Michèle Audin

Structures ***Spin***^{c} **sur les variétés symplectiques**

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1995, tome 47
« Conférences de M. Audin, D. Bernard, A. Bilal, B. Enriquez, E. Frenkel, F. Golse, M. Katz, R. Lawrence, O. Mathieu, P. Von Moerbeke, V. Ovsienko, N. Reshetikhin, S. Theisen », , exp. n° 10, p. 263-268

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1995__47__263_0>

Structures Spin^c sur les variétés symplectiques

Michèle Audin

L'utilisation des équations de Seiberg-Witten pour les théorèmes symplectiques de Taubes [10, 11, 12] (unicité de la structure symplectique de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ notamment) ont montré l'importance de ces structures pour l'étude des variétés symplectiques. Le seul but de ces notes est de rappeler une description des structures Spin^c qui était à la mode parmi les topologues il y a 15 ou 20 ans (voir par exemple [9]) et qui est particulièrement économique et efficace.

Je ne parlerai pas des applications, me contentant de renvoyer aux travaux de Taubes cités ci-dessus, aux articles de survol [7] et [2] ainsi qu'à la contribution [6] de Misha Katz à ce volume.

1. Les structures Spin^c

1.1. Les structures Spin (rappel)

Le groupe $\mathrm{Spin}(k)$ est le revêtement double non trivial du groupe spécial orthogonal $SO(n)$. Si η est un fibré vectoriel de rang k sur une variété W, muni d'une métrique et d'une orientation, on peut considérer le fibré $SO(\eta) \to W$ des repères orthonormés directs, fibré principal de groupe $SO(k)$ associé à η.

Une structure Spin sur η est la donnée d'un revêtement double

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spin}(\eta) & \longrightarrow & SO(\eta) \\ & & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

... quand il en existe, et ceci se produit si et seulement si $w_2(\eta)$, la deuxième classe de Stiefel-Whitney de η, est nulle.

1.2. Le groupe Spin$^c(n)$

C'est le revêtement double de $SO(2) \times SO(n)$ obtenu en tirant en arrière le revêtement $\mathrm{Spin}(n+2) \to SO(n+2)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spin}^c(n) & \longrightarrow & \mathrm{Spin}(n+2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SO(2) \times SO(n) & \longrightarrow & SO(n+2) \end{array} \tag{1}$$

de sorte qu'il est muni d'homomorphismes vers $SO(2) = S^1$ et vers $SO(n)$ qui définissent des suites exactes

$$1 \to \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{Spin}^c(n) \longrightarrow S^1 \to 1$$

et

$$1 \to S^1 \longrightarrow \mathrm{Spin}^c(n) \longrightarrow SO(n) \to 1.$$

1.3. Structures Spin^c sur un fibré ξ

Soit ξ un fibré vectoriel de rang n avec métrique et orientation. Essayons d'imiter le diagramme (1), le fibré ξ va correspondre à $SO(n)$. Il nous manque un analogue de $SO(2)$. Appelons ce groupe $U(1)$: il est clair maintenant que la donnée manquante est celle d'un fibré en droites complexes $L \to W$ avec une métrique hermitienne, grâce à laquelle on n'a plus qu'à recopier le diagramme (1) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spin}^c_L(\xi) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spin}(L \oplus \xi) \arrow[d, "(a)"] \\ S(L) \times_W SO(\xi) \arrow[r] & SO(L \oplus \xi) \end{tikzcd} \tag{2}$$

où $S(L)$ est le fibré unitaire (en cercles) de L. Une structure Spin^c sur ξ sera la donnée d'un revêtement $\mathrm{Spin}^c_L(\xi) \to S(L) \times_W SO(\xi)$ (pour un certain fibré L) faisant commuter le diagramme (2). Pour qu'un tel revêtement existe ... il faut et il suffit que la flèche (a) existe, c'est à dire d'après le § 1.1 que $w_2(L \oplus \xi) = 0$. Comme les fibrés considérés sont tous orientés, on a $w_2(L \oplus \xi) = w_2(L) + w_2(\xi)$ et donc

$$w_2(L \oplus \xi) = 0 \Longleftrightarrow w_2(L) = w_2(\xi),$$

mais $w_2(L)$ est la réduction modulo 2 de la première classe de Chern $c_1(L)$. Pour qu'une structure Spin^c existe, il suffit donc qu'on ait pu trouver un fibré en droites complexes L tel que $w_2(\xi) = \rho_2 c_1(L)$, en d'autres termes, il faut et il suffit que $w_2(\xi) \in H^2(W; \mathbf{Z})$ soit la réduction modulo 2 d'une classe entière.

Remarque. — C'est toujours le cas quand ξ est le fibré tangent d'une variété orientée, grâce aux relations de Wu[1].

Voilà donc une nette supériorité des structures Spin^c sur les structures Spin : il y en a sur toutes les variétés orientées. En plus, il y en a beaucoup, puisque le groupe $H^2(W; \mathbf{Z})$ des fibrés en droites complexes opère sur l'ensemble de ces structures (remplacer L par $L \otimes D^2$ dans le diagramme (2)).

