

LA GENÈSE DU THÉORÈME DE RECOUVREMENT DE BOREL

BERNARD MAUREY & JEAN-PIERRE TACCHI

RÉSUMÉ. — Nous nous proposons de rendre à Émile Borel le mérite d'avoir considéré le premier un recouvrement d'un segment de droite par une suite infinie d'intervalles et prouvé que l'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. L'appellation de *théorème de Heine-Borel* souvent donnée à ce résultat, en référence à un article de Heine de 1872, conduit à sous-estimer les différences avec le théorème sur la continuité uniforme (dont une première version peut être attribuée à Dirichlet, en 1854) ; cette dénomination nous paraît ainsi inadéquate. En replaçant le théorème de recouvrement dans le cadre de la thèse où il figure, en 1894, nous rappelons qu'en l'introduisant, Borel jette en fait les bases d'une nouvelle théorie de la mesure.

Texte reçu le 27 juillet 2004, révisé le 10 juin 2005.

B. MAUREY, Université Paris 7, UFR de Mathématiques, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 (France).

Courrier électronique : maurey@math.jussieu.fr

J.-P. TACCHI, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), case 189 – Combinatoire, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 (France).

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A60, 54-03, 54D30, 28-03, 28A05, 26-03.

Mots clés : Thèse de Borel, théorème de recouvrement, théorème de Heine, continuité uniforme, mesure et topologie, Émile Borel, Dirichlet, Lebesgue.

Key words and phrases. — Borel's thesis, covering theorem, Heine's theorem, uniform continuity, measure and topology, Émile Borel, Dirichlet, Lebesgue.

Ce texte développe un exposé donné au séminaire d'histoire des mathématiques Cologne-Nancy, tenu à l'université de Nancy 2 le 19 décembre 2003.

ABSTRACT (The Genesis of Borel's Covering Theorem). — We intend to show that Émile Borel was indeed the first to consider a covering of a straight line segment by an infinite sequence of intervals, and to prove that a finite sub-covering can be extracted from it. The name *Heine-Borel theorem*, often given to this result by reference to Heine's article from 1872, leads to an underestimation of the differences between this theorem and that on uniform continuity (a first version of which can be attributed to Dirichlet in 1854); this name thus seems inappropriate. We recast the covering theorem in the context of Borel's thesis, where it appeared, in 1894, and we recall that when Borel proved this result, he actually laid the foundations for a new theory of measure.

1. INTRODUCTION

Le *théorème de recouvrement de Borel* est, à coup sûr, l'un des théorèmes fondamentaux de l'analyse moderne ; sous sa forme d'origine, donnée par Borel en 1894, il s'agit de l'énoncé suivant :

De tout recouvrement de l'intervalle $[0, 1]$ par une suite d'intervalles ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Au delà de cet énoncé particulier, l'extraction de sous-recouvrements finis est devenue la méthodologie fondamentale de la théorie générale de la compacité, dont l'un des points culminants a été le théorème de Tychonoff [1930], sur lequel nous reviendrons dans la conclusion de cet article. Mais nous rappellerons surtout que ce théorème de recouvrement est étroitement lié aux premiers développements par Borel de la théorie moderne de la mesure. Ce faisant, nous n'avancions pas une idée originale : Borel lui-même a souligné ce point très clairement (voir la *Notice* sur ses travaux [Borel 1912b], par exemple p. 121 et p. 134). L'étude de ce mouvement vers la théorie de la mesure est un des fils conducteurs de cet article.

On donne souvent au théorème de recouvrement le nom de *théorème de Heine-Borel*, notamment dans les pays anglo-saxons ; ceci nous conduit à rechercher les racines plus lointaines du résultat. L'histoire du théorème de Borel a déjà suscité plusieurs articles, parmi lesquels [Hildebrandt 1926] et [Dugac 1989]. Nous nous intéresserons naturellement au « rapport Schönflies » [1900] ; l'auteur est le premier qui a relevé une analogie entre la preuve de l'uniforme continuité et celle du théorème de recouvrement de Borel, et inscrit noir sur blanc cette association

« Heine-Borel ». La discussion de cette appellation est un autre fil conducteur ; nous mentionnerons diverses preuves du théorème de recouvrement, apparues entre 1895 et 1905, et nous verrons que certaines d'entre elles sont les héritières des résultats des années 1870–1880, l'époque où apparaissent les premières preuves rigoureuses dans la théorie des fonctions de variable réelle.

Décrivons plus en détail l'organisation de l'article : nous commençons par rappeler dans la section 2 la première démonstration par Borel du théorème de recouvrement, en la replaçant dans le cadre – la thèse de 1894 – où elle fut produite ; nous donnons ensuite, dans la section 3, la preuve par Pierre Cousin d'un résultat très voisin. Cette preuve de Cousin est apparue au même moment que celle de Borel, et elle est restée l'une des façons classiques de démontrer le théorème de recouvrement, mais sans que le nom de Cousin lui soit associé. En fait, la thèse de Cousin est un jalon important de la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, et c'est là que Cousin a laissé son nom.

La section 4 est consacrée à l'appellation Heine-Borel du théorème ; nous revenons par conséquent à l'article de Heine [1872] et à son environnement historique ; nous remontons aussi à Dirichlet, suivant ainsi l'idée avancée par Pierre Dugac [1989], qui a vu chez celui-ci les prémices du théorème de recouvrement de Borel. Pour évaluer cette position, nous rappelons dans la section 5 cette preuve de Dirichlet [1854/1904], considérée comme la preuve originelle du théorème sur la continuité uniforme, et nous expliquons pourquoi nous trouvons exagérée la position de Dugac ; pour que le lecteur puisse juger par lui-même, nous donnons en annexe une traduction de l'intégralité de cette preuve. Dans la section 5, nous présentons aussi l'essentiel de la preuve de Heine ; on pourra constater qu'elle est très proche de celle de Dirichlet.

La section 6 est consacrée aux travaux de la période qui s'étend entre l'article de Heine [1872] et la thèse de Borel ; nous mentionnons en particulier Lüroth [1873] et Pincherle [1882], qui ont établi des résultats ayant une certaine parenté avec le théorème de recouvrement. La section 7 est consacrée à la théorie de la mesure selon Borel. Nous y rappelons comment Borel parvient rapidement, en 1898, à la conception de la théorie moderne de la mesure, mais en laisse ensuite le développement à Lebesgue. Cette situation délicate a provoqué des frictions entre

Borel et Lebesgue. Elle a contribué à leur brouille définitive, survenue en 1917–1918.

Au-delà de la question de l'appellation *Heine-Borel*, l'objet de cet article est de mettre en évidence la rupture que cette note de Borel, nourrie des travaux de Cantor, provoque dans l'histoire de l'analyse, en annonçant l'irruption de la théorie de la mesure d'une part et, à plus longue échéance, les grands travaux de topologie générale sur la compacité des années 1920–1930 d'autre part.

2. LA THÈSE DE BOREL

La thèse d'Émile Borel, « Sur quelques points de la théorie des fonctions », présentée à la Faculté des sciences de Paris, est soutenue le 14 juin 1894 devant la commission d'examen, ayant pour président Darboux et pour examinateurs Appell et Poincaré ; Borel a alors 23 ans. La thèse paraît ensuite aux *Annales de l'École normale supérieure* [Borel 1895]. L'importance de cette thèse a été soulignée par Hawkins [1970, p. 97–101], dont nous allons reprendre une partie de l'analyse.

La thèse de Borel est consacrée aux fonctions d'une variable complexe ; à cette époque, le principe suivant était bien établi : si une même expression, telle que la formule de Cauchy, ou la somme d'une série de fonctions analytiques, définit une fonction analytique dans deux ouverts connexes disjoints, disons à l'intérieur et à l'extérieur du cercle unité, il faut en général considérer que l'on est en présence de deux fonctions analytiques totalement distinctes ; Weierstrass a développé ce point de vue, par exemple dans un article qui a été traduit en français [Weierstrass 1881, p. 167]. Si g_1 et g_2 sont deux fonctions continues dans le disque unité fermé, holomorphes dans le disque ouvert, sans aucune relation entre elles, l'expression analytique donnée par la formule intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{g_1(w) - g_2(w^{-1})}{w - z} dw$$

appliquée au contour Γ égal au cercle unité, fournit un exemple extrêmement convaincant : en effet, $f(z)$ est défini pour tout z non situé sur le cercle Γ , mais est égal à $g_1(z)$ à l'intérieur du cercle, et à $g_2(z^{-1}) - g_2(0)$

à l'extérieur du cercle, deux résultats totalement étrangers. Une autre classe d'exemples est fournie par les séries de la forme

$$(*) \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\zeta_n - z}$$

où les (ζ_n) sont une suite dense dans le cercle unité, et où la série $\sum |a_n|$ est convergente. Si tous les points du cercle sont des points singuliers pour $f(z)$, alors il faut *certainement* considérer qu'on est en présence de deux fonctions analytiques bien distinctes. Comme Hawkins l'a rappelé, ces exemples de la forme (*) ont été étudiés par Poincaré, dans deux articles sur les *fonctions à espaces lacunaires*; l'exemple qui nous intéresse est déjà dans le premier article [Poincaré 1883], dont il constitue le point essentiel; cet article sera repris et complété quelques années plus tard [Poincaré 1892]; l'exemple (*) y réapparaît p. 203–206.

Borel soutient un point de vue qui va à l'encontre de ce principe établi : il est tout de même possible de trouver, dans certains cas, une relation très forte entre les deux parties de la somme de la série précédente. Pour y parvenir, Borel va présenter ce qui nous semble être l'un des premiers résultats d'existence obtenus par une « méthode probabiliste » (par référence au titre du livre d'Alon et Spencer [1992]). En effet, le ressort de la preuve de Borel est analogue à ce qui se fait de nos jours dans la théorie des graphes aléatoires (voir [Alon & Spencer 1992, chap. 10 et suivants]), ou bien dans la théorie des corps convexes de grande dimension (théorème de Dvoretzky, dans [Pisier 1989, chap. 4, p. 41–59]) : on prouve l'existence d'objets possédant une certaine propriété (P) en montrant que la probabilité pour que (P) ne soit pas satisfaite est < 1 ; mais souvent, on reste incapable de donner un seul exemple *explicite* d'objet possédant cette propriété (P). Bien sûr, on n'avait pas besoin d'attendre 1894 et Borel pour réaliser, par exemple, qu'étant donné un carré de côté 2 et un cercle de rayon 1 de centre quelconque, il existe des points du carré qui ne sont pas dans le cercle, simplement parce que la surface du cercle est plus petite que celle du carré. Mais Borel forge un outil qui sera fondamental en théorie de la mesure et qui s'appliquera dans une situation où il n'y a plus aucune évidence visuelle.

Précisons le problème de prolongement que se pose Borel : la fonction f donnée par la série (*) est définie à l'intérieur U et à l'extérieur V du cercle unité Γ , et f est analytique dans ces deux ouverts U et V ;

le cercle Γ forme une coupure pour les deux fonctions analytiques f_1 et f_2 , définies à l'intérieur et à l'extérieur du cercle par restriction de f à U et à V , c'est-à-dire qu'au voisinage de chaque point de Γ , le prolongement analytique est impossible pour f_1 comme pour f_2 . Borel va montrer que sous la condition plus forte que la série $\sum |a_n|^{1/2}$ converge, il existe des chemins γ (des arcs de cercle), traversant le cercle Γ et tels que la fonction f se prolonge par continuité sur le chemin γ , à travers le cercle de coupure Γ . Il va même montrer qu'il existe une quantité non dénombrable de tels chemins, mais sans qu'un seul de ces chemins ne soit *explicitement* donné.

