

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

R. GÉRARD

Deuxième partie : théorie globale Chapitre II

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1968, tome 5
« Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe », exp. n° 3, p. 45-59

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1968__5__A4_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEUXIEME PARTIE : THEORIE GLOBALE

CHAPITRE II

Dans cette partie, nous nous donnons une variété analytique complexe V de dimension finie m et un sous-ensemble analytique A de V , de codimension un en chacun de ses points dont les composantes irréductibles ainsi que l'ensemble $S(A)$ de ses singularités sont sans singularité. La variété $V - A$ est notée \hat{V} .

§ 1. DEFINITION DE L'ENSEMBLE $\Omega^{p \times p}(V, A)$. RESIDU D'UN ELEMENT DE $\Omega^{p \times p}(V, A)$.

a) L'ensemble analytique A est sans singularité. Notons $\Omega^{p \times p}(V, A)$ l'ensemble des formes différentielles ω de degré un appartenant à $\Omega^{p \times p}(V - A)$ et telles que : pour tout point $M \in A$, il existe un quadruplet (U, F_U, P_U, Π_U) vérifiant les conditions I suivantes :

- (I) {
- 1°) U est un voisinage ouvert de M dans V tel que $A \cap U$ soit irréductible dans U .
 - 2°) F_U est une fonction holomorphe sur U telle que

$$A \cap U = \{ P \in U \mid F_U(P) = 0 \}$$
 et $(dF_U)(P) \neq 0$ pour tout $P \in A \cap U$.
 - 3°) $P_U \in \mathcal{H}^{p \times p}(U)$, $\Pi_U \in \Omega^{p \times p}(U)$ et vérifient :

$$\omega \mid_{U - A \cap U} = P_U \frac{dF_U}{F_U} + \Pi_U$$

Exemple.

La variété V est une surface de Riemann et alors $A = \bigcup_{i \in I} \{p_i\}$ où les p_i sont des points isolés. On réalisera les conditions I en choisissant un ouvert U_i de V telle que $U_i \cap A = \{p_i\}$ et en prenant pour fonction F_{U_i} une coordonnée locale z de V dans U_i s'annulant au point p_i .

Proposition 1.

Pour tout $\omega \in \Omega^{p \times p}(V, A)$, il existe une matrice R^ω définie et holomorphe sur A ne dépendant que de ω telle que :

$$R^\omega \mid A \cap U = \Gamma_U \mid A \cap U$$

quels que soient U, F_U, Γ_U et Γ_U satisfaisant aux conditions I de la
définition de $\Omega^{\text{pXp}}(V, A)$.

Démonstration.

Considérons deux quadruplets $(U, F_U, \Gamma_U, \Pi_U)$ et $(U', F_{U'}, \Gamma_{U'}, \Pi_{U'})$
satisfaisant aux conditions I. Sur $U \cap U' \cap A$ (supposé non vide) nous avons :

$$P \frac{d\Gamma_U}{\Gamma_U} + \Gamma_U = F_U \frac{dF_U}{F_U} + \Pi_U$$

Soit Q un point de $U \cap U' \cap A$; comme F_U et $F_{U'}$ sont des générateurs de
l'idéal de A au point Q (ce sont des éléments irréductibles de l'anneau
local), il existe un voisinage $v(Q) \subset U \cap U'$ du point Q tel que sur ce
voisinage l'on ait

$$F_{U'} = K F_U$$

où K est une fonction holomorphe inversible sur $v(Q)$. Nous avons sur $v(Q) \cap A$

$$P_U \frac{dF_U}{F_U} + \Gamma_U = F_{U'} \frac{dK}{K} + F_{U'} \frac{dF_{U'}}{F_{U'}} + \Pi_{U'}$$

c'est à dire :

$$(F_U - P_{U'}) dF_U = F_U (\Pi_{U'} - \Pi_U + P_{U'} \frac{dK}{K})$$

et comme $(dF_U)(Q) \neq 0$, nous avons :

$$P_U(Q) = F_{U'}(Q)$$

Ce qui prouve la proposition 1.