[1] Celles-ci expriment le fait que le fibré tangent d'une variété n'est pas n'importe quel fibré vectoriel. Pour toute la topologie algébrique de base utilisée ici, voir par exemple [8].

1.4. Les connexions

Une connexion unitaire A sur L et une connexion métrique sur ξ (si ξ est le fibré tangent d'une variété riemannienne, la connexion de Levi-Civitá fera l'affaire) définissent ensemble une connexion sur $S(L)\times_W SO(\xi)$ et donc aussi sur son revêtement double $\mathrm{Spin}^c_L(\xi)$.

1.5. Les fibrés de spineurs, cas de la dimension 4

Comme $SO(4) \cong (SU(2) \times SU(2)) / \{\pm 1\}$,

$$\mathrm{Spin}^c(4) \cong \big(S^1 \times SU(2) \times SU(2)\big) / \{\pm 1\}$$

et $\mathrm{Spin}^c(4)$ a deux représentations $s_\pm$ évidentes mais non équivalentes dans $\mathbf{C}^2$: on l'envoie dans

$$U(2) \cong \big(S^1 \times SU(2)\big) / \{\pm 1\}$$

en choisissant l'un ou l'autre facteur $SU(2)$. C'est relié à la décomposition en 2-formes de $\mathbf{R}^4$ auto-duales et anti-auto-duales

$$\Lambda^2 \mathbf{R}^4 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

(qui fournit deux représentations $\lambda_\pm$ de $SO(4)$ dans $\mathbf{R}^3$) par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & SO(4) \arrow[d, "\lambda_\pm"] \\
\mathrm{Spin}^c(4) \arrow[urr] \arrow[r, "s_\pm"'] & U(2) \arrow[r] & SO(3)
\end{tikzcd}$$

(dans lequel l'application $U(2) \to SO(3)$ est le quotient par le centre).

On en déduit deux fibrés vectoriels complexes de rang 2 sur W, qu'on note S_+ et S_-, associés au fibré principal $\mathrm{Spin}^c_L(\xi)$.

2. Cas des variétés presque complexes et symplectiques

2.1. Cas d'un fibré vectoriel complexe

Plaçons-nous d'abord au niveau des groupes, en considérant l'application

$$\begin{array}{ccc} U(n) & \xrightarrow{\ \varphi\ } & S^1 \times SO(2n) \\ A & \longmapsto & (\mathrm{d\acute{e}t}(A), A_{\mathbf{R}}) \end{array}$$

($A_{\mathbf{R}}$ désignant évidemment l'application linéaire $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ vue comme endomorphisme de $\mathbf{R}^{2n}$). La composition avec la flèche vers $SO(n+2)$ est triviale au niveau des groupes fondamentaux

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(U(n)) & \longrightarrow & \pi_1(S^1 \times SO(2n)) & \longrightarrow & \pi_1(SO(2n+2)) \\
\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2 \\
a & \longmapsto & (a, \rho_2 a) & & \\
 & & (a, b) & \longmapsto & \rho_2 a + b
\end{array}$$

de sorte qu'on a un relèvement :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Spin}^c(2n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spin}(2n+2) \arrow[d] \\
U(n) \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & S^1 \times SO(2n) \arrow[r] & SO(2n+2)
\end{tikzcd}$$

Supposons maintenant que ξ soit un fibré vectoriel complexe : il possède donc une structure Spin^c meilleure que toutes les autres, celle obtenue pour $L = \mathrm{dét}(\xi)$.

2.2. Les variétés presque complexes

Une variété presque complexe est une variété dont le fibré tangent est muni d'une structure de fibré vectoriel complexe. C'est dire qu'on a un champ d'endomorphismes

$$J_x : T_x W \longrightarrow T_x W \text{ tel que } J_x^2 = -\mathrm{Id} \quad \forall x \in W.$$

Toute structure presque complexe sur une variété lui donne une structure Spin^c.

2.3. Le cas des variétés symplectiques

Une variété symplectique est une variété munie d'une 2-forme non dégénérée et fermée. Comme elle porte une forme non dégénérée, la variété W considérée est de dimension paire, disons $2n$, et son groupe structurel est le groupe symplectique $Sp(2n;\mathbf{R})$. Ce dernier a $U(n)$ comme composante compacte. Du point de vue de la variété W, c'est dire que la 2-forme non dégénérée ω possède une famille contractile de structures presque complexes adaptées, c'est à dire de J telles que :

$$(X, Y) \longmapsto \omega(X, JY)$$

soit une métrique riemannienne sur W (pour ces notions et des démonstrations de ce fait bien classique, voir par exemple [1]).

Toutes ces structures presque complexes adaptées définissent des fibrés déterminants isomorphes et en particulier, toute variété symplectique possède donc une structure Spin^c naturelle... et beaucoup d'autres en faisant opérer le groupe $H^2(W;\mathbf{Z})$ comme au § 1.3.

2.4. Formes non dégénérées fermées en dimension 4

Dans ce dernier paragraphe, je vais utiliser un peu plus de notions : multiplication de Clifford et opérateur de Dirac notamment, pour lesquelles je renvoie à la littérature classique [4] par exemple.

La topologie symplectique utilise de façon essentielle, depuis l'article [5] de Gromov, les structures presque complexes adaptées aux formes symplectiques et les courbes "holomorphes" associées (voir [3]).

Fixons une structure presque complexe J sur la variété X, adaptée à la 2-forme non-dégénérée ω. Une application u définie sur une surface de Riemann Σ dont la structure complexe est notée j est dite J-holomorphe (ou pseudo-holomorphe, ou holomorphe) si son application tangente est linéaire sur $\mathbf{C}$ au sens où

$$T_z u(j\zeta) = J \circ T_z u(\zeta) \quad \forall z \in \Sigma \quad \forall \zeta \in T_z\Sigma.$$

Un point peu évident pour un néophyte est de comprendre ce qu'ajoute l'hypothèse, que nous avons négligée jusqu'à maintenant : une forme symplectique est une 2-forme-non dégénérée *fermée*. Elle se traduit par des majorations d'aire pour les courbes holomorphes en question (voir encore [3]).

Le cadre décrit ici est particulièrement bien adapté *a priori* à la géométrie symplectique en dimension 4 puisqu'il fournit une caractérisation infinitésimale (*i.e.* de même nature que l'équation $d\omega = 0$) des structures Spin^c associées à des formes symplectiques.

Terminons par citer le lemme qui décrit cette propriété. Considérons donc une variété W de dimension 4 munie d'une structure presque complexe J et d'une 2-forme non dégénérée ω, J étant adaptée à ω. Utilisons la métrique riemannienne définie par J et ω sur W et sa connexion de Levi-Civitá. Il est d'usage d'appeler, comme en géométrie analytique, K^{-1} le fibré déterminant d'une variété presque complexe : $K^{-1} = \Lambda^n(TW, J)$. D'autre part, la structure presque complexe définit une décomposition des formes en types et les fibrés de spineurs s'écrivent alors :

$$S_+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda 0, 2 = \mathbf{1} \oplus K^{-1} \text{ et } S_- = \Lambda^{0,1},$$

la décomposition de S^+ étant donnée par ω : les deux facteurs sont les sous-espaces propres pour les valeurs propres $-i$ et i de la multiplication de Clifford par ω.

De plus, si A est une connexion unitaire sur K^{-1}, elle définit avec la connexion de Levi-Civitá une connexion $\widetilde{A}$ sur le fibré Spin^c, comme on a dit au § 1.4 et $(1 + i\omega)\widetilde{A}$ est une connexion sur le fibré trivial $\mathbf{1} \subset S^+$.

2.4.1 LEMME. — *Il existe une et une seule connexion unitaire A sur K^{-1} telle que la connexion $(1 + i\omega)A$ soit la connexion triviale d et admette une section u parallèle.*

La forme ω est fermée si et seulement si u est un spineur harmonique, c'est à dire si et seulement si $D_{\widetilde{A}} u = 0$.

Remarque. — Si (W, J, ω) était une variété kählérienne, u serait une section parallèle pour $\widetilde{A}$.

L'équation $D_{\tilde{A}}u = 0$ est la première des équations de Seiberg-Witten (voir [6]). Le couple (A, u) vérifie aussi une forme modifiée de la deuxième. En d'autres termes, pour une forme symplectique, on a automatiquement une solution "triviale" de ces équations.

Bibliographie

[1] M. AUDIN, *Symplectic and almost complex manifolds*, in [3].

[2] M. AUDIN, *Du nouveau en dimension* 4, Gazette des Mathématiciens **64** (1995), 43–55.

[3] M. AUDIN, J. LAFONTAINE, EDS, *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Math. 117, Birkhäuser, 1994.

[4] *Géométrie riemannienne en dimension* 4, Séminaire Arthur Besse, Cédic, Paris, 1981.

[5] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.

[6] M. KATZ, *A proof via the Seiberg-Witten moduli space of Donaldson's theorem on smooth 4-manifolds with definite intersection forms*, ce volume.

[7] D. KOTSCHICK, *Gauge theory is dead! —Long live gauge theory*, Notices of the Amer. Math. Soc. **42** (1995), 335–338.

[8] J. MILNOR, *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.

[9] S. OCHANINE, *Signature modulo* 16, *invariants de Kervaire généralisés et nombres caractéristiques dans la K-théorie réelle*, Mémoires de la Soc. Math. France **5** (1981).

[10] C. H. TAUBES, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Letters **1** (1994), 809–822.

[11] C. H. TAUBES, *More constraints on symplectic manifolds from Seiberg-Witten equations*, Math. Res. Letters **2** (1995), 9–14.

[12] C. H. TAUBES, *The Seiberg-Witten and the Gromov Invariants*, preprint (1995).

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7 rue René-Descartes
F–67084 Strasbourg Cedex
maudin@math.u-strasbg.fr