L'argument est le suivant : pour chaque couple (P, Q) d'un point de U et d'un point de V , Borel introduit un segment $[A, B]$ de longueur ℓ situé sur la médiatrice de PQ ; pour chaque point M de $[A, B]$ on peut tracer un arc de cercle γ passant par P, M, Q ; Borel montre que, sous la condition que la série $\sum |a_n|^{1/2}$ converge, l'ensemble des points M de $[A, B]$ pour lesquels la fonction f ne se prolonge pas le long de γ , peut être enfermé dans une suite de segments (I_n) dont la série des longueurs est strictement inférieure à ℓ . Borel en déduit que ces segments ne sauraient recouvrir le segment $[A, B]$ et qu'il existe donc des points M en lesquels passe un chemin γ de prolongement à travers le cercle de coupure Γ .

Pour établir cette affirmation de manière irréfutable, Borel établit le théorème de recouvrement : si une suite de segments ouverts (I_n) recouvre l'intervalle $[A, B]$, une famille finie d'entre eux suffit à recouvrir $[A, B]$; pour une famille finie il est facile de se convaincre que le recouvrement de l'intervalle n'est possible que si la somme des longueurs des segments est strictement plus grande que la longueur ℓ de l'intervalle.

La note finale de la thèse

Dans une note aux *Comptes rendus* du 12 février 1894, qui annonce les résultats de sa thèse, Borel ne cite pas le théorème de recouvrement, mais il tient à donner, dans ce résumé de trois pages, l'énoncé suivant :

« [...] si, dans un intervalle donné sur une droite, on a une infinité d'intervalles partiels donnés, dont la somme est inférieure à l'intervalle total, il y a une infinité non dénombrable de points de la droite qui n'appartiennent à aucun des intervalles partiels » [Borel 1894, p. 342].

Il s'agit bien d'un premier principe de la théorie moderne de la mesure ; nous reviendrons sur ce point dans la section 7, que nous consacrons à la théorie de la mesure selon Borel. Celui-ci développe la preuve de ce principe dans une note finale de sa thèse ; il y modifie un peu l'énoncé :

« [...] si l'on a une infinité d'intervalles partiels donnés sur une droite, dont la somme est inférieure à un intervalle total également donné, il existe au moins un point de l'intervalle total n'appartenant à aucun des intervalles partiels » [Borel 1895, p. 50–51].

Comme l'affirmation est évidente quand la famille des « intervalles partiels » est *finie*, le théorème de recouvrement est bien l'outil qu'il faut :

« Si l'on a sur une droite une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, on peut déterminer effectivement un NOMBRE LIMITÉ d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux) » [*ibid.*, p. 51].

Borel entend ici par *droite* un segment fermé $[A, B]$. Remarquons qu'il se place explicitement dans le cas où la famille d'intervalles qui recouvre $[A, B]$ est *dénombrable* :

« Partons d'une extrémité A de la droite, soit $A_i B_i$ un des intervalles qui comprennent le point A ; soit de même $A_{i_1} B_{i_1}$ un des intervalles qui comprennent le point B_i , $A_{i_2} B_{i_2}$ un des intervalles qui comprennent le point B_{i_1} , etc. Nous supposons, bien entendu, que A désigne toujours l'extrémité gauche des intervalles, B l'extrémité droite. Les points $B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots$, s'ils n'atteignent pas l'extrémité B de la droite, ont une limite B_{i_ω} et ce point est compris dans un intervalle $A_{i_{\omega+1}} B_{i_{\omega+1}}$ tel que $A_{i_{\omega+1}}$ tombe, par exemple, entre $B_{i_{m-1}}$ et B_{i_m} ; nous pourrions alors ne pas tenir compte des intervalles $A_{i_{m+k}} B_{i_{m+k}}$, et nous aurons tout de même une suite ininterrompue d'intervalles sur la droite » [*ibid.*, p. 51–52].

Le symbole ω désigne le premier ordinal infini de Cantor ; l'argument de « petit pas en arrière » que vient de donner Borel, qui ramène de B_{i_ω} à $A_{i_{\omega+1}} < B_{i_\omega}$, est sans doute l'invention cruciale de la preuve. Un peu plus loin, Borel insiste sur ce point :

« On voit que le principe de la démonstration repose sur ce que $A_{i_{\omega+1}}$ est nécessairement à gauche de B_{i_ω} et ne peut pas coïncider avec B_{i_ω} , ce qu'on ne pourrait affirmer si le mot *intérieur* s'étendait aux extrémités ; il est d'ailleurs facile de voir directement que le théorème n'est pas vrai dans ce cas » [*ibid.*, p. 52].

Comme on le voit, si la famille d'intervalles couvrant $[0, 1]$ est formée, d'une part, des intervalles ouverts $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}), (\frac{5}{16}, \frac{7}{16}), \dots, (\frac{1}{2} - 3 \cdot 2^{-n-2}, \frac{1}{2} - 2^{-n-2}), \dots$, dont les extrémités droites croissent vers $\frac{1}{2}$

et, d'autre part, de l'intervalle *fermé* $[\frac{1}{2}, 1]$, alors on a $B_{i_\omega} = \frac{1}{2}$, mais aucun *recul* n'est possible pour venir se raccrocher à un nombre fini des premiers intervalles. Reprenons le cours de la preuve :

« Nous continuerons de même, en passant à la limite lorsque cela sera nécessaire et montrant alors qu'on peut conserver seulement un nombre fini des intervalles déjà considérés. Je dis que nous atteindrons nécessairement l'extrémité B de la droite, car, si on ne l'atteignait pas, on définirait une série d'intervalles ayant pour extrémités

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_\omega}, B_{i_{2\omega}}, \dots, B_{i_{\omega^2}}, \dots, B_{i_{\omega^\omega}}, \dots,$$

les indices étant *tous* les nombres de la seconde classe de nombres (définis par M. Cantor) » [*ibid.*, p. 52].

On ne saurait mieux faire passer en une seule ligne de symboles le message : *je suis un adepte de la théorie de Cantor*; on sait que Borel va s'éloigner progressivement des méthodes cantorienne. Il s'est expliqué sur son évolution dans sa *Notice* [Borel 1912b, p. 120]. L'article d'Hélène Gispert [1995] montre comment les notions de la théorie des ensembles de Cantor font leur chemin en France pendant les années 1885–1905, jusqu'à un certain point toutefois. En 1894, Borel conclut la preuve du théorème de recouvrement par un argument cantorien qu'il ne voudra bientôt plus admettre :

« Mais ces indices sont aussi dans un certain ordre, les nombres naturels, en tout ou en partie. C'est là une contradiction puisque la seconde classe de nombres constitue un ensemble de seconde puissance » [Borel 1895, p. 52].

Ainsi, dans cette première preuve du théorème de recouvrement, Borel s'appuie fortement sur le principe de récurrence transfinitie introduit par Cantor : ce principe autorise Borel, au cas où le point B ne serait pas atteint, à considérer une suite généralisée d'entiers $i_\alpha \in \mathbb{N}$, indexée par *tous* les ordinaux dénombrables $\alpha < \Omega_1$; de plus, la construction produirait des indices entiers i_α *distincts*, ce qui est impossible pour une raison de cardinalité, elle aussi due à Cantor, et que Borel vient d'invoquer ci-dessus.

Si de tels arguments ordinaux seront utilisés très librement au xx^e siècle par nombre de mathématiciens, surtout après que la mise en place des axiomes de la théorie des ensembles leur aura assuré une « base juridique », ils donnaient lieu à la fin du xix^e à bien des controverses. Schönflies, en 1900, quand il reproduit la preuve de Borel dans son « Rapport sur la théorie des ensembles », explicite longuement un argument ordinal un peu différent de celui de Borel ; Lebesgue [1904, p. 104–105]

contourne la difficulté en reformulant la preuve dans le langage de la borne supérieure. En réalité Schönflies [1900, p. 51–52] modifie quelque peu l'argument ordinal de Borel, afin d'obtenir *l'énoncé généralisé*, qui s'applique à un recouvrement par une famille d'ouverts non nécessairement dénombrable. Les revendications de paternité de cette généralisation ont été l'occasion de quelques polémiques entre Schönflies, Young et Lebesgue, qu'on pourra reconstruire en partant de l'une des dernières pièces du dossier, un article de Schönflies [1913]. Borel a pris la peine d'écrire ce qui suit :

« Il semble d'ailleurs que l'on ait cru parfois que j'avais donné l'énoncé généralisé dû à M. Lebesgue, c'est-à-dire que l'on n'ait pas pris garde que mes deux démonstrations [...] supposent [...] la dénombrabilité de l'ensemble des intervalles donnés. Je suis heureux que l'occasion me soit offerte de signaler la part qui est due à M. Lebesgue dans le théorème généralisé et ses applications » [Borel 1905, p. 299].

Il est d'autant plus étonnant que Borel utilise l'énumération transfinie dans sa thèse, qu'il semblait connaître une démonstration par l'énumération des nombres entiers, ainsi que le montre la rapide esquisse de la conclusion *ad absurdum*, au début de la note :

« On pourrait démontrer directement que tout point de la droite est nécessairement à l'intérieur d'un intervalle de rang limité (en supposant les intervalles numérotés suivant une loi quelconque), mais la démonstration suivante paraît être davantage dans la nature des choses » [Borel 1895, p. 51].

Cette preuve directe évoquée par Borel est peut-être celle qu'il développera dans les *Leçons sur la théorie des fonctions*, où il abandonne l'argument ordinal [Borel 1898, p. 42–43]. Borel conclut sa note en affirmant, non sans hardiesse, que sa démonstration est une construction effective de la suite finie d'intervalles recouvrant le segment $[A, B]$:

« Ainsi on arrivera nécessairement, en employant le procédé régulier indiqué, à déterminer effectivement un nombre fini d'intervalles qui recouvriront toute la droite » [*ibid.*, p. 52].

L'appréciation de cette preuve par l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, sous la plume d'Artur Rosenthal [1923-27], ne pose cependant aucune restriction quant au caractère constructif de la preuve originelle :

« La démonstration initiale donne dans une certaine mesure le moyen de construire les intervalles en nombre fini dont il est question. Elle a été reprise par É. Borel¹ sous une forme plus rapide qui n'a pas cet avantage » [Rosenthal 1923-27, p. 882–883].

¹ É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris 1898, p. 42. (Note de Rosenthal reprise d'une note de Zorretti.)

En réalité, cette appréciation n'est pas le jugement indépendant des collègues allemands sur la preuve de Borel : cette partie de l'*Encyklopädie* provient d'une section de l'édition française de l'*Encyclopédie*, qui a été publiée d'abord en français en 1912 ; il s'agit d'un fascicule intitulé « Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions », publié sous la direction de Borel et contenant trois articles de Zoretti, Montel et Fréchet. Les lignes précédentes proviennent de l'article de Zoretti [1912, p. 128]. Les trois articles ont été traduits en allemand, mis à jour et remaniés (*bearbeitet*) par Rosenthal en 1923 pour l'édition allemande de 1923–1927.

3. LE LEMME DE COUSIN

Quelques jours avant la thèse de Borel, au même endroit, avec les mêmes rapporteurs, Pierre Cousin présente le 8 juin 1894 sa thèse « Sur les fonctions de n variables complexes » à la Faculté des sciences de Paris, devant la commission d'examen ayant pour président Darboux et pour examinateurs Appell, Poincaré. La thèse est ensuite publiée dans *Acta Mathematica* [Cousin 1895] ; cet article est signé par son auteur « Caen, 28 octobre 1893 », ce qui nous permet de dater au plus près le travail de Cousin. On y trouve le résultat de « compacité » suivant :

« 10. LEMME. — Soit, sur le plan YOX , une aire connexe S limitée par un contour fermé simple ou complexe ; on suppose qu'à chaque point de S ou de son périmètre correspond un cercle, de rayon non nul, ayant ce point pour centre : il est alors toujours possible de subdiviser S en régions, en nombre fini et assez petites pour que chacune d'elles soit complètement intérieure au cercle correspondant à un point convenablement choisi dans S ou sur son périmètre » [Cousin 1895, p. 22].

L'énoncé de Cousin n'est pas à proprement parler un résultat d'existence de sous-recouvrements finis ; il est cependant très facile d'en déduire une preuve directe du théorème de recouvrement. Nous le montrons en appliquant dans le cas d'un intervalle borné $[A, B]$ le raisonnement de Cousin qui suit :

« Supposons, en effet, le lemme en défaut : partageons S en carrés au moyen de parallèles aux axes de coordonnées, de façon que le nombre des régions obtenues soit au moins égal à un certain entier n ; il y a au moins l'une de ces régions, S_1 , pour laquelle le lemme est encore en défaut.

Subdivisant S_1 en carrés et portions de carrés en nombre au moins égal à n , j'en déduis S_2 , de la même façon que S_1 se déduit de S ; en poursuivant le raisonnement, j'arrive à une suite indéfinie de carrés ou portions de carrés, $S_1, S_2, \dots, S_p, \dots$; il est clair que S_p , pour p augmentant indéfiniment, a pour

limite un point M intérieur à S ou sur son périmètre ; on arrive à cette conclusion que l'on peut trouver un carré S_p aussi petit que l'on veut entourant M ou attaché à M et qui ne soit pas contenu à l'intérieur d'un des cercles de l'énoncé ; or cela est impossible puisqu'au point M correspond un cercle de rayon non nul ayant ce point pour centre » [Cousin 1895, p. 22].

Donnons-nous un recouvrement de $[A, B]$ par une famille d'intervalles ouverts, et faisons l'hypothèse (\mathcal{H}) qu'il n'existe pas de nombre entier k tel qu'on puisse recouvrir $[A, B]$ avec k intervalles extraits du recouvrement donné. Divisons le segment $S = [A, B]$ en deux segments égaux. L'hypothèse (\mathcal{H}) se transmet à l'un de ces deux segments, S_1 , pour lequel il n'existe toujours pas d'entier k tel que k intervalles suffisent à le recouvrir. Divisons à son tour la région S_1 en deux segments égaux : l'un au moins de ces deux segments, S_2 , vérifie encore l'hypothèse (\mathcal{H}) . En poursuivant ainsi on définit une suite d'intervalles fermés emboîtés (S_p) , chacun vérifiant (\mathcal{H}) , dont la longueur tend vers zéro et dont l'intersection définit donc un point M . Ce point M est recouvert par au moins un intervalle ouvert I de la famille originellement donnée ; mais cet intervalle I recouvre aussi toutes les régions $(S_p)_{p > p_0}$ dont l'indice p est assez grand, en contradiction avec le fait que ces régions, qui ont hérité de l'hypothèse (\mathcal{H}) , ne peuvent pas être recouvertes par une famille finie d'intervalles originaux. Nous obtenons ainsi la preuve par dichotomie du théorème de Borel, à partir de la preuve de Cousin ; cette preuve par dichotomie sera adoptée par Borel dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions* [Borel 1898, p. 42–43] ; on peut encore la trouver dans bon nombre de traités actuels.

On peut faire deux remarques sur cette démonstration de Cousin. Quand on parle du théorème de recouvrement dans les manuels de topologie, le nom de Cousin n'y est jamais associé, bien qu'on utilise encore souvent une preuve très voisine de la sienne ; peut-être Borel en a-t-il effacé la trace en reprenant l'idée de la preuve dans ses *Leçons*. Même dans les traités historiques, on parle peu de ce lemme de Cousin : Hawkins [1970] ne cite pas le nom de Cousin, qui est cependant cité par Dugac [1989]. Enfin, bien que Cousin énonce et démontre en même temps que Borel le théorème de recouvrement, il ne pose pas pour autant les premiers éléments de la théorie de la mesure ; les intérêts de Cousin sont bien différents : il écrit l'un des articles fondamentaux de la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes. Dans la section

qui contient ce lemme, Cousin étudie une question qui est à peu de chose près la suivante : si pour tout point x d'un domaine D de \mathbb{C}^n on se donne une boule $B_x \subset D$ centrée en x et une fonction f_x méromorphe² dans cette boule B_x , à quelle condition existe-t-il une fonction F , méromorphe dans D , dont la restriction à chaque boule B_x soit équivalente à la donnée f_x , c'est-à-dire que $F - f_x$ se prolonge en une fonction holomorphe dans B_x ? Il est évidemment nécessaire de supposer que f_x et f_y sont équivalentes dans l'intersection de B_x et B_y , quand elle est non vide. Cousin montre que cette condition est aussi suffisante pour une certaine classe de domaines D . Le lemme de recouvrement est utilisé seulement comme outil pour gérer ces familles de boules : il est crucial pour Cousin de pouvoir se limiter à une famille finie de données $(B_{x_j}), (f_{x_j})$, afin de se ramener au théorème préliminaire qu'il a établi pour une famille finie de boules, et qui constitue le cœur de sa solution.

Le nom de Cousin est resté attaché à cette question. Les résultats de sa thèse occupent une quinzaine de pages du livre d'Osgood [1924] ; les travaux allemands des années 1920–1930 et les recensions du *Jahrbuch* mentionnent « *der bekannte Cousinsche Satz* », ou « *der klassische Cousinsche Satz* ». Dans les années 1930, à l'époque où les variétés analytiques sont développées, un changement de langage assure de façon durable le passage de Cousin à la postérité : Henri Cartan [1934] parle des deux *problèmes de Cousin* ; cette terminologie est reprise depuis, dans tous les traités sur les fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes et dans des centaines d'articles sur le sujet³.

² Cousin dit : *fonction monotrope sans espace lacunaire*, mais les successeurs diront *fonction méromorphe*.

³ En revanche, la vie de Cousin est moins connue. On peut trouver quelques informations dans le recueil de l'association des anciens élèves de l'École normale supérieure pour l'année 1934. Né à Paris le 18 mars 1867, Pierre Cousin entre à l'École normale en 1886 ; pendant qu'il prépare sa thèse, il est professeur au lycée de Caen. Après sa thèse en 1894, il est nommé maître de conférences à Grenoble, puis à Bordeaux où il devient professeur en 1902 ; la famille de Cousin était justement originaire de Bordeaux et il y restera en poste jusqu'à sa mort. Il a publié une dizaine d'articles, le dernier en 1910 dans *Acta Mathematica*, volume 33, un long mémoire de 128 pages sur les fonctions triplement périodiques de deux variables. De 1924 à 1930, il est doyen de la faculté des sciences de Bordeaux. Il meurt à Arcachon le 18 janvier 1933. Il semble que dans son dernier tiers, la vie de Cousin a plus été celle d'un notable de Bordeaux que la vie d'un mathématicien jouant un rôle scientifique national.

La preuve de Darboux

Notre transcription de la preuve de Cousin la rapproche de celle qu'a écrite Gaston Darboux [1875] dans son fameux article consacré à l'intégrale de Riemann. Darboux est à cette époque, par la place qu'il occupe dans l'Université et par son domaine d'étude, celui qui donne l'écho de ce qui se fait en analyse à cette époque en Allemagne. On peut imaginer que Cousin avait étudié soigneusement cet important article et, particulièrement, cette preuve de l'uniforme continuité. On pourra remarquer que Darboux [1875, p. 62], s'il a auparavant crédité Cauchy du théorème des valeurs intermédiaires, ne le mentionne pas à propos de l'intégrabilité des fonctions continues :

« Les fonctions continues sont toujours susceptibles d'intégration ; cela résulte du théorème suivant :

THÉORÈME III. — Étant donnée une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $[a, b]$, on peut assigner, pour chaque valeur de σ , aussi petite qu'on le veut, une quantité δ telle, que si l'on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en intervalles tous plus petits que δ , les oscillations de la fonction dans ces intervalles soient toutes plus petites que σ .

Ce théorème se trouve dans l'ouvrage de M. Thomae, *Abriss einer Theorie der complexen Functionen*, Halle, 1873 » [Darboux 1875, p. 73].

Darboux souligne le fait que la preuve qu'il va présenter est originale. En effet, les premières preuves parues, dues à Heine [1872] et Thomae [1873], utilisent très fortement la structure ordonnée des intervalles. Mais Lüroth [1873] a déjà publié une preuve multi-dimensionnelle que Darboux ne semble pas connaître :

« La démonstration nouvelle que nous en donnons offre l'avantage de s'appliquer aux fonctions de plusieurs variables.

Divisons l'intervalle $[a, b]$ en intervalles $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, puis chacun de ceux-ci en intervalles plus petits, et ainsi de suite. Je dis qu'on finira par obtenir un système d'intervalles dans lequel les oscillations seront plus petites que $\frac{1}{2}\sigma$. En effet, s'il n'en est pas ainsi, comme les oscillations diminuent ou restent constantes quand on subdivise les intervalles, on ne pourra obtenir que le résultat suivant :

Dans un intervalle δ_i pour lequel l'oscillation est plus grande que $\frac{\sigma}{2}$, il y aura au moins un nouvel intervalle δ' dans lequel l'oscillation sera supérieure à $\frac{\sigma}{2}$, puis dans celui-ci au moins un nouvel intervalle pour lequel l'oscillation sera encore supérieure à $\frac{\sigma}{2}$, et ainsi de suite. On aura une suite illimitée d'intervalles, tous compris les uns dans les autres et tendant vers zéro, pour lesquels l'oscillation demeurera supérieure à $\frac{\sigma}{2}$. Les limites inférieures et supérieures de ces intervalles étant, les unes croissantes ou constantes, les autres décroissantes ou constantes, et l'intervalle tendant vers zéro, ces deux séries de

limites tendront vers une valeur commune ℓ qui aura la propriété suivante : Dans tout intervalle $[\ell - h, \ell + h]$, les oscillations de la fonction seront, quel que soit h , plus grandes que $\frac{\sigma}{2}$. Or cela est impossible si la fonction est continue pour $x = \ell$ [...] Il est donc impossible que, dans quelques-uns des intervalles, l'oscillation demeure supérieure à $\frac{\sigma}{2}$ » [Darboux 1875, p. 73–74].

À partir de là, Darboux peut diviser l'intervalle au moyen de valeurs $a, x_1, \dots, x_{n-1}, b$, en un système *fini* d'intervalles pour lesquels les oscillations sont plus petites que $\frac{\sigma}{2}$. Il en déduit facilement le résultat.

4. LE COUPLAGE HEINE-BOREL

C'est Schönflies qui, dans son « Rapport sur la théorie des ensembles »⁴, que lui a demandé le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, souligne le premier la parenté entre les deux démonstrations, celle de Heine et celle de Borel :

« Afin de donner un dernier exemple, je montrerai la proposition suivante de Borel qui généralise une proposition connue due à Heine [...] »⁵ [Schönflies 1900, p. 51].

Cette première affirmation bien modeste n'aurait sans doute pas suffi à populariser le couplage ; ce n'est que beaucoup plus avant dans l'article que Schönflies va plus loin ; exposant sa propre démonstration de l'uniforme continuité, il franchit le pas et couple les noms de Heine et de Borel :

« On peut considérer cette proposition [d'uniforme continuité de Heine] comme une conséquence immédiate du théorème de Heine-Borel, mentionné p. 51 »⁶ [*ibid.*, p. 119].

Cette appellation se répand rapidement (voir par exemple le titre de l'article de Veblen [1904]). C'est ce couplage que va contester Lebesgue dans la (longue) recension du livre des époux Young [1906], dans lequel les auteurs énoncent le *Heine-Borel Theorem* et le *generalised Heine-Borel Theorem* :

⁴ C'est le « titre courant » de l'article : *Bericht über die Mengenlehre*.

⁵ « Um ein letztes Beispiel zu geben, beweise ich folgenden Satz Borel's, der einen bekannten Satz von Heine erweitert [...] ». Les extraits des textes allemands cités dans cet article ont été traduits en français par nos soins.

⁶ « Dieser Satz kann übrigens auch als eine unmittelbare Folge des S. 51 erwähnten Heine-Borel'schen Theorems betrachtet werden. »

« Dans son rapport sur la théorie des ensembles (*Jahr. der Deuts. Math. Ver.*, 1900), M. Schœnfliess a rapproché les raisonnements de Heine et de M. Borel ; de là date la dénomination de théorème de Heine-Borel qui me paraît injuste. Le théorème en question n'est pas en effet de ceux dont la démonstration présente de grosses difficultés : il y avait mérite à l'apercevoir, à l'énoncer, à deviner son intérêt, non à le démontrer ; or je doute fort que Heine ait vu le théorème (ce que d'ailleurs M. Schœnfliess n'a jamais semblé prétendre) » [Lebesgue 1907, p. 134].

L'analyste qui voudra se faire sa propre doctrine sur le bien-fondé de ce couplage, pourra penser, en revenant au texte de Heine de 1872, accéder à la preuve originelle de l'uniforme continuité d'une fonction continue. Mais, ainsi qu'on le verra, c'est Dirichlet qui, quinze ans au moins avant Heine, a énoncé et démontré le théorème.

Par ailleurs, nous pouvons noter que les contemporains immédiats de Heine ne le citent pas, quand il s'agit de la *preuve* du théorème sur la continuité uniforme. Thomae, professeur à Halle (comme Heine), écrit un traité sur la théorie des fonctions complexes, dont la deuxième édition paraît en 1873 ; après avoir crédité Heine d'avoir mis en avant la *notion* de continuité uniforme, Thomae écrit sa démonstration de la continuité uniforme, sans faire référence au travail de son collègue. Darboux, comme on l'a vu, cite ce livre de Thomae, où l'exposition du théorème n'est pourtant pas meilleure – loin s'en faut – que celle de Heine. Lüroth [1873] crédite aussi Heine pour avoir posé la question : avant de donner sa généralisation multidimensionnelle du théorème, il mentionne en note de bas de page le livre de Thomae [1873] et l'article de Heine [1872], sans plus préciser le contenu de ces deux références. Quant à Dini [1878, p. 47–48], il attribue le résultat à Cantor ! Ce livre d'analyse de Dini sera traduit en allemand par Lüroth, qui fera beaucoup d'additions de son cru, mais n'ajoutera aucun commentaire sur cette attribution qui nous paraît plutôt originale.

Pour conclure cette discussion, il faut rappeler que Heine [1872] lui-même adopte un profil particulièrement bas dans l'introduction de son article, ne revendiquant d'autre rôle que d'avoir rédigé des principes établis par d'autres. Mais, curieusement, il accorde *presque tout* le mérite à Weierstrass, un peu à Cantor, mais ne cite pas Dirichlet, alors que sa preuve de la continuité uniforme est pour l'essentiel *identique* à celle de ce dernier (transmise, plus tard il est vrai, par Arendt). Bien entendu, le théorème sur la continuité uniforme n'est qu'une des pièces de l'édifice

constitué par cet article de Heine, dont une partie importante consiste à définir les nombres réels. Mais c'est l'aboutissement, la pièce finale de cet article, c'est celle qui sera nommée plus tard *théorème de Heine*, bien que son auteur ne lui accorde pas un statut clairement prépondérant. Le passage qui suit a été relevé aussi par Dugac [2003, p. 150–151] :

« Le progrès de la théorie des fonctions est notablement entravé par le fait que certains de ses éléments sont encore mis en doute, bien qu'ils aient été démontrés par un chercheur pénétrant ; de la sorte, les résultats des recherches qui s'appuient sur ces fondements indispensables ne sont pas partout tenus comme exacts. J'en trouve la raison en ce que les principes de M. Weierstrass, bien qu'ils se soient répandus dans de larges cercles, soit directement par ses cours et autres communications orales, soit indirectement par les rédactions qui ont été faites de ces cours, n'ont jamais fait l'objet d'une édition officielle par l'auteur lui-même ; il n'existe donc pas d'endroit où l'on puisse trouver un développement cohérent de ces propositions » [Heine 1872, p. 172].

Heine nous donne ensuite des informations supplémentaires sur ses sources d'inspiration :

« Ce n'est pas sans scrupules que je publie ce travail, dont la première partie "Sur les nombres", la plus importante, est prête depuis longtemps. Outre la difficulté de présenter une telle matière, j'éprouve une hésitation à publier un article qui ne contient, presque exclusivement, que la transmission de communications verbales d'autres [mathématiciens], principalement de M. Weierstrass. Si bien que ne m'appartient plus guère que la mise en forme, dans laquelle il importe de ne pas laisser la moindre lacune. [...]

Je dois remercier particulièrement M. Cantor, de Halle, pour ses communications orales, qui ont exercé une influence importante sur la conception de mon travail. Je lui ai en effet emprunté l'idée d'introduire les nombres généralisés au moyen de certaines suites, qui seront appelées ici "suites de nombres"⁷ (A, §.1, Déf. 1) » [*ibid.*, p. 172–173].

Dans une note au bas de la page 182, Heine indique qu'il tient de Cantor le fait qu'une fonction f est continue au point X exactement quand $f(x_n)$ tend vers $f(X)$ pour toute suite (x_n) qui tend vers X ; qu'il se limite aux fonctions d'une variable, mais que Cantor montrera qu'une fonction de plusieurs variables est uniformément continue, lorsqu'en chaque point particulier, elle « vérifie certaines conditions » ; il poursuit :

« je connais le cheminement général, selon les principes de M. Weierstrass, de plusieurs des preuves du §3 [consacré aux propriétés des fonctions continues] de sa bouche même, et aussi par MM. Schwarz et Cantor ;

⁷ Le texte allemand dit « *Zahlenreihe* », expression qui ne sera ensuite utilisée par Heine que dans un sens mathématique spécifique qui aura fait l'objet d'une définition : celle de suite de Cauchy (voir *infra*, §5).

de sorte que, s'agissant de ces preuves, seule la mise en forme vient de moi » [*ibid.*, p. 182, note].

Nous donnerons la démonstration de Heine pour le théorème de continuité uniforme à la fin de la section 5.

Le texte de Dirichlet transmis par Arendt

En 1904, un mathématicien allemand, Gustav Arendt, publie un livre⁸ dont il affirme qu'il est la reproduction la plus fidèle possible du cours de Dirichlet :

« Le livre que je propose au public est issu de la rédaction que j'ai faite du cours donné par Dirichlet pendant l'été 1854 à l'Université [de Berlin] sur la théorie des intégrales définies ; j'ai rédigé avec grand soin, le plus souvent le jour même de la conférence, ces leçons dispensées à raison de quatre heures par semaine ; cette rédaction est donc, à un haut degré, fiable et sans lacune.

[...]

Je me suis scrupuleusement efforcé de reproduire le discours de Dirichlet avec une totale exactitude, sans raccourcis ni modifications, et sans faire non plus aucune addition, personnelle ou autre » [Dirichlet 1854/1904, p. V-VI].

Les premières pages du livre contiennent la preuve par Dirichlet du théorème de continuité uniforme. Même si cette source a un caractère indirect, il ne semble pas qu'elle ait été contestée par les commentateurs. Les trois revues, l'une française, les deux autres allemandes, qui se donnaient pour but de recenser les articles et les ouvrages paraissant en mathématiques, ont rendu compte positivement du livre. Le *Bulletin des sciences mathématiques*, sous la signature de Jules Tannery [1904], publie un rapport élogieux, reprenant les termes mêmes dans lesquels Arendt présente son livre. Dans le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Gerhard Kowalewski [1906], qui développe une courte recension parue au *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, précise qu'il possède un cahier de notes prises aux cours de Dirichlet de 1845, dans lequel ni la notion ni la démonstration de l'uniforme continuité ne figurent ; cependant, tout en signalant quelques fautes mineures, il conclut en faisant l'éloge du livre. Si bien que l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* entérine, par le poids de son autorité, le rôle de Dirichlet quant à l'uniforme continuité ; ce passage de la note 86, p. 882, est l'une des adjonctions à l'article de Zoretti [1912] que Rosenthal [1923-27] a rédigées :

⁸ Ce livre, difficile à trouver dans les bibliothèques mathématiques françaises, peut être consulté sur le site de l'université de Cornell ; il en est de même pour le livre de Dini [1878].

« Mentionnons que G. Lejeune-Dirichlet, bien avant Heine, exactement en 1854, avait montré dans ses leçons l'uniformité de la continuité : voir G. Lejeune-Dirichlet, *Leçons sur la théorie des intégrales simples et multiples* publiées par G. Arendt [...]. »

De même, Pierre Dugac [1989], au paragraphe 6, « Dirichlet et la continuité sur un intervalle fermé et borné », écrit :

« C'est Cauchy qui a utilisé le premier, implicitement, la notion de continuité uniforme pour démontrer l'existence de l'intégrale définie pour une fonction continue et Dirichlet sera le premier à découvrir cette lacune et à distinguer la continuité et la continuité uniforme d'une fonction. En effet, G. Arendt publiera en 1904 les *Leçons sur la théorie des intégrales simples et multiples* tirées des notes prises au cours de Dirichlet sur l'intégration en 1852⁹. Ainsi, après avoir donné la définition de la continuité, déjà exprimée par Bolzano et Cauchy, il énonce et démontre la "propriété fondamentale des fonctions continues" » [Dugac 1989, p. 91].

Dugac donne ensuite un résumé de la preuve de Dirichlet (voir aussi son livre récent [2003, p. 116]). Nous donnons en annexe la traduction complète de cette preuve, mais nous allons la présenter ci-dessous sous une forme abrégée, pour que le lecteur puisse en suivre l'idée.

5. LA PREUVE DE DIRICHLET ET L'ARTICLE DE HEINE

Commençons avec l'énoncé par Dirichlet du théorème :

« Soit $y = f(x)$ une fonction de x , continue dans l'intervalle fini qui va de a à b . [...] Il est alors toujours possible de trouver, pour toute quantité positive ρ arbitrairement petite, une deuxième quantité σ [...] qui a la propriété que sur tout sous-intervalle [de longueur] $\leq \sigma$, la fonction y ne varie pas de plus de ρ » [Dirichlet 1854/1904, p. 4].

Notons que Dirichlet, s'il énonce et démontre le théorème sur l'uniforme continuité, ne nomme pas la chose ; ce qui revient incontestablement à Heine. Nous pouvons résumer ainsi les idées essentielles de la preuve.

On part de l'origine a et on se dirige vers b . On appelle c_1 le point en lequel, pour la première fois, la fonction diffère exactement de ρ , en valeur absolue, de sa valeur de départ $f(a)$, de sorte qu'on a $|f(c_1) - f(a)| = \rho$ et $|f(x) - f(a)| \leq \rho$ pour tout x entre a et c_1 .

⁹ Arendt signale effectivement qu'une petite partie de son livre (d'ailleurs étrangère au sujet qui nous intéresse) provient de leçons de 1852, mais il affirme que l'essentiel du livre est tiré des leçons de 1854.

On poursuit de la même manière à partir de c_1 , en désignant par c_2 la valeur de x où pour la première fois, $f(x)$ diffère de $f(c_1)$ de $\pm\rho$, de sorte qu'on a de nouveau $|f(c_2) - f(c_1)| = \rho$, et $|f(x) - f(c_1)| \leq \rho$ pour tout x entre c_1 et c_2 ; et ainsi de suite.

On obtient une suite de valeurs a, c_1, c_2, c_3, \dots qui possèdent toutes la propriété précédente. On veut savoir si on peut atteindre b en un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire savoir si on parvient à une dernière valeur c_u qui, ou bien coïncide avec b , ou bien en est si proche que, pour tout x entre c_u et b , $f(x)$ diffère de $f(c_u)$ d'une quantité inférieure à ρ .

L'argument clé du point limite

C'est ici qu'apparaît un argument qui sera inlassablement repris en analyse; on peut l'appeler principe de *condensation*, comme on dit *condensation des singularités* chez Hankel [1882], ou aussi comme on le dira plus tard au xx^e siècle à propos de certains résultats d'analyse fonctionnelle, où l'on déduit du théorème de Baire ou de celui de Banach-Steinhaus l'existence de fonctions très irrégulières : *si la situation n'est pas uniformément bonne, on peut trouver une valeur où les difficultés se concentrent au point de rendre la situation carrément impossible*. Cet argument absolument fondamental est-il dû à Dirichlet, à Weierstrass, à Bolzano? Est-il simplement dans la « nature des choses », pour emprunter une phrase de Borel? Voici comment il est utilisé.

Si ce n'était pas le cas, on aurait une suite croissante infinie (c_n) de valeurs intermédiaires, qui convergeraient vers une valeur C au plus égale à b . Si c_μ et $c_{\mu+1}$ sont deux valeurs consécutives, elles satisfont la condition

$$(1) \quad |f(c_{\mu+1}) - f(c_\mu)| = \rho.$$

Mais f étant continue, les quantités $f(C) - f(c_\mu)$ et $f(C) - f(c_{\mu+1})$ tendent vers 0 quand μ croît, par conséquent leur différence $f(c_{\mu+1}) - f(c_\mu)$ tend aussi vers 0; ceci contredit la condition (1).

Dirichlet, qui expose à des étudiants, prend le soin de poursuivre le raisonnement jusqu'à son terme : il vient de montrer qu'on peut atteindre le point b en un nombre fini d'étapes, a, c_1, \dots, c_u ; il prend alors pour σ la plus petite distance parmi $c_1 - a, c_2 - c_1, \dots, c_u - c_{u-1}$, en incluant aussi $b - c_u$ dans le cas où $c_u < b$; il remarque que deux points x, y à distance $< \sigma$ tombent, soit dans le même intervalle, soit dans deux intervalles adjacents, ce qui le conduit à l'estimation $|f(y) - f(x)| < 3\rho$. Il

termine en disant, comme on le fait souvent dans un exposé oral : nous aurions pu commencer avec $\frac{1}{3}\rho$ au lieu de ρ , ce qui nous aurait donné précisément le résultat voulu.

Après cette preuve, Dirichlet signale que le théorème n'est pas vrai pour un intervalle infini : il donne l'exemple de la fonction continue $f(x) = \sin(x^2)$, qui n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

La conclusion de l'article de Dugac

Poursuivons avec Dugac :

« Il est essentiel de remarquer que dans cette démonstration de Dirichlet, l'idée de recouvrement est exprimée explicitement » [Dugac 1989, p. 93].

Cette affirmation de Dugac nous semble exagérée ; s'il est incontestable que Dirichlet obtient un résultat de finitude, peut-on parler de *recouvrement*, en relation avec le théorème de Borel, du simple fait qu'on a coupé un segment en un nombre fini de segments plus petits, au moyen d'un nombre fini de points ? Il ne nous semble pas que la seule idée de subdivision finie d'un intervalle, utilisée par exemple pour définir l'intégrale de Riemann, approche de façon substantielle l'idée du théorème de recouvrement.

Bru et Dugac [1991], par leur travail considérable sur la correspondance de Lebesgue, nous procurent le renfort de ce dernier : dans une lettre à Borel de septembre 1904 (lettre 40 du recueil ; voir aussi la lettre 39), Lebesgue réfute le point de vue de Veblen [1904], qui a forcé le trait de la filiation Heine-Borel. Après avoir attaqué par la phrase « Le Veblen (Oswald) est un mauvais plaisant », Lebesgue rappelle en une dizaine de lignes le principe de la démonstration de Heine et poursuit ainsi :

« Vous voyez, dans tout cela il n'est pas question du tout de couvrir un intervalle avec une infinité d'autres puis de choisir. [...] »

En résumé, Heine ne parle en rien, rien du tout, ni même de loin, de votre théorème et il donne une démonstration différente de celle qui s'en déduit, différente même quand on suppose amalgamée la démonstration de la continuité uniforme et celle du théorème de Heine-Borel » [Bru & Dugac 1991, lettre 40, p. 73].

L'article de Heine

L'article de Heine [1872] est un traité d'analyse en raccourci. On y trouve la notion de *Zahlenreihe*, qui est très exactement ici une suite de Cauchy de nombres (rationnels dans un premier temps), la définition

de l'équivalence de deux suites de Cauchy, puis la notion de *Zahlzeichen* qui correspond à un nombre réel défini par une classe d'équivalence de suites de Cauchy [*ibid.*, p. 174–176]. Heine note $X = [x_1, x_2, x_3, \dots]$ pour signifier que le *Zahlzeichen* X représente la suite de Cauchy x_1, x_2, \dots . Il n'introduit pas ces « classes d'équivalence » de façon ensembliste, comme on l'a fait plus tard, mais comme des *symboles* obéissant à des règles, pour lesquels on peut définir l'égalité, une relation d'ordre et les opérations de somme, produit, quotient. Heine introduit ensuite les fonctions continues et démontre qu'une fonction continue atteint ses bornes. Enfin, le théorème sur l'uniforme continuité apparaît à l'ultime page, et les derniers mots de l'article, avant la date, sont les mots *uniformément continue*. Nous avons préféré laisser dans les citations les expressions *Zahlenreihe* et *Zahlzeichen*, qui sont employées ici dans le sens précis que nous venons d'indiquer.

« 6. PROPOSITION. — Une fonction $f(x)$, continue pour toutes les valeurs de la variable x , de $x = a$ jusqu'à $x = b$, est aussi uniformément continue. (B, §.3, Déf. 1).

Preuve. — Si 3ε désigne une grandeur arbitraire [> 0], alors il existe un nombre tel que de $x = a$ jusqu'à lui, on ait que $f(x) - f(a)$ est $\leq 3\varepsilon$ en valeur absolue. Il existe une valeur qui est la plus grande parmi celles qui satisfont cette propriété, et pour elle on a aussi $f(x) - f(a) - 3\varepsilon = 0$ [il faut lire $|f(x) - f(a)| = 3\varepsilon$, ici et plus loin] (B, §3, Propos. 5). Soit x_1 cette valeur ; de la même façon, on trouve un nombre x_2 , qui est le plus grand nombre tel que, de $x = x_1$ jusqu'à $x = x_2$, $f(x) - f(x_1) \leq 3\varepsilon$ reste toujours vraie. On continue ainsi ; si on arrive après un nombre fini n d'opérations à $x_n = b$, ou bien si on trouve que $f(x) - f(x_{n-1})$ ne dépasse jamais 3ε quand x varie de $x = x_{n-1}$ à $x = b$, alors la proposition est démontrée.

Il nous reste à traiter le cas où aucun tel entier n n'existe, et où par conséquent les grandeurs x_1, x_2 , etc. forment une suite croissante infinie de grandeurs, qui sont plus petites que b . Cette suite serait alors une *Zahlenreihe*¹⁰, à laquelle correspondrait un *Zahlzeichen* X ; on a de plus la propriété que pour tout n , l'égalité $f(x_{n+1}) - f(x_n) = 3\varepsilon$ est vraie. Soit maintenant η_0 vérifiant la condition que $f(X)$ diffère de $f(X - \eta)$ de moins de ε , tant que $\eta < \eta_0$. Entre les nombres $X - \eta_0$ et X doivent tomber des points x_n, x_{n+1} , etc. de notre *Zahlenreihe*, de sorte que (B, §.2, Suite 1) $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ serait plus petit que 2ε , alors qu'il devrait d'un autre côté être égal à 3ε . L'hypothèse sous-jacente est donc impossible, et la fonction est uniformément continue.

Halle, octobre 1871 » [Heine 1872, p. 188].

¹⁰ Heine vérifie en détail beaucoup des premiers éléments nécessaires pour introduire les réels par les suites de Cauchy, mais nous n'y avons pas vu la preuve de ce point précis : *toute suite croissante et majorée est de Cauchy*.

Cette preuve peut inspirer divers commentaires... Retenons seulement celui qui suit. On voit que l'unique différence entre Heine et Dirichlet est que Heine *justifie* l'existence de la limite d'une suite croissante majorée de nombres réels. On pourra se ranger à l'une des deux positions suivantes :

– La situation a changé radicalement : au lieu de pratiquer une analyse fondée sur la seule intuition géométrique de la droite ou du plan, on peut vraiment expliquer de quoi on parle quand on mentionne les nombres réels. Cet article participe à la grande entreprise d'arithmétisation de l'analyse, qui a bouleversé la façon d'enseigner et d'écrire cette discipline.

– D'un point de vue pragmatique, ce qui compte, ce sont les résultats nouveaux, et les idées nouvelles qui ouvrent le chemin vers ces résultats. Bien sûr, il faut consolider la justification des étapes de ce chemin, mais c'est un travail pour l'arrière-garde de l'armée mathématique. Dans cette optique, on voit bien que la preuve de Heine n'apporte rien de plus que celle de Dirichlet : les idées étaient déjà là, toutes.

Pour dépasser cette opposition simpliste, disons que la définition des nombres réels apporte peu à la recherche sur les questions où l'image linéaire des nombres suffit, ce qui est bien le cas pour le théorème de continuité uniforme ; mais elle a sans doute été essentielle pour concevoir des objets nouveaux tels que l'ensemble triadique de Cantor, la fonction de Cantor (qui varie continûment de $f(0) = 0$ à $f(1) = 1$ en restant constante sur chaque intervalle extérieur à l'ensemble triadique) ou la fonction de Peano (qui donne de $[0, 1]$ une image continue qui remplit un carré).

Notons pour finir que l'article de Heine dont nous avons parlé longuement constitue un point assez isolé dans l'ensemble des travaux de cet auteur. Heine est connu de ses contemporains pour plusieurs articles sur des fonctions particulières, définies par des séries entières ou des produits infinis, notamment une fonction eulérienne connue comme « fonction Ω de Heine », et surtout pour un traité important sur les fonctions sphériques [Heine 1878-81]. Ce sont ces travaux qui sont cités un bon nombre de fois dans le *Jahrbuch* des années 1870–1890, où ils servent de repères pour situer des articles qui font l'actualité du moment, et pas le théorème de continuité uniforme.

6. LA PÉRIODE CHARNIÈRE

La période qui s'étend entre l'article de Heine [1872] et la thèse de Borel [1894] est en somme assez courte. Cependant, les analystes ne sont pas restés inactifs pendant cette vingtaine d'années : tout de suite, Lüroth [1873] publie une belle preuve de la continuité uniforme d'une fonction continue définie sur un fermé borné du plan ; cette preuve s'applique évidemment aussi bien à \mathbb{R}^n pour tout n , et elle s'appliquera aussi, sans changement notable, au cas d'un espace métrique avec la propriété de Bolzano-Weierstrass, quand cette notion apparaîtra chez Fréchet [1906]. C'est sans doute cette preuve de Lüroth qui va inspirer une démonstration du théorème de recouvrement due à Baire, rapportée par Borel :

« [...] M. René Baire m'a communiqué une démonstration de la généralisation de M. Lebesgue, qui n'est pas plus simple que celle de M. Lebesgue, mais qui me paraît, à certains égards, intéressante. Voici comment on peut l'exposer, en se bornant au cas du continu à une dimension :

Soient donnés des intervalles tels que tout point du segment 0–1 soit *intérieur* à l'un d'eux (le mot intérieur est pris au sens étroit, c'est-à-dire que les extrémités d'un intervalle ne sont pas regardées comme intérieures à l'intervalle). A tout nombre x compris entre 0 et 1, on peut faire correspondre un nombre ε défini comme il suit : soient ab l'un des intervalles contenant x et h le plus petit des deux nombres positifs $x - a$ et $b - x$; le nombre ε est la limite supérieure des valeurs de h qui correspondent à tous les intervalles ab contenant x . Il est visible que le nombre ε ainsi défini est une fonction continue de x , quand x varie entre 0 et 1 ; cette fonction continue admet donc une limite inférieure η qu'elle atteint effectivement et qui, par suite, ne peut pas être nulle. En désignant par η' un nombre positif quelconque inférieur à η , il est visible que tout point x compris entre 0 et 1 est à l'intérieur d'un intervalle ab tel que $b - x$ et $x - a$ soient tous deux supérieurs au nombre déterminé η' ; il est clair, dès lors, que l'on peut recouvrir tout l'intervalle 0–1 par un nombre d'intervalles au plus égal à l'entier immédiatement supérieur à $1/\eta'$; donc, par un nombre fini d'intervalles. C'est le résultat qu'on voulait démontrer » [Borel 1905, p. 299].

Dans le contexte de notre discussion sur l'appellation Heine-Borel, il est intéressant de noter ce commentaire de Borel lui-même :

« Cette démonstration de M. Baire n'est pas sans analogie avec celle que Heine a donnée de l'uniformité de la continuité (*Journal de Crelle*, t. 74). C'est sans doute, à cause de cette analogie que certains auteurs ont donné au théorème dont il est question le nom de théorème de Heine-Borel » [*ibid.*, p. 299].

Borel redira à peu près la même chose plusieurs années plus tard, dans sa *Notice* [1912b, p. 129], ce qui nous amène à nous demander si Borel a

vraiment lu l'article de Heine. Nous invitons en effet le lecteur à relire la preuve de Heine rappelée ci-dessus ; nous sommes prêts à parier qu'il ne trouvera pas frappante l'analogie évoquée par Borel. En revanche, c'est lumineux à partir du texte de Lüroth :

« Une fonction $f(x, y)$ de deux variables x, y qu'on se représente comme les coordonnées d'un point du plan, est dite continue en un point, s'il est le centre d'un cercle dans l'intérieur duquel l'oscillation de la fonction [...] est $\leq \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est une grandeur fixée à l'avance, arbitrairement petite. À supposer qu'un tel cercle existe, son rayon ne peut excéder une certaine valeur ρ , si on veut que la condition ci-dessus soit remplie. Cette grandeur ρ , outre qu'elle dépend de ε , est une fonction $\rho(x, y)$ du point (x, y) .

[...]

Si la fonction $f(x, y)$ est continue en tout point du domaine, y compris les points frontière, alors la fonction ρ est non nulle en tous les points. Prenons dans le cercle de centre (x, y) et de rayon $\rho(x, y)$ un point (x', y') . Soit d sa distance au centre (x, y) . On a $\rho(x', y') \geq \rho(x, y) - d$. [...] *La fonction $\rho(x, y)$ est continue sur tout le domaine y compris sur sa frontière [...]* Mais si la limite inférieure R des valeurs de la fonction $\rho(x, y)$ était zéro, il suivrait d'un théorème de Monsieur Weierstrass qu'il existerait au moins un point du domaine ou de sa frontière où la fonction $\rho(x, y)$ s'annulerait. La fonction $f(x, y)$ ne serait donc pas continue en ce point, en contradiction avec l'hypothèse. Tout cercle de rayon $\leq R$, où qu'il soit situé dans le domaine, possède la propriété que l'oscillation de la fonction $f(x, y)$ y est inférieure à ε , *c'est-à-dire que toute fonction continue, dans les conditions ci-dessus, est uniformément continue* » [Lüroth 1873, p. 319–320].

L'un des énoncés les plus proches du résultat de Borel se trouve chez Pincherle [1882]. C'est à nouveau la théorie des fonctions d'une variable complexe qui conduit à démontrer un énoncé de topologie. Pincherle formule le résultat qui suit :

« THÉORÈME. — Si à tout point x_0 d'un domaine C et de sa frontière on fait correspondre une quantité X (fonction de x au sens le plus large du terme), et si chaque x_0 possède un voisinage dans lequel la limite supérieure des valeurs absolues de X , correspondant aux points du voisinage, est un nombre fini $L(x_0)$, alors il existe un nombre N tel que, sur tout le domaine, on ait $|X| < N$ » [Pincherle 1882, p. 152].

À partir de ce théorème, le mathématicien contemporain, entraîné depuis longtemps à la gymnastique de la topologie générale, voit tout de suite comment déduire en quelques mots le théorème de Borel, dans sa version originelle qui s'applique à un recouvrement dénombrable : en supposant donné un recouvrement de $[0, 1]$ par une suite d'ouverts $(U_n)_{n \geq 0}$, on peut définir une fonction X en posant que $X(x)$ est le plus petit entier n tel que $x \in U_n$; cette fonction est évidemment bornée au

voisinage de chaque point; d'après le théorème de Pincherle, il existe un entier N tel que $|X| < N$ en tout point : cela signifie que les ouverts U_0, \dots, U_N suffisent à recouvrir $[0, 1]$. Mais bien sûr, et c'est essentiel historiquement, Pincherle ne fait pas ce raisonnement.

Les progrès de la théorie des fonctions de variables réelles au tournant du siècle se trouvent bien sûr en germe dans les travaux des années 1880–1890 : Weierstrass [1881, p. 159–160] trace la route pour le lemme de Cousin, en montrant que tout compact B contenu dans un ouvert A du plan complexe peut être découpé en un nombre fini de parties qui, toutes, sont contenues dans un disque contenu dans A ; on vient de voir que Pincherle n'était pas loin de considérer une fonction semi-continue, une notion qui sera introduite par Baire [1899]; quand Borel [1898, p. 50] conclut la section qu'il consacre aux ensembles parfaits, il reprend presque mot pour mot la description que Scheeffer [1884-85, p. 288] dit tenir de Cantor. Dans le même article, Scheeffer démontre une version déjà très efficace du théorème de Baire, ainsi que nous l'avons signalé [Maurey & Tacchi 2002, p. 48–50].

Les différentes façons de prouver le théorème de continuité uniforme ont été transformées à partir de 1894 en autant de façons de montrer le théorème de recouvrement. On trouve ces variantes dans les travaux de Borel et chez Young [1902-03], Vitali [1904], Fréchet [1906] entre autres. Il y a cependant une preuve du théorème de recouvrement, pour le cas originel d'une suite d'intervalles, qui nous semble mériter une mention particulière, par sa simplicité et son caractère quasiment algorithmique : on la trouve chez Borel [1912a, p. 174]. Nous allons la présenter avec nos propres mots :

Supposons que $[a, b]$ soit recouvert par une suite $(I_n)_{n \geq 0}$ d'intervalles ouverts; posons $b_0 = a$, et désignons par n_1 le plus petit indice tel que $b_0 \in I_{n_1}$. Cet intervalle I_{n_1} est de la forme (a_1, b_1) , avec $a_1 < b_0 < b_1$. Après avoir déterminé $I_{n_k} = (a_k, b_k)$ où $k \geq 1$, et en supposant que $b_k \leq b$, on désignera par n_{k+1} le plus petit indice tel que $b_k \in I_{n_{k+1}}$; écrivons cet intervalle $I_{n_{k+1}}$ sous la forme (a_{k+1}, b_{k+1}) , de sorte que $a_{k+1} < b_k < b_{k+1}$. On montre alors que ce processus ne peut pas continuer indéfiniment, c'est-à-dire qu'il existe un entier N tel que $b_N > b$, ce qui revient à dire que la famille finie des intervalles (a_j, b_j) , $1 \leq j \leq N$, extraite de la famille (I_n) initialement donnée, recouvre l'intervalle $[a, b]$.

Puisque la suite des points (b_k) est strictement croissante, les indices (n_k) des intervalles $I_{n_k} = (a_k, b_k)$ sont deux à deux distincts. Si le processus continue indéfiniment, la suite croissante (b_k) , majorée par b , possède une limite $c \in (a, b]$; ce point c est dans un certain intervalle I_m , qui contient b_k pour tout k assez grand, en particulier pour des valeurs de k telles que $n_{k+1} > m$, en contradiction avec la définition de n_{k+1} , qui est le plus petit indice n tel que $b_k \in I_n$.

C'est sans doute à propos de cette preuve que Lebesgue écrit à Borel en mai 1911 : « j'avoue que votre démonstration de Heine-Borel est jolie, mais pourquoi, de quel droit, ne l'avez-vous pas donnée à l'époque de votre thèse ? » [Bru & Dugac 1991, lettre 193, p. 291].

7. LA THÉORIE DE LA MESURE SELON BOREL

Pour Borel, quand il écrit sa thèse, la possibilité d'extraire d'un recouvrement quelconque de $[A, B]$ un recouvrement par une famille finie d'intervalles, ne prend tout son sens que par rapport à des préoccupations de théorie de la mesure. De fait, le théorème de recouvrement de Borel deviendra sous sa plume le *théorème fondamental de la théorie de la mesure*. Déjà mis en avant dans ses *Leçons* [1898, p. 42], l'énoncé est présenté ainsi dans un article de 1912 :

« La théorie de la mesure est basée sur le théorème suivant, que nous appellerons premier théorème fondamental.

Si l'on a, sur un segment de droite, une infinité dénombrable d'intervalles, tels que tout point de la droite soit intérieur à au moins l'un d'eux, on peut choisir parmi eux un nombre limité d'intervalles ayant la même propriété » [Borel 1912a, p. 173–174].