Définition 1.

La fonction R^ω sera notée $\text{rés}_V \omega$ et appelée le résidu de ω .

Proposition 2.

Si le résidu d'un élément ω de $\Omega^{\text{pXp}}(V, A)$ est nul, alors ω est

restriction à $V-A$ d'un élément de $\Omega^{p \times p}(V)$.

Démonstration.

Soit ω un élément de $\Omega^{p \times p}(V, A)$ vérifiant $\text{rés}_V \omega = 0$. Il suffit de prouver qu'il se prolonge localement au voisinage de tout point M de A en une forme différentielle holomorphe.

Par hypothèse :

$$\text{rés}_V \omega \mid A \cap U = P_U \mid A \cap U = 0 ,$$

donc il existe un voisinage v de V dans U tel que :

$$P_U = K F_U \quad \text{sur } v ,$$

où K est une matrice holomorphe dans v . Nous avons donc :

$$\omega \mid v \cap A = K dF_U + \pi_U .$$

Le second membre est holomorphe sur v , c.q.f.d.

b) L'ensemble analytique A admet des singularités. Désignons par S l'ensemble des points singuliers de A . Soit (A^*, μ) le normalisé de A et posons $S^* = \mu^{-1}(S)$. Nous noterons cette fois $\Omega^{p \times p}(V, A)$ le sous ensemble de $\Omega^{p \times p}(V-S, A-S)$ des 1-formes différentielles matricielles ω pour lesquelles il existe une fonction matricielle R^ω définie et holomorphe sur A^* telle que :

$$R^\omega = (\text{rés}_{V-S} \omega) \circ \mu \quad \text{sur } A^* - S^* .$$

Cette fonction R^ω sera encore appelée le résidu de ω et notée $\text{rés}_V \omega$.

Proposition 3.

Soit ω un élément de $\Omega^{p \times p}(V-S, A-S)$. Si $\text{rés}_{V-S} \omega = 0$ alors ω est la restriction à $V-S$ d'un élément de $\Omega^{p \times p}(V)$.

Démonstration.

La condition $\text{rés}_{V-S} \omega = 0$ entraîne que ω est la restriction à

$V - S - (A - S)$ d'une forme différentielle ω' holomorphe sur $V - S$. Comme la codimension de S est supérieure ou égale à 2, ω' est elle-même la restriction à $V - S$ d'une forme différentielle holomorphe sur V , ce qui prouve la proposition 3.

Corollaire 1.

Si $\omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V, A)$ et $\text{rés}_V \omega = 0$, alors ω est la restriction à $V - A$ d'une forme différentielle holomorphe sur V .

Définition 2.

Si M est un point de l'ensemble analytique A , nous appellerons voisinage privilégié de M par rapport à A , tout voisinage U de M dans V tel que toutes les composantes irréductibles de $A \cap U$ contiennent M .

Pour toute forme différentielle de degré un ω appartenant à $\Omega^{\text{PXP}}(V - A)$, nous désignerons par (P) la propriété suivante :

"Pour tout $M \in A$, il existe un voisinage privilégié $U(M)$ de M dans V tel que si $(A_i)_{1 \leq i \leq q_M}$ désignent les composantes irréductibles de $A \cap U$ l'on ait :

$$(1) \quad \omega = \sum_{i=1}^{q_M} P_i \frac{dF_i}{F_i} + \pi_U \quad \text{sur } U \cap A,$$

où

- a) $P_i \in \mathbb{C}^{\text{PXP}}(U)$ pour tout $i = 1, 2, \dots, q_M$,
- b) $\pi_U \in \Omega^{\text{PXP}}(U)$,
- c) $F_i |_{A_i} = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, q_M$ " .

Proposition 4.

Si $\omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V - A)$ possède la propriété (P) alors $\omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V, A)$.

Nous avons évidemment $\omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V - S, A - S)$ et alors $\text{rés}_{V-S} \omega$ est bien défini et holomorphe sur $A - S$. La fonction $R^\omega = (\text{rés}_{V-S} \omega) \circ \mu$ est holomorphe sur $A^* - S^*$. Il suffit donc de montrer que R^ω se prolonge en une fonction holomorphe sur A^* . Soit M^* un point de S^* et $M = \mu(M^*)$, désignons par $(A_i)_{1 \leq i \leq q_M}$ les composantes irréductibles de A passant par M , dans un voisinage privilégié $U(M)$ de M nous avons :

$$\omega \mid U(M) - A \cap U(M) = \sum_{i=1}^{q_M} P_i \frac{dF_i}{F_i} + \pi_U .$$

Pour tout $i = 1, 2, \dots, q_M$,

$$\begin{aligned} R_i^\omega &= R^\omega \mid \mu^{-1}(A_i \cap U - S \cap U \cap A_i) \\ &= P_i \circ \mu \mid A_i \cap U - S \cap U \cap A_i . \end{aligned}$$

Comme P_i est holomorphe sur U , il résulte que R_i^ω se prolonge en une fonction holomorphe sur

$$\overline{\mu^{-1}(A_i \cap U - S \cap U \cap A_i)} .$$

Ce qui entraîne que R^ω est la restriction à $A^* - S^*$ d'une fonction R^* holomorphe sur A^* .

2. EXEMPLES.

Dans ce paragraphe, A sera réunion d'un nombre fini q de composantes irréductibles A_i sans singularité.

a) Supposons que V est une variété de Stein et que chaque A_i est défini par l'annulation d'une seule fonction F_i holomorphe dans V vérifiant $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout M appartenant à A_i .

Proposition 5.

Tout élément ω de $\Omega^{p \times p}(V, A)$ vérifie dans $V - A$

$$\omega = \sum_{i=1}^q P_i \frac{dF_i}{F_i} + \Theta$$

où

$$P_i \in \mathcal{K}^{p \times p}(V) \text{ et } \Theta \in \Omega^{p \times p}(V) .$$

Démonstration.

La fonction holomorphe $R^\omega = \text{rés}_V \omega$ est la donnée de q fonctions R_i^ω ($i = 1, 2, \dots, q$) holomorphes respectivement sur A_i ($i = 1, 2, \dots, q$). Comme V est une variété de Stein, il existe pour tout i une fonction P_i holomorphe sur V telle que :

$$P_i \mid A_i = R_i^\omega .$$

Montrons que la forme différentielle

$$\Theta = \omega - \sum_{i=1}^q P_i \frac{d F_i}{F_i}$$

qui appartient à $\Omega^{p \times p}(V, A)$ se prolonge en une forme différentielle holomorphe sur V . Soit M un point quelconque de $A - S$, ce point appartient à une composante irréductible A_i de A et à une seule. Il existe un voisinage $U(M)$ de M dans V et des matrices $Q_i \in \Omega^{p \times p}(U)$, $\pi_i \in \Omega^{p \times p}(U)$ telles que :

$$\omega \mid U - A \cap U = Q_i \frac{d F_i}{F_i} + \pi_i .$$

Comme $(dF_i)(N) \neq 0$ pour tout $N \in A_i$ nous avons :

$$(Q_i - P_i) \mid U \cap A_i = 0$$

et donc

$$Q_i - P_i = K F_i$$

où K est une matrice carrée d'ordre p dont tous les éléments sont holomorphes inversibles. Ce résultat entraîne que pour tout $i = 1, 2, \dots, q$

$$\text{rés}_{V-S} \Theta \mid A_i - S = 0$$

et donc $\text{rés}_{V-S} \Theta = 0$, ce qui signifie que Θ est la restriction à $V - A$ d'une forme différentielle holomorphe sur V et comme sur $V - A$ nous avons

$$\omega = \sum_{i=1}^q P_i \frac{d F_i}{F_i} + \Theta$$

la proposition 4 est démontrée.

Remarque 1.

Cette proposition nous permet de donner une réciproque à la proposition 4 du § 1. En effet, il suffit de choisir le voisinage suffisamment petit et de plus de Stein, ce qui est toujours possible.

b) Supposons que V est l'espace projectif complexe, quotient de

$\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$ par l'application π qui identifie les points situés sur une même droite complexe issue de l'origine de \mathbb{C}^{m+1} . Soit F_i une équation polynômiale irréductible de $\pi^{-1}(A_i)$ et soit $\hat{\pi}$ la restriction de π à $\mathbb{C}^{m+1} - (\pi^{-1}(A) \cup \{0\})$.

Proposition 6.

Pour tout $\omega \in \Omega^{\text{pXp}}(V, A)$ on a :

$$\omega = \sum_{i=1}^q \mathcal{A}_i \frac{dF_i}{F_i}$$

où les matrices \mathcal{A}_i sont des $p \times p$ - matrices constantes liées par la relation

$$\sum_{i=1}^q (\text{degré } F_i) \mathcal{A}_i = 0$$

Démonstration .

Désignons par x_0, x_1, \dots, x_m un système de coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ et par $\mathcal{U} = \{U_j\}_{0 \leq j \leq m}$ le recouvrement canonique de $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ par les ouverts de coordonnées définis respectivement par $x_j \neq 0$ et posons

$$y_j^k = \frac{x_k}{x_j} \quad j = 0, 1, 2, \dots, m ; \quad k = 0, 1, \dots, m \text{ et } k \neq j .$$

Pour tout i, F_i est un polynôme mais au voisinage de tout point de A_i ce polynôme est équivalent à un polynôme distingué du premier degré ce qui entraîne que $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout M appartenant à A_i . Sur l'ouvert de Stein U_j nous avons :

$$\omega |_{U_j - A \cap U_j} = \sum_{i=1}^q p_j^i \frac{dF_i}{F_i} + \bar{\omega}_j$$

où

$$p_j^i \in \mathcal{O}^{\text{pXp}}(U_j), \quad \bar{\omega}_j \in \Omega^{\text{pXp}}(U_j),$$

et où les fonctions f_i ($i = 1, 2, \dots, q$) sont définies par :

$$F_i(x_0, x_1, \dots, x_m) = (x_j)^{p_i} f_i(y_j^0, y_j^1, \dots, y_j^m) .$$

La fonction rés_V ω est constituée de q fonctions \mathcal{A}_i respectivement

holomorphe sur A_i ; comme A_i est compact, la fonction \mathcal{A}_i est constante. Considérons la forme différentielle

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^q \mathcal{A}_i \frac{dF_i}{F_i} ,$$

et montrons qu'il existe une forme différentielle z sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C}) - A$ telle que

$$\pi^* z = \hat{z} .$$

Pour cela il suffit de prouver que

$$\sum_{i=1}^q (\text{degré } F_i) \mathcal{A}_i = 0 .$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^* (\omega | U_j - U_j \cap A) &= \sum_{i=1}^q P_j^i \frac{dF_i}{F_i} + \sum_{i=1}^q P_j^i \frac{d(x_j^{-p_i})}{x_j^{-p_i}} + \bar{\omega}_j \\ &= \sum_{i=1}^q P_j^i \frac{dF_i}{F_i} + \sum_{i=1}^q P_j^i (-p_i) \frac{dx_j}{x_j} + \bar{\omega}_j . \end{aligned}$$

On peut supposer sans nuire à la généralité du raisonnement qui va suivre que pour un j donné la sous variété définie par $x_j = 0$ n'appartient pas à A . Soit D une droite projective complexe quelconque de $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$. Le théorème des résidus appliqué à la forme différentielle

$$\omega | (U_j - U_j \cap A) \cap D$$

nous donne immédiatement

$$\sum_{i=1}^q (\text{degré } F_i) P_j^i | A_i \cap D = 0 ,$$

c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^q (\text{degré } F_i) \mathcal{A}_i = 0 .$$

En d'autres termes, il existe une forme différentielle z définie et holomorphe sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C}) - A$ telle que

$$\hat{\pi}^* z = \hat{z} .$$

Mais alors vu la définition de ω la forme différentielle $\omega - \omega$ est holomorphe sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$, comme il n'y a pas d'autres formes différentielles holomorphes sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ que la forme différentielle nulle, la proposition 5 se trouve démontrée.

§ 3. STABILITE DE Ω^{PXP} (V, A) PAR MODIFICATION DE HOPF .

Soit Σ un sous ensemble analytique de V , sans singularité et de codimension supérieure ou égale à 2. On peut supposer sans nuire à la généralité que Σ est irréductible. Désignons par V' la variété obtenue à partir de V en faisant un éclatement de Hopf [10] σ le long de Σ , par A' le sous ensemble analytique $\sigma^{-1}(A)$ de V' et par $\Sigma' = \sigma^{-1}(\Sigma)$.

Théorème 1.

L'application σ^* est un isomorphisme de Ω^{PXP} (V, A) sur Ω^{PXP} (V', A').

Ce théorème va être une conséquence des lemmes suivants.

Lemme 1.

L'application σ^* est un isomorphisme de Ω^{PXP} (V) sur Ω^{PXP} (V').

Démonstration.

L'application σ étant analytique, il est évident que si $\omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V)$ on a $\sigma^* \omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V')$. Inversement soit ω' un élément de $\Omega^{\text{PXP}}(V')$, comme σ est un isomorphisme analytique de $V' - \Sigma'$ sur $V - \Sigma$, il existe une forme différentielle $\hat{\omega} \in \Omega^{\text{PXP}}(V - \Sigma)$ telle que :

$$\omega' \mid V' - \Sigma' = \sigma^* \hat{\omega} .$$

D'autre part l'ensemble analytique Σ étant de codimension supérieure ou égale à 2, il existe une forme différentielle ω appartenant à $\Omega^{\text{PXP}}(V)$ telle que :

$$\omega \mid V - \Sigma = \hat{\omega}$$

mais alors l'égalité

$$\sigma^* \omega \mid V' - \Sigma' = \omega' \mid V' - \Sigma'$$

et de plus $\omega' \in \Omega^{\text{PXP}}(V')$ et $\sigma^* \omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V')$ entraînent que

$$\sigma^* \omega = \omega' \text{ sur } V'.$$

Ce qui démontre le lemme 1.

Lemme 2.

Si $\omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V, A)$ alors $\sigma^* \omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V', A')$.

Soit ω un élément de $\Omega^{\text{PXP}}(V, A)$, nous avons $\sigma^* \omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V' \setminus A')$ et même $\sigma^* \omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V' - \Sigma' \cap A', A' - \Sigma' \cap A')$. Le fait d'appartenir à $\Omega^{\text{PXP}}(V', A')$ étant une propriété locale, il suffit pour faire la démonstration de se placer au voisinage d'un point P' de $\Sigma' \cap A'$. Notons P la projection de P' sur V et utilisons la définition locale de l'éclatement σ .

Il existe un voisinage $U(P)$ de P dans V et des fonctions coordonnées x_1, x_2, \dots, x_m telles que :

- $U(P)$ soit un ouvert de Stein privilégié pour A .
- $U \cap \Sigma = \{x \in U \mid x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0\}$ où k est la codimension de Σ .

De plus $U(P)$ peut être choisi de manière à décrire localement σ , c'est à dire tel qu'il existe un isomorphisme analytique ρ de $\sigma^{-1}(U)$ sur le sous ensemble analytique sans singularité U^* de $U \times \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C})$ défini par

$$U^* = \{(x, t_1, t_2, \dots, t_k) \in U \times \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C}) \mid x_u t_v = x_v t_u \text{ pour tout } u, v = 1, 2, \dots, k\}$$

vérifiant

$$\pi \circ \rho = \sigma,$$

où

- t_1, t_2, \dots, t_k forment un système de coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C})$,
- π est la projection canonique de $U \times \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C})$ sur U .

La variété U^* peut-être recouverte par les ouverts de coordonnées suivants U_j^* ($j=1, 2, \dots, k$) défini par $t_j \neq 0$ et muni des fonctions coordonnées

$$\frac{t_1}{t_j}, \frac{t_2}{t_j}, \dots, \frac{t_{j-1}}{t_j}, x_j, \frac{t_{j+1}}{t_j}, \dots, \frac{t_k}{t_j}, x_{k+1}, \dots, x_m.$$

Posons :

$$\xi_j^1 = x_1 \quad \text{si } l > k \quad \text{ou si } l = j$$

$$\xi_j^1 = \frac{t_1}{t_j} \quad \text{si } l \leq k \quad \text{et } l \neq j .$$

Alors

$$x_1 = \xi_j^1 \quad \text{si } l > k \quad \text{ou } l = j$$

$$x_1 = \xi_j^1 \xi_j^j \quad \text{si } l \leq k \quad \text{et } l \neq j .$$

Notons A_i ($i = 1, 2, \dots, r$) les composantes irréductibles de $A \cap U$, elles passent toutes par P car U est privilégié pour A . En restreignant éventuellement l'ouvert U , nous avons sur $U \cap \bigcup A$, la formule (1) (p. II.1.48.)

$$\omega = \sum_{i=1}^r P_i \frac{dF_i}{F_i} + \bar{\omega} .$$

Dans la suite nous éviterons d'écrire l'application ρ intervenant dans la définition locale de l'éclatement σ .

Si I désigne le sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, r\}$ des indices i tels que $A_i \cap U \supset \Sigma \cap U$; nous avons pour tout $i \in I$

$$(F_i \circ \sigma) | U_j^* = (\xi_j^j)^{P_i^j} G_i^j (\xi_j^1, \xi_j^2, \dots, \xi_j^m),$$

et la condition $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout $M \in U \cap A_i$ entraîne, $P_i^j = 1$ et $G_i^j (\xi_j^1, \dots, \xi_j^{j-1}, 0, \xi_j^{j+1}, \dots, \xi_j^m) \neq 0$.

Mais alors nous avons sur $U_j^* - A' \cap U_j^*$

$$\sigma^* \omega = \sum_{i \in I} {}^* P_i \frac{d \xi_j^j}{\xi_j^j} + \sum_{i \in I} {}^* P_i \frac{d G_i^j}{G_i^j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I}}^r {}^* P_i \frac{d F_i}{F_i} + \sigma^* \bar{\omega}$$

où pour tout i , ${}^* P_i = P_i (\xi_j^1, \xi_j^2, \xi_j^j, \dots) = P_i \circ \sigma | U_j^*$,

cette formule nous montre que la forme différentielle

$$\sigma^* \omega | U_j^* - A' \cap U_j^*$$

appartient à $\Omega^{\text{PXP}}(U_j^*, A' \cap U_j^*)$. Ce résultat étant valable pour tout j nous avons par là démontré que $\sigma^* \omega \in \Omega^{\text{PXP}}(V', A')$ (cf. prop. 4 § 1).

Démonstration du théorème 1.

Vu les lemmes ci-dessus, il reste à prouver que σ^* est surjective car elle est évidemment injective. Soit ω' une forme différentielle appartenant à $\Omega^{\text{PXP}}(V', A')$, σ étant un isomorphisme analytique de $V' - \Sigma'$ sur $V - \Sigma$, il existe une forme $\tilde{\omega} \in \Omega^{\text{PXP}}(V - \Sigma \cap A, A - \Sigma \cap A)$ telle que :

$$\sigma^* \tilde{\omega} |_{V' - \Sigma'} = \omega' .$$

Notons $R'(\omega')$ le résidu de ω' sur V' , cette fonction est définie et holomorphe sur A' et

$$R'(\omega') \circ \sigma^{-1} |_{A - \Sigma \cap A} = R(\tilde{\omega}) = \text{rés}_{V - \Sigma \cap A} \tilde{\omega} .$$

Désignons par $(A_i)_{i \in I}$ les composantes irréductibles de A et posons

$$\tilde{R}_i = R(\tilde{\omega}) |_{A_i - \Sigma \cap A_i} .$$

Il est évident que si $\Sigma \cap A = \emptyset$ alors $\tilde{\omega}$ appartient à $\Omega^{\text{PXP}}(V, A)$ et le théorème se trouve démontré. Le seul cas à étudier est donc le cas où $\Sigma \cap A \neq \emptyset$. Pour les indices i telles que $\Sigma \cap A_i = \emptyset$, \tilde{R}_i est une fonction définie et holomorphe sur A_i . Par ailleurs si la codimension de $\Sigma \cap A_i$ est supérieure à 2, il est clair que la fonction \tilde{R}_i se prolonge en une fonction R_i holomorphe sur A_i . On peut donc supposer que la codimension de Σ est égale à 2 et le seul cas restant à étudier est celui des composantes irréductibles A_i contenant Σ . Rappelons que nous avons supposé Σ irréductible. L'application σ est un isomorphisme analytique de $\sigma^{-1}(A_i - \Sigma \cap A_i)$ sur $A_i - \Sigma \cap A_i$, nous avons donc

$$\tilde{R}_i \circ \sigma |_{\sigma^{-1}(A_i - \Sigma \cap A_i)} = R' |_{\sigma^{-1}(A_i - \Sigma \cap A_i)}$$

où R' est holomorphe sur $\sigma^{-1}(A_i)$. Montrons que R_i est la restriction à $A_i - \Sigma \cap A_i$ d'une fonction R_i sur A_i holomorphe. Pour cela plaçons nous au voisinage d'un point $P \in \Sigma \cap A_i$. Soit $U(P)$ un voisinage coordonné de P privilégié pour A_i possédant les propriétés suivantes ; x_1, x_2, \dots, x_m désignant les

fonctions coordonnées dans U :

$$\text{a) } U \cap \Sigma = \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in U \mid x_1 = x_2 = 0 \} ,$$

$$P = (0, 0, \dots, 0) \in U .$$

$$\text{b) } A_i \cap U = \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in U \mid F_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \}$$

où F_i est une fonction holomorphe dans U vérifiant $(dF_i)(M) \neq 0$
pour tout $M \in U \cap A_i$.

c) L'ouvert U décrit localement l'éclatement σ , c'est à dire qu'il existe un **isomorphisme** analytique ρ de $\sigma^{-1}(U)$ sur la sous variété U^* de $U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ définie par :

$$U^* = \{ (x, t_1, t_2) \in U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \mid x_1 t_2 = x_2 t_1 \}$$

avec $\pi \circ \rho = \sigma$

où

1°) t_1, t_2 sont des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$,

2°) π est la projection canonique de $U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur U .

Dans la suite nous n'écrirons pas explicitement l'isomorphisme ρ . La variété U^* est recouverte par les deux ouverts de coordonnées U_1^* défini par $t_1 \neq 0$ et muni des fonctions coordonnées

$$\xi_1^1 = x_1 , \xi_2^1 = \frac{t_2}{t_1} , \xi_3^1 = x_3 , \dots , \xi_m^1 = x_m ,$$

et U_2^* défini par $t_2 \neq 0$ et muni des fonctions coordonnées

$$\xi_1^2 = \frac{t_1}{t_2} , \xi_2^2 = x_2 , \xi_3^2 = x_3 , \dots , \xi_m^2 = x_m .$$

Nous avons

$$F_i \circ \sigma \mid U_1^* = \xi_1^1 G_i^1(\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_m^1)$$

avec $G_i^1(0, \xi_2^1, \dots, \xi_m^1) \neq 0$

et $F_i \circ \sigma \mid U_2^* = \xi_2^2 G_i^2(\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_m^2)$

avec $G_i^2(\xi_1^2, 0, \xi_3^2, \dots, \xi_m^2) \neq 0$.

Désignons par A''_1 le sous ensemble analytique de U^* défini par

$$G_1^1 = 0 \text{ dans } U_1^*$$

et

$$G_1^2 = 0 \text{ dans } U_2^*$$

Le fait que A_i soit sans singularité entraîne que $\sigma|_{A''_1}$ est un isomorphisme de A''_1 sur $A_i \cap U$, mais comme $R'|_{A''_1}$ est holomorphe et comme

$$\tilde{R}_i|_{A_i \cap U - \Sigma \cap A_i \cap U} = R' \circ \sigma|_{A''_1} - \Sigma' \cap A''_1,$$

la fonction \tilde{R}_i se prolonge en une fonction R_i holomorphe sur $A_i \cap U$. La famille $(R_i)_{i \in I}$ définit donc une fonction sur A holomorphe, il en résulte que la forme différentielle $\tilde{\omega}$ appartient à $\Omega^{p \times p}(V, A)$ et par suite l'application σ^* est surjective ce qui prouve le théorème 1.

Du théorème 1 nous déduisons un autre résultat intéressant concernant les résidus. Soient J l'ensemble des éléments $i \in I$ tels que $A_i \supset \Sigma$, et A'_i l'adhérence de $\sigma^{-1}(A_i - \Sigma \cap A_i)$ dans V' .

Proposition 1.

Si $J \neq \emptyset$, nous avons pour tout $\omega' \in \Omega^{p \times p}(V', A')$,

$$\text{rés}_{V'} \omega' | \Sigma' = \sum_{i \in J} \text{rés}_{V'} \omega' | A'_i \cap \Sigma'.$$

En effet soit $\omega' \in \Omega^{p \times p}(V', A')$, il existe $\omega \in \Omega^{p \times p}(V, A)$ telle que

$$\sigma^* \omega = \omega',$$

et si U est un voisinage d'un point $P \in \Sigma$ choisi comme dans la démonstration du lemme 2 dont nous utilisons les notations, nous avons :

$$\omega|_{U - A \cap U} = \sum_{i=1}^r P_i \frac{d F_i}{F_i} + \bar{\omega},$$

et pour $j = 1, 2$

$$\sigma^* \omega|_{U_j^* - A' \cap U_j^*} = \sum_{i \in J} {}^* P_i \frac{d G_i^j}{G_i^j} + \sum_{i \in J} {}^* F_i \frac{d G_i^j}{G_i^j} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \notin J}} {}^* P_i \frac{d F_i}{F_i} - \sigma^* \bar{\omega},$$

$$\text{où } {}^* P_i = P_i \circ \sigma|_{U_j^*}.$$

Alors

$$\text{rés}_{V'} \omega' | \Sigma' \cap U^* = \sum_{i \in J} {}^*P_i | \Sigma' ,$$

or A'_j est défini dans U_j par

$$G_i^j = 0 \cdot$$

Il en résulte que

$$\text{rés}_{V'} \omega' | A'_i \cap \Sigma' \cap U_j^* = {}^*P_i | A'_i \cap \Sigma' \cap U_j^*$$

ce qui prouve la proposition 6.