{4} + 1)$ est la parabole

d'équation : $y = \frac{x^2}{4} + 1$



Nous avons aussi proposé une situation plus générale (cf. activité 4 en annexes 2) ayant pour objectif de montrer que la courbe représentative de la fonction d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est le lieu géométrique des points qui sont à égale distance d'une droite donnée et d'un point donné. De plus, nous recherchons à montrer l'effet des constantes a , b et c sur la forme de la courbe. Un des objectifs est également de construire à l'aide de Cabri-Géomètre, le sommet, l'axe de symétrie, le foyer et la directrice de la parabole.

Pour construire la parabole dans l'environnement Cabri-Géomètre, nous utilisons le constructeur universel d'équations construit par le mathématicien français D'Alembert, et présenté dans l'encyclopédie Diderot au 19e siècle.

D'Alembert décrit les principes d'une machine qui permet le tracé mécanique du graphe d'une fonction polynomiale quelconque. Le développement technologique de l'époque n'a pas permis une simulation très précise des tracés. Michel Carral et Roger Cuppens dans la revue *Répères-IREM*- N°18-de janvier 1995 présentent une simulation de la machine de D'Alembert à l'aide de Cabri-Géomètre. Nous utilisons cette simulation dans le cas particulier des polynômes de degré 2. La simulation dans l'environnement Cabri-Géomètre s'appuie, au niveau mathématique, essentiellement sur le théorème de Thalès.

Coordonnées du point A: $(0, c)$. Coordonnées du point B : $(0, b+c)$

Coordonnées du point C : $(0, a+b+c)$; celles du point S : $(1, a+b+c)$

Le coefficient angulaire de la droite BS est égal à a ,

Le théorème de Thalès permet d'obtenir les coordonnées des point G, H et J.

L'équation de la droite BS: $y=ax+b+c$;

Coordonnées du point G: $(x, ax+b+c)$.

Coordonnées du point H : $(1, ax+b+c)$;

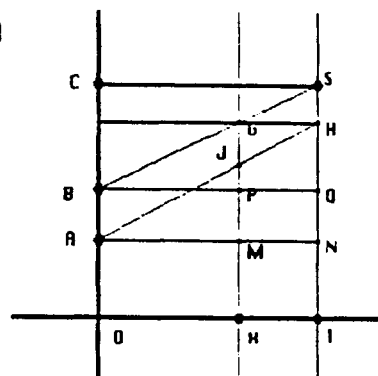
Coefficient angulaire de la droite AH: $ax+b$;

Equation de la droite AH: $(ax+b).x+c$;

Coordonnées du point J: $(x, ax^2 + bx + c)$.

Une autre manière d'obtenir les coordonnées des points est l'utilisation de la similitude des triangles.

Les triangles BGP et BSQ sont semblables. donc, $(y_G - b - c)/x = ((a + b + c) - (b + c)) / 1$. De cette égalité nous tirons $y_G = ax + b + c$. et du coup le point H: $(1, ax + b + c)$. De la similitude des triangles AJM et AHN, nous obtenons: $y_J - c/x = (ax + b + c) - c/1$ et $y_J = ax^2 + bx + c$.



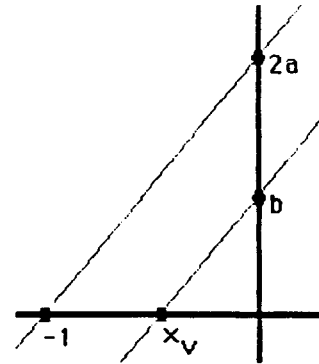
Les élèves n'ont pas eu de grandes difficultés à traiter les parties I et II de l'activité 4 (cf. annexes 2). Cela n'a pas été le cas de la majorité des questions de la partie III. Les contraintes cognitives et conceptuelles liées à l'outil mathématique de résolution des questions explique une grande partie des problèmes rencontrés par les élèves. En effet, le théorème de Thalès est l'un des outils mathématiques principaux nécessaires à la résolution des questions posées. Or l'enseignement au Brésil ne favorise pas une étude du théorème de Thalès mettant en avant, en plus de l'aspect conceptuel, celui d'outil efficace dans certaines constructions géométriques.

Nous développons ci-dessous les solutions des questions de la partie III de l'activité 4.

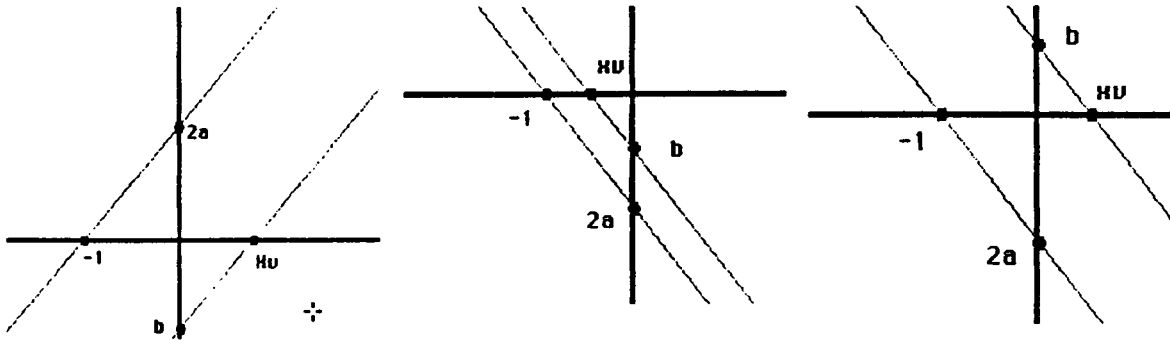
Pour construire la droite d'équation $\frac{-b}{2a}$ (abscisse du sommet de la parabole), nous appliquons le théorème de Thalès en prenant en compte les signes de a et b :

$$\frac{x_v}{b} = -\frac{1}{2a}$$

Ci-contre le cas où a et b sont tous positifs.



Les configurations ci-dessous donnent x_v en fonction de $b < 0$ et $a < 0$ (ou $a > 0$).



Nous pouvons aussi appliquer le théorème de Thalès Cas où $b > 0$

pour construire la droite d'équation $y = -\frac{\Delta}{4a}$ où $-\frac{\Delta}{4}$

est l'ordonnée y_v du sommet de la parabole.

Comme $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, alors

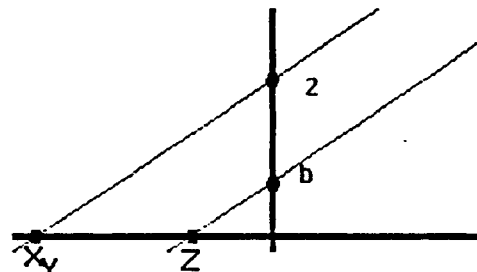
$$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = c - \frac{b^2}{4a} = c + x_v \times \frac{b}{2}$$

Pour construire y_v , il est nécessaire de construire

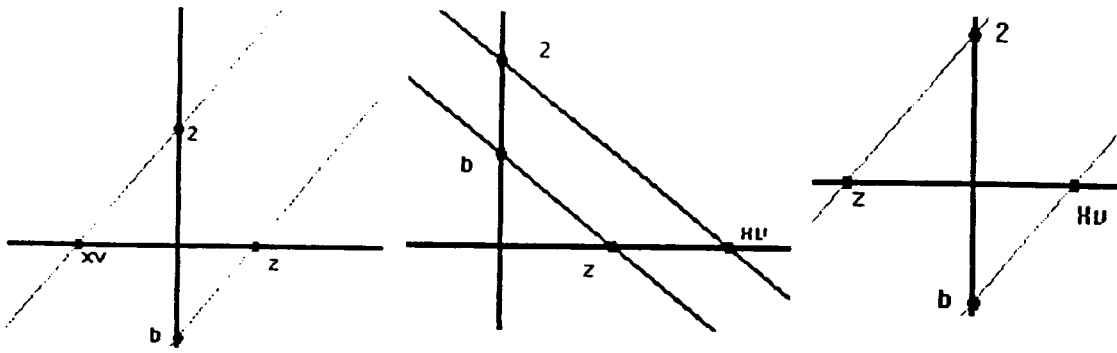
d'abord le segment de longueur $z = x_v \times \frac{b}{2}$ d'où on

déduit l'égalité (en appliquant le théorème de Thalès)

$$\frac{z}{b} = \frac{x_v}{2}$$

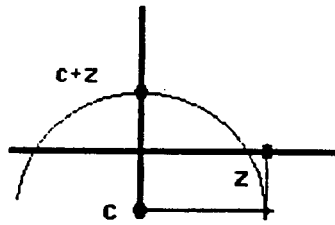
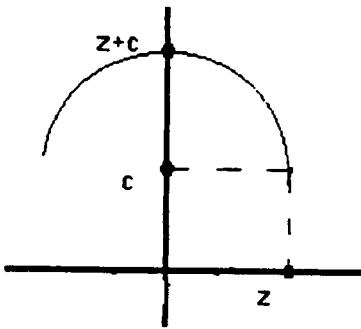


Les configurations ci-dessous permettent de construire le segment de longueur z en fonction de x_v et de b . Ces configurations prennent en compte le signe de b .

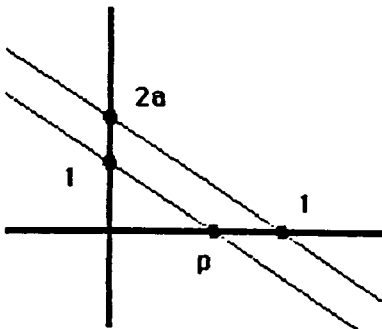
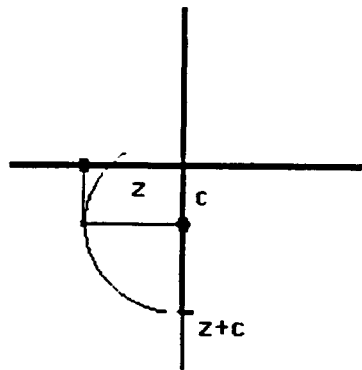
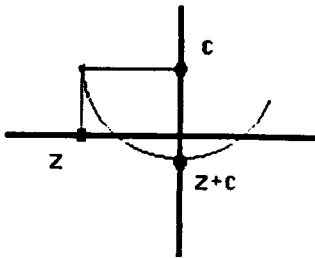


Pour obtenir $y_V = z+c$, ordonnée du sommet de la parabole, nous considérons deux cas : $a > 0$ et $a < 0$.

Cas où $a > 0$



Cas où $a < 0$



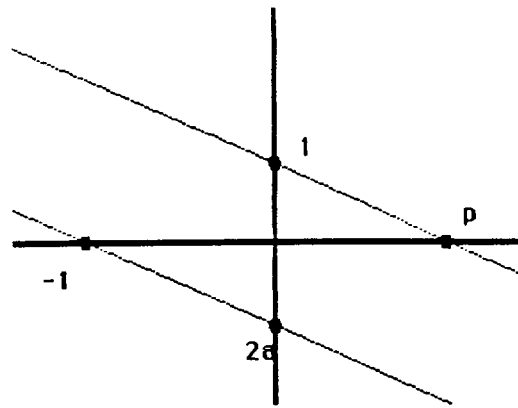
Pour construire le segment de longueur $\frac{1}{2a}$, $a > 0$, nous utilisons également le théorème de Thalès. De $p = \frac{1}{2a}$ découle l'égalité : $\frac{p}{1} = \frac{1}{2a}$

L'application du théorème de Thalès permet

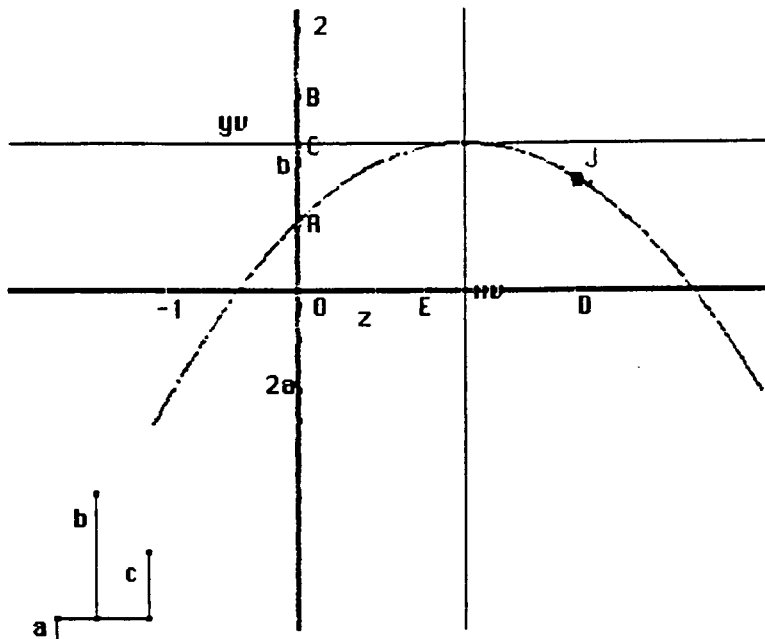
d'obtenir le segment de longueur $\frac{1}{2a}$.

avec $a < 0$. De $p = \frac{1}{2a}$ découle l'égalité :

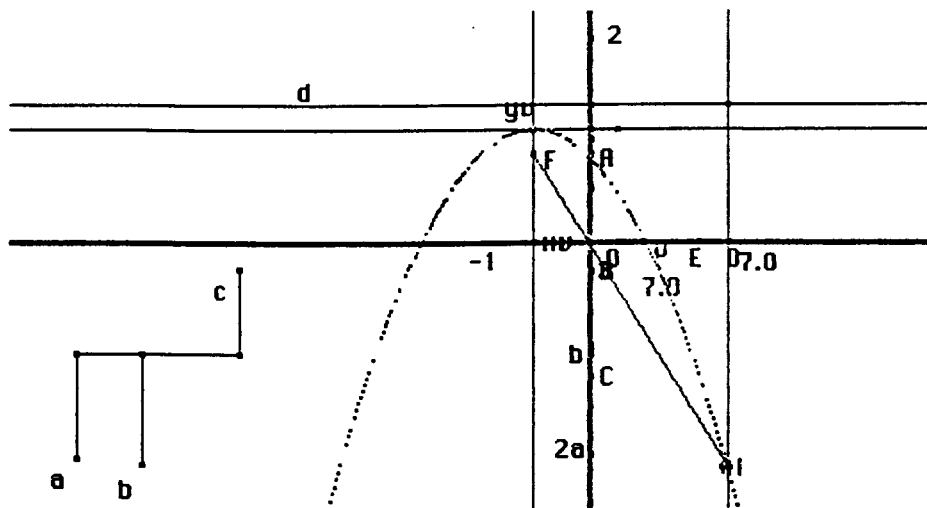
$$\frac{p}{1} = \frac{1}{2a}$$



Enfin, nous terminons l'étude de l'activité 4 en présentant les principales figures obtenues.



Comme nous pouvons le constater, la figure ci-dessous présente la parabole avec son foyer, son sommet de coordonnées (x_V, y_V) , son axe de symétrie et sa directrice dans le cas où les coefficients a et b sont négatifs et $c > 0$.



V Conclusion

Le logiciel Cabri-Géomètre est un outil très efficace pour l'étude expérimentales des courbes qui peuvent être définies par une propriété géométrique. en particulier pour l'introduction du concept d'ellipse, d'hyperbole et de parabole. En raison de son inter activité et de sa dynamique, Cabri-Géomètre permet de construire des situations pouvant modifier radicalement la vision que les élèves ont par rapport à la géométrie.

Les activités construites sur la parabole et l'ellipse ont permis de travailler ces deux objets mathématiques dans divers cadres et de les définir sous différents points de vue. Ce travail a permis, semble-t-il, contrairement aux situations didactiques traditionnelles, de mettre en évidence l'intérêt, d'une part, la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique et de différencier les représentations et les modes de traitement qui lui sont associés (Michèle ARTIGUE), et d'autre part, de l'étude des coniques comme lieux géométriques.

Bibliographie

- [1] Michèle ARTIGUE : *Ingénierie didactique*. Recherche en Didactique des Mathématiques vol 9 n°3,19, La Pensée Sauvage Editions, 1988
- [2] Nicolas BALACHEFF : "*Didactique et intelligence artificielle*" Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 14/1.2, La Pensée Sauvage - Editions, 1994
- [3] Nicolas BALACHEFF *La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique* Vingt ans de didactique des mathématiques en France, RDM, La Pensée Sauvage Editions, 1994.
- [4] Carl B. BOYER. :The history of the calculus and its conceptual development , *Dover Publications, inc. - 1949*
- [5] Carl B. BOYER : *Historia da Matematica*, Editor Edgard Bliicher Ltda, Editora da Universidade de São Paulo, 19974
- [6] Guy BROUSSEAU : *Le contrat didactique: le milieu*. Recherche en Didactique des Mathématiques vol 9, n°3, La Pensée Sauvage Editions, 1988
- [7] Michel CARRAL et Roger CUPPENS. : *De D'Alembert à Cabri-Géomètre: Le constructeur universel d'équations*, Repères-IREM, janvier 1995, Topique Editions.

- [8] Yves CHEVALLARD et Marie-Alberte JOSHUA : *Un exemple d'analyse de la transposition didactique: La notion de distance*. Recherche en Didactique des Mathématiques vol 3.n° 1., La Pensée Sauvage Editions. 1982
- [9] Morris CLINE. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York Oxford. Orford University Press. 1972.
- [10] A. DAHAN-DALMEDICO & J. PEIFFER : *Une histoire des mathématiques. routes et décales*. Editions du Seuil. 1986
- [11] Régine DOUADY : *Jeux de cadres et dialectique outil-objet* . Recherche en Didactique des Mathématiques vol 7.2, 1986.
- [12] Sir Thomas HEATH : *History of greek mathematics, Voume II. From Aristarcus to Diophantud*. Dover publications. Inc., New York. 1981
- [13] Colette LABORDE, Bernard CAPPONI : *"Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique"*. Recherche en didactique des mathématiques. Vol. 14, n° 1.2., La Pensée Sauvage Editions: 1994

Annexes 1 : Activités sur l'ellipse

Activité 1

- Crée un segment $[F_1F_2]$ sur une droite r . Soit $2c$ sa longueur.
- Crée un segment $[AB]$ d'une droite s parallèle à la droite r . Soit $2a$ la longueur de ce segment avec $2a > 2c$.
- Soit $C \in [AB]$. Détermine la valeur de $AC + CB$.
- Construire un triangle XF_1F_2 tel que $XF_1 = AC$ et $XF_2 = CB$.
- Quelle propriété géométrique caractérise le point X ?
- Quel est l'ensemble des points X quand le point C se déplace sur le segment AB .
- Propose une définition de l'objet mathématique obtenu à la question f)

Activité 2

- Crée un segment $[F_1F_2]$. Soit O son milieu.
- Crée un cercle de centre F_1 et de rayon F_1F_2 .
- Soit S un point du cercle. Construire la médiatrice m du segment $[F_2S]$.
Soit $\{P\} = m \cap [F_1S]$
- Construis un cercle de centre P et de rayon PS .
- Démontre que $PF_1 + PF_2$ est une constante. Observe que le cercle de centre P et de rayon PS passe par F_2 et est tangente intérieurement au cercle initial. Justifie ta réponse.
- Quel est l'ensemble des points centres des cercles qui passent par F_2 et qui sont tangents au cercle initial.

Activité 3

- Construis un repère cartésien orthogonal d'origine O . Construis un point $A(x, 0)$ et un point $E(0, 1)$. Construis ensuite sur l'axe des abscisses un segment de longueur égale à x^2 .
- Construis sur l'axe des ordonnées un segment $[OB]$ de longueur x^2 .
- Construis sur l'axe des ordonnées le segment $[OC]$ de longueur $x^2/4$.
- Construis sur l'axe des y le segment $[OD]$ de longueur $1 - \frac{x^2}{4}$.

e) Construis sur l'axe des y le segment $[OF]$ de longueur $\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ (on peut utiliser la moyenne géométrique entre 1 et $1 - \frac{x^2}{4}$).

f) Construis le point P de coordonnées $(x, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}})$

g) Quel est le lieu géométrique des points P quand le point A se déplace sur l'axe des x ?

h) Construis les points $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ et $F_2(\sqrt{3}, 0)$

i) A l'aide de Cabri-Géomètre, observe que $PF_1 + PF_2 = \text{constante}$ quand le point A se déplace sur l'axe des x . Que conclure ? Donne une justification mathématique?

Activité 4

a) Construis un repère cartésien orthogonal d'origine O .

b) Construis un point A sur l'axe des x et crée un cercle de centre O et de rayon OA . On suppose dans la suite que $OA = 1$

c) Soient P un point quelconque du cercle, α la mesure de l'angle $P\hat{O}A$. Construis le point Q du cercle telle que la mesure de l'angle $Q\hat{O}P$ soit égale à α .

d) Construis la droite t passant par le point Q et perpendiculaire à la droite (OP) . Soit M l'intersection des droites t et (OP) . Calcule les distances OM et QM en fonction de l'angle α .

e) Construis le point M' symétrique du point O par rapport au point M .

f) Construis le point S de coordonnées $(2\cos\alpha, \sin\alpha)$

g) Quel est le lieu géométrique des points S quand le point P se déplace sur le cercle

h) Construis les points F_1 et F_2 de coordonnées respectives $(-\sqrt{3}, 0)$ et $(\sqrt{3}, 0)$

i) Démontre que $PF_1 + PF_2$ est une constante. Trouve une équation de l'objet mathématique identifié en g). Propose une définition de cet objet mathématique.

Activité 5

a) Construis un repère cartésien d'origine O .

b) Crée un segment $[AB]$ parallèle à l'axe des x .

c) Construis un segment $[MN]$ de longueur égale à celle du segment $[AB]$ et tel que M soit sur l'axe des y et N sur l'axe des x .

- d) Construis un point P sur le segment [MN].
- e) Quel est le lieu géométrique des points P quand N se déplace sur l'axe des x.
- f) Sachant que $MP=a$ et $PN=b$ avec $a > b$. construis les points F_1 et F_2 de coordonnées $(-\sqrt{a^2 - b^2} , 0)$ et $(\sqrt{a^2 - b^2} , 0)$
- g) Construis un segment de longueur égale à PF_1+PF_2
- h) Compare le segment de longueur PF_1+PF_2 et $2a$.

Activité 6

- a) Crée une droite d et un point F_1 non élément de d.
- b) Soit S un point de la droite d. Construis le segment [SP] perpendiculaire à d.
- c) Construis la droite r passant par P et parallèle à la droite d
- d) Construis le cercle de centre F_1 et de rayon $SP/2$. Soit Q le point d'intersection du cercle et la droite d.
- e) Quel est l'ensemble des points Q quand P se déplace ?
- f) Construis la droite t passant par F_1 et perpendiculaire à la droite d. Soient $\{T\}=t \cap d$ et $O \in (TF_1)$ tel que $F_1O = \frac{TF_1}{3}$. Construis le symétrique F_2 de F_1 par rapport au point O.
- h) Démontre que $QF_1 + QF_2$ est une constante.

Annexes 2 : Activités sur la parabole

Activité 1

- a) Crée une droite d et un point F n'appartenant pas à d. Soit $H \in d$
- b) Soit r la médiatrice du segment [FH].
- c) Construis la droite s passant par le point H et perpendiculaire à la droite d. Soit $\{M\}=r \cap s$.
- e) Compare les segments [MF] et [MH].
- f) Trouve l'ensemble des points M lorsque H se déplace sur la droite d.

Activité 2

- a) Crée une droite d et un point F n'appartenant pas à cette droite.

- b) Construis un cercle de centre P, passant par le point F et tangente à la droite d.
- c) Quel est le lieu géométrique des points P centres des cercles passant par F et tangentes à la droite D au point H.
- d) Propose une définition de l'objet mathématique obtenu à la question c).

Activité 3

- a) Construis un repère cartésien orthogonal d'origine O. Marque sur l'axe des x un segment [OA] de longueur x, et sur l'axe des ordonnées le segment [OE] de longueur 1. Construis ensuite sur l'axe des x le segment de longueur x^2 .
- b) Construis sur l'axe des ordonnées le segment [OB] de longueur x^2 .
- c) Construis sur l'axe des ordonnées le segment [OC] de longueur $\frac{x^2}{4}$.
- d) Construis sur l'axe des ordonnées le segment OD de longueur $\frac{x^2}{4} + 1$.
- e) Construis le point P de coordonnées $(x, \frac{x^2}{4} + 1)$
- f) Quel est le lieu géométrique des points P lorsque le point A se déplace sur l'axe des abscisses.
- g) Construis le point F(0,2). Compare PF et PA.
- h) Sans utiliser l'option "Lieu géométrique" de Cabri-Géométrie, déplace le point A sur l'axe des x pour découvrir la propriété géométrique qui caractérise le point P.
- i) Quelle est l'équation du lieu géométrique des points P ? Définis alors ce lieu de deux manières différentes.

Activité 4

Partie I

- 1) Construis trois segments de longueurs respectives quelconques a, b et c, perpendiculaires à un segment. [AB]. Construis un repère cartésien orthogonal d'origine O de façon que le segment [AB] soit parallèle à l'axe des x.
- 2) Construis sur l'axe des ordonnées, le segment [OA] de longueur c, le segment [OB] de longueur b+c et le segment [OC] de longueur a+b+c.

Construis sur l'axe des x un segment $[OD]$ de longueur x et un segment $[OE]$ de longueur l .

3) Construis les droites r et s passant respectivement par les points D et E , et perpendiculaires à l'axe des x .

4) Construis la droite t passant par le point C et perpendiculaire à l'axe des ordonnées.

Soit $\{S\} = s \cap t$.

5) $\{G\} = (SB) \cap r$.

6) Construis la droite m passant par le point G et parallèle à l'axe des abscisses. Soit H le point d'intersection des droites m et s .

7) Soit J le point d'intersection des droites (AH) et r .

8) Quel est le lieu géométrique des points J quand D se déplace sur l'axe des abscisses.

Partie II

S'appuyant sur le résultat de la question 8, réponds aux questions suivantes.

1) Faisant $a > 0$ puis $a < 0$, trouve le lieu géométrique des points J . Quelle conclusion peux-tu tirer sur la courbe obtenue en fonction du signe de a ?

2) Fixant les valeurs de a et b , et faisant varier celles de $c > 0$, trouve le lieu géométrique des points J . Observe les différentes positions de la courbe obtenue. Quel est l'effet de c sur le lieu géométrique des points J ?

3) Les valeurs respectives de a et c étant fixes et celle de b variant, observe l'effet des valeurs de b sur le lieu géométrique des points J .

4) Pour $c < 0$, le lieu géométrique des points J coupe-t-il toujours l'axe des x ? Donne une justification mathématique de ta réponse.

5) Si $a = 0$, b et c différents de zéro, que devient le lieu géométrique des points J ?

6) Si $a = 0$, $b = 0$ et c différent de zéro, que devient le lieu géométrique des points J ?

7) Si $a = 0$ et $c = 0$, que devient le lieu géométrique des points J ?

8) Quelles sont les coordonnées des points A , B , C , S , G , H et J .

Parte III

1) Construis la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

2) Soit $\Delta = 4ac - b^2$. Construis la droite d'équation $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