À partir de cet énoncé, Borel introduit un premier principe de théorie de la mesure, déjà cité au §1 sous sa forme contraposée :

« Il résulte évidemment du théorème fondamental que *s'il est possible d'enfermer tous les points d'un intervalle ab à l'intérieur d'intervalles $a_n b_n$, la longueur totale de ces intervalles est supérieure à la longueur de ab* . C'est cette conséquence du théorème fondamental qui est essentielle dans la théorie de la mesure des ensembles » [*ibid.*, p. 174].

Dans sa thèse, Borel a déjà pu donner une première version d'un des résultats élémentaires de la théorie de la mesure : *tout ensemble dénombrable est négligeable*. Pour justifier cela avec les seuls outils de sa thèse, Borel [1895, p. 51] utilise un raisonnement qui est en germe chez Hankel [1870-82, p. 86] et qu'a repris Harnack [Harnack 1885, p. 242–243] :

on considère une énumération $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des points de notre ensemble dénombrable. À chacun de ces points x_n , pris pour centre, on associe l'intervalle $]x_n - \frac{1}{2}\varepsilon_n, x_n + \frac{1}{2}\varepsilon_n[$, où ε_n est un nombre > 0 arbitraire. Harnack constate alors que la somme des longueurs de ces intervalles peut être rendue aussi petite qu'on veut. Mais ne disposant que de la théorie du *contenu*, il ne peut rien faire de cette remarque fondamentale ; en effet, il enchaîne ainsi :

« ceci amène à la question : si un ensemble peut être couvert par une suite *infinie* d'intervalles disjoints [...] dont la somme est égale à un nombre s , à quelle condition peut-on aussi le couvrir par un nombre *fini* d'intervalles dont la somme soit aussi proche de s qu'on veut ? » [Harnack 1885, p. 243],

ce qui le place immédiatement sur une fausse piste. Harnack veut à tout prix revenir à une famille finie d'intervalles, car c'est le cadre fixé à l'époque par la théorie du contenu. Rappelons qu'un ensemble est dit *de contenu* $< c$ s'il est possible de l'enfermer dans une famille *finie* d'intervalles dont la somme des longueurs est $< c$; c'est ce mot *finie* qui rendait impossible un traitement correct de l'ensemble des rationnels. Sur ces notions de mesure antérieures à la conception moderne, on consultera avec profit les livres de Hawkins [1970] et de Pier [1996, p. 109–113]. Borel, le premier, fournit une interprétation cohérente du phénomène décrit par Harnack :

« car, s'il y en avait une infinité dénombrable¹¹, on pourrait les enfermer dans des intervalles dont la somme serait aussi petite que l'on veut et pourrait être choisie de manière que, en ajoutant ces intervalles à ceux qui sont déjà donnés, on ait une somme inférieure à l'intervalle total ; il devrait donc y avoir un point de la droite n'appartenant à aucun de ces intervalles » [Borel 1895, p. 51].

Borel applique un argument similaire pour montrer qu'il peut se ramener à un recouvrement par des *intervalles ouverts*, indispensables pour établir la preuve :

« [...] on peut supposer que l'on entend par point appartenant à l'intervalle tout point compris entre les extrémités et ne coïncidant pas avec elles ; car il est possible d'agrandir chaque intervalle, par ses deux extrémités, d'une fraction suffisamment faible de sa propre longueur pour que la somme des intervalles reste inférieure à l'intervalle total. Il est clair qu'après cet agrandissement les points intérieurs aux anciens intervalles et leurs extrémités sont intérieurs aux nouveaux intervalles au sens restreint du mot » [*ibid.*, p. 51].

Dès 1898, Borel va beaucoup plus loin dans la direction de la théorie de la mesure, dont il énonce les principes fondamentaux [Borel 1898,

¹¹ Voir le début de ce raisonnement *supra* §2, passage sur la note finale de la thèse.

p. 46–47] : il introduit sur $[0, 1]$ une classe d'ensembles qu'il nomme *mesurables* et il définit leur *mesure* par les principes suivants :

1) un intervalle contenu dans $[0, 1]$ est mesurable et sa mesure est égale à sa longueur ;

2) si (E_n) est une suite d'ensembles mesurables disjoints, leur réunion est mesurable et la mesure de la réunion est la somme de la série des mesures ;

3) si un ensemble mesurable en contient un autre, leur différence est mesurable et a pour mesure la différence des mesures.

Après avoir repris dans ses *Leçons* le théorème de recouvrement et le principe qui s'en déduit, Borel explique :

« Le théorème fondamental démontré pages 41–43 nous assure que ces définitions ne seront jamais contradictoires entre elles¹² » [Borel 1898, p. 47].

Avec l'expérience que nous a donnée une pratique centenaire de la théorie de la mesure, nous sommes prêts à admettre que Borel a bel et bien défini la mesure (de Lebesgue) en 1898. Cependant, le programme tracé par la note de bas de page attachée à la citation précédente n'était peut-être pas si convaincant ; Lebesgue pour sa part contestera la réalisabilité de ce programme (voir plus loin). Borel ajoutera dans l'édition de 1914 des *Leçons* une note de quarante pages, issue d'un article de 1912 [Borel 1912a], pour développer sa théorie de la mesure. Cependant, arrivant plus de dix ans après la construction de Lebesgue, cela ne réussira pas à transformer l'essai qui aurait fait que la mesure sur la tribu de Borel s'appelle « mesure de Borel » plutôt que « mesure de Lebesgue ». Il est vraiment étonnant, comme le notent B. Bru, M.-F. Bru et Chung [1999, p. 183] que Borel se soit contenté de cette description sommaire de 1898 et qu'il ait pratiquement laissé en friche cette avancée extraordinaire. Certes, le fait que Borel se soit progressivement rapproché de points de vue « empiristes », pour ne pas dire intuitionnistes, n'a pas arrangé les choses : songeons que Borel refusait la *tribu borélienne* ! S'il envisage [Borel 1912a, p. 179–184] la classe des ensembles obtenus par l'application transfinie des règles 2) et 3) ci-dessus, mais pour un ordinal dénombrable effectivement décrit, comme ω^ω par exemple, il estime en revanche que

¹² « Il est du moins aisé d'obtenir ce résultat par des procédés tout à fait analogues à ceux que l'on a employés pour établir ce théorème » (note de Borel).

la classe d'ensembles obtenue pour la collection *entière* des ordinaux dénombrables « *ne [...] paraît pas être une véritable conception mathématique* » [*ibid.*, note p. 183–184]. Or cette classe est bien celle que nous appelons aujourd'hui la *tribu borélienne*. À plusieurs occasions, Lebesgue prend sa plume pour défendre tout (ou partie de) ce qui est dû à Borel en matière de théorie de la mesure. Ainsi, dans sa recension du livre des époux Young, il reproche à ceux-ci de ne pas avoir rendu justice à Borel en cette matière :

« Sans doute, M. Borel n'a pas parachevé la théorie, mais il en a donné les fondements ; il m'a été facile, quand j'en ai eu besoin, de compléter et de mettre au point la théorie ébauchée par M. Borel » [Lebesgue 1907, p. 132]

Lebesgue, de quatre ans plus jeune que Borel, lui adresse une correspondance amicale, fréquente et volumineuse pendant de nombreuses années. Cependant, il se refuse à considérer que les *Leçons* de 1898 contiennent la *solution* du problème de la définition de la mesure des ensembles ; bien plus, dans une lettre à Borel de février 1912, Lebesgue soutient que la solution donnée par Borel en 1912 n'est pas fondamentalement différente de sa propre solution de 1901. En réponse à Borel, qui a dû lui faire part des points essentiels de son futur article [Borel 1912a], Lebesgue écrit en effet :

« Ceci dit, reprenons notre polémique. Je vous ai toujours dit : “dans votre livre [de 1898] il n'est pas prouvé que la définition de la mesure ne soit pas contradictoire, je ne vois pas comment on pourrait le démontrer en se servant du fait que votre mesure est définie de proche en proche par des additions et soustractions algébriques correspondant aux additions et aux soustractions géométriques qui définissent l'ensemble. Je ne crois pas qu'on puisse le faire sans remplacer cette définition constructive de proche en proche de la mesure par une définition autre, analogue à ce que je fais, en prenant des ensembles contenant et contenus”.

Votre lettre semble me donner une confirmation éclatante [...] » [Bru & Dugac 1991, lettre 198, p. 296].

Lebesgue indique alors comment il comprend la méthode que lui suggère la lettre de Borel : on montre par récurrence ordinale que les ensembles mesurables de Borel vérifient la propriété \mathcal{S}_1 d'être approchables en mesure par des réunions finies d'intervalles (c'est bien ainsi que Borel procède dans l'article de 1912). Lebesgue poursuit :

« Quelle différence de principe y a-t-il ? Je n'en vois aucune, seulement tandis que moi dans ce qui précède je pose une définition \mathcal{S}_1 j'imagine que vous vous ne la posez pas, que vous constatez seulement l'accord de cette \mathcal{S}_1 avec votre définition de la mesure de votre livre [...] » [*ibid.*, p. 296–297].

Les échanges prendront un ton beaucoup plus aigre après la Première Guerre mondiale. Lebesgue [1918] écrit un long article dans lequel il n'introduit aucune mathématique nouvelle, mais revient en détail sur ses travaux et ceux de Borel, et lance une polémique sur les priorités dans la création de la théorie de la mesure ; Borel [1919] répond par un article de la même teneur. Par ailleurs, la correspondance de Lebesgue à Borel s'arrête, définitivement, en 1918, sans doute pour des raisons qui ne se limitent pas à leur conflit sur la théorie de la mesure (voir notamment la lettre 229 dans [Bru & Dugac 1991], « lettre de rupture » datée de décembre 1917, et les lettres antérieures 225, 226 qui datent aussi de la guerre).

8. CONCLUSION : DIRICHLET SAVAIT-IL DÉJÀ TOUT ?

Partant de la démonstration de Dirichlet-Heine sur la continuité uniforme, on parvient facilement à la notion de famille d'intervalles $(]x - h, x + h[)$, $x \in [A, B]$, sur lesquels la fonction continue f a une oscillation $\leq \varepsilon$ et, par conséquent, à la considération, pour chaque x donné, de la borne supérieure des extrémités $x + h$ de ces intervalles. Cette interprétation de la preuve de Dirichlet-Heine fournit, calquée sur cette dernière, une *démonstration du théorème de Borel* : désignons par \mathcal{F} une famille d'intervalles ouverts qui recouvre un intervalle fermé $[A, B]$. Appelons c_1 la borne supérieure des extrémités y des intervalles $]x, y[$ de la famille \mathcal{F} qui contiennent le point initial $A = c_0$,

$$c_1 = \sup\{y : x < A < y \text{ et }]x, y[\in \mathcal{F}\}.$$

Si le point c_1 vérifie $c_1 < B$, on définit c_2 à partir de c_1 , comme la borne supérieure des extrémités y des intervalles $]x, y[\in \mathcal{F}$ contenant c_1 , sinon on arrête la construction ; et ainsi de suite pour c_3, c_4, \dots

Ou bien la suite croissante (c_v) possède un plus grand (et dernier) terme c_{v_0} . D'après la règle de construction, on doit avoir $c_{v_0} \geq B$. On peut alors facilement, par un nombre fini de « petits pas en arrière » à partir de B , trouver une famille finie d'intervalles ouverts, extraite de la famille \mathcal{F} et qui recouvre $[A, B]$: il existe un intervalle ouvert $]x_{v_0}, y_{v_0}[$ de \mathcal{F} qui contient B ; d'après la définition de c_{v_0} comme borne supérieure, et puisque $c_{v_0} > x_{v_0}$, on pourra trouver un intervalle ouvert $]x_{v_0-1}, y_{v_0-1}[$ de la famille \mathcal{F} contenant c_{v_0-1} et tel que $x_{v_0} < y_{v_0-1}$, etc. jusqu'à

$x_1 < c_1 < y_1$, et un dernier intervalle $]x_0, y_0[$ de \mathcal{F} , contenant $c_0 = A$ et tel que $x_1 < y_0$. La famille finie extraite de \mathcal{F} , formée des intervalles $]x_i, y_i[$ pour $i = 0, \dots, \nu_0$, recouvre le segment $[A, B]$.

Ou bien la suite $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ admet un point limite $c \leq B$. Il existe un intervalle $]x, y[\in \mathcal{F}$ qui contient le point c , de sorte que cet intervalle $]x, y[$ contient tous les points c_ν à partir d'un certain rang ν_1 . Mais alors, si $\nu > \nu_1$, on a $c_\nu, c_{\nu+1} \in]x, y[$ et le point $c_{\nu+1} < y$ ne peut pas être la borne supérieure des extrémités des intervalles contenant c_ν . Ce deuxième cas est donc impossible.

Si Dirichlet s'était posé la question du recouvrement de $[A, B]$ par une famille d'intervalles, il n'aurait eu probablement aucun mal à écrire le raisonnement précédent. On peut avancer que Dirichlet avait les outils techniques pour résoudre la question de l'existence d'un sous-recouvrement fini. Il reste que ne s'étant pas posé la question, il ne l'a pas fait; cette question n'avait sans doute aucun caractère d'urgence en 1850. Nous pensons donc pouvoir affirmer, en désaccord avec Dugac, que cette idée de recouvrement aussi simple que féconde, qui est à l'origine de la théorie de la mesure et de bien des preuves en topologie, est un des fruits originaux de la thèse de Borel. Nous traduirons fort bien notre sentiment en répétant ce qu'écrivait Lebesgue :

« Le théorème en question n'est pas en effet de ceux dont la démonstration présente de grosses difficultés : il y avait mérite à l'apercevoir, à l'énoncer, à deviner son intérêt, non à le démontrer ; or je doute fort que Heine ait vu le théorème [...] » [Lebesgue 1907, p. 134].

Pour être tout à fait explicites, nous dirons :

– oui, les outils techniques nécessaires étaient présents, notamment dès 1875–1885 ; en particulier, le principe de condensation, dans la forme donnée par Heine et Lüroth, ou plus encore chez Pincherle, ne laissait plus qu'un petit fossé à franchir ;

– non, l'idée même de s'intéresser à la donnée d'un recouvrement par une famille d'ouverts, le fait de pouvoir en extraire un sous-recouvrement fini et surtout d'en tirer des bénéfices, ne sont pas présents dans les textes antérieurs à la thèse de Borel. Bien sûr, le résultat obtenu est loin d'être étranger à la preuve de la continuité uniforme, et il était naturel de récupérer le théorème de Heine à partir de celui de Borel, mais cela ne nous semble pas une raison suffisante pour justifier l'appellation Heine-Borel.

Parvenus à ce point, nous devrions peut-être admettre aussi que l'appellation Borel-Lebesgue est à peine plus justifiée, et n'est peut-être qu'une réaction nationaliste pour tenter de ramener en France la totalité du résultat. Après tout, Schönflies [1900] et Young [1902-03] ont publié leur preuve du théorème généralisé avant que Lebesgue [1904, p. 104–105] ne *publie* la sienne. On pourrait aussi juger que l'effort nécessaire pour passer de l'énoncé de Borel à l'énoncé généralisé ne mérite pas d'être aussi solennellement consacré, suivant en cela une opinion exprimée par Lebesgue [1907, p. 133] lui-même.

Le résultat de Borel se trouve au point de départ d'une bifurcation, entre topologie d'un côté et théorie de la mesure de l'autre. En effet, l'extraction de sous-recouvrements finis sera la thématique fondamentale de la théorie de la compacité, chapitre important de la topologie générale, qui n'a pratiquement rien à voir avec les préoccupations de théorie de la mesure. Borel, de son côté, est venu au théorème pour amorcer la théorie de la mesure ; mais cette théorie, dans ses aspects modernes de *mesure abstraite*, ne fera presque plus aucun appel au théorème de recouvrement.

Extraire un sous-recouvrement fini est certainement la phrase quasiment magique qu'a inventée Borel, et qui nous mènerait — après un cheminement riche en découvertes qui justifierait un exposé plus long que le présent article — jusqu'à Tychonoff [1930]. Entre-temps, Fréchet, Hausdorff, Alexandrov, Urysohn ont fait faire des progrès considérables à la topologie « générale ». Dans l'article impressionnant de Tychonoff, écrit en allemand et soumis à *Mathematische Annalen* en janvier 1929 par un jeune homme de 22 ans, on trouve la définition de la topologie produit, la preuve que toute puissance de l'intervalle $[0, 1]$ est compacte pour cette topologie, et le corollaire que les espaces topologiques complètement réguliers sont exactement ceux qui se plongent dans un espace compact. Encore un effort et on arrivera à ce qu'on appelle aujourd'hui le *théorème de Tychonoff*, le fait que tout produit de compacts soit compact, un résultat dû à Čech [1937], qui fascinera une génération de mathématiciens de l'ère bourbakiste. Avec ce dernier théorème dont l'axiome du choix est pratiquement le prérequis, on se trouve cependant aux antipodes des positions de Borel sur les questions de fondements.

Remerciements

Nous tenons à remercier la rédaction de la *Revue d'histoire des mathématiques*, qui a accueilli avec bienveillance les « visiteurs étrangers » que nous sommes dans son domaine, et nous a fait bénéficier de nombreuses remarques judicieuses pour améliorer notre texte ; les suggestions des rapporteurs nous ont aussi conduits à compléter le texte original sur plusieurs points importants ; en particulier, nous avons ajouté une description assez détaillée du contenu de l'article de Heine.

**9. ANNEXE : LA DÉMONSTRATION DE DIRICHLET
(SELON ARENDT)**

Nous donnons dans ce qui suit la traduction des pages 3 à 8 du livre d'Arendt [Dirichlet 1854/1904]. Nous avons ajouté entre crochets, à quelques rares endroits, une précision qui nous a semblé utile.

Fonctions continues et univoques

1. Définition

La définition d'une intégrale définie s'appuie sur une notion fondamentale dans toute l'analyse, celle de continuité et d'univocité d'une fonction.

On dira que $y = f(x)$ est une fonction continue et univoque, ou univaluée, si à chaque valeur de x correspond une valeur unique de y et si à toute variation graduelle de x correspond une variation graduelle de y , c'est-à-dire si, x étant fixé, la différence

$$f(x+h) - f(x)$$

converge vers 0 quand h décroît vers 0.

Si l'on représente graphiquement l'équation

$$y = f(x)$$

en considérant la courbe obtenue quand on porte x en abscisse et y en ordonnée, la continuité et l'univocité demandent que les deux conditions suivantes soient remplies : 1) pour chaque abscisse x , l'équation doit fournir une unique ordonnée y correspondante ; 2) la courbe doit être d'un

seul morceau, c'est-à-dire que le passage d'un point aux voisins doit s'effectuer graduellement, sans saut, et que le tracé total des points doit former un continu. Si l'équation était multivaluée, en ce qu'elle puisse fournir pour un même x plusieurs valeurs de y , on pourrait tout de même l'inclure dans nos considérations, si on choisissait, parmi les différentes branches de la courbe, une branche unique fixée.

Il se peut que la continuité ne soit exigée que dans un certain intervalle, par exemple pour toutes les valeurs de x qui se trouvent entre deux bornes extrêmes $x = a$ et $x = b$, alors qu'en dehors de ces limites, des deux côtés, la fonction $f(x)$ puisse se comporter de façon quelconque.

Pour pouvoir conclure à la continuité d'une fonction, on demandera aussi que toutes ses valeurs soient finies.

On remarquera bien que la notion de fonction satisfait à la seule hypothèse que la variable y dépend de la variable x , mais qu'elle ne requiert nullement, pour que la continuité soit vérifiée, que la fonction soit définie par une expression mathématique [explicite]. Et si toutefois on est dans ce cas, il n'est pas non plus nécessaire que l'opération de calcul soit la même dans la totalité de l'intervalle considéré. En d'autres mots : la courbe peut être donnée de façon purement graphique, par un tracé quelconque de la main, ou bien elle peut consister en la donnée d'un ou plusieurs arcs de courbes analytiques.

Finalement on fera attention dans ce qui suit que, par les notations a, b etc., quand on ne fait pas mention expresse du contraire, ce sont les valeurs algébriques et non les valeurs purement numériques qu'il faut comprendre. On pourra avoir $a > b$ ou $a < b$, selon que la différence $a - b$ est positive ou négative.

2. Propriété fondamentale des fonctions continues

Soit $y = f(x)$ une fonction de x , continue dans l'intervalle fini qui va de a à b ; par *sous-intervalle*, entendons la différence de deux valeurs quelconques de x , c'est-à-dire n'importe quelle partie de l'axe des abscisses entre a et b . Il est alors toujours possible de trouver, pour toute quantité positive ρ arbitrairement petite, une deuxième quantité σ , petite en proportion, qui a la propriété que sur tout sous-intervalle qui est [de longueur] $\leq \sigma$, la fonction y ne varie pas de plus de ρ .

Pour montrer cette proposition, nous nous servirons de la présentation plus commode que donne un mode d'exposition géométrique. On part

de l'origine a et on se dirige vers b , en testant toutes les valeurs de $f(x)$ sans en omettre aucune. Le premier sous-intervalle se termine au point c_1 en lequel, pour la première fois, la fonction diffère exactement de ρ , en valeur absolue, de sa valeur de départ $f(a)$, de sorte que l'on ait :

$$f(c_1) - f(a) = \pm\rho,$$

où le signe de ρ n'est pas à notre disposition, mais résulte du comportement de la courbe continue, mais quelconque, dont les ordonnées peuvent tantôt croître, tantôt décroître. Pour chaque valeur de x entre a et c_1 on doit avoir $|f(x) - f(a)| < \rho$; car si pour une telle valeur de x la différence était égale à ρ , on aurait dû terminer le premier sous-intervalle plus tôt, à ce point x ; la différence ne peut pas non plus être plus grande que ρ , parce qu'en vertu de la continuité de la fonction $f(x)$, la différence aurait dû prendre la valeur ρ pour une valeur antérieure de x , et avec le même signe.

On poursuit de la même manière : en partant de c_1 , on désigne par c_2 la valeur de x en laquelle pour la première fois, $f(x)$ diffère de la valeur de départ $f(c_1)$ de $\pm\rho$, de sorte qu'on a de nouveau : $f(c_2) - f(c_1) = \pm\rho$, mais qu'on a encore pour chaque x entre c_1 et c_2 : $|f(x) - f(c_1)| < \rho$; et ainsi de suite.

On obtient de cette façon une suite de valeurs :

$$a, c_1, c_2, c_3, \dots$$

qui possèdent toutes la propriété précédente et qui forment une suite croissante ou décroissante selon que $a < b$ ou $a > b$.

La question se pose de savoir si l'intervalle entier de a jusqu'à b sera rempli par un nombre fini de ces valeurs, c'est-à-dire de savoir si on parvient finalement à une dernière valeur c_u qui, ou bien coïncide avec b , ou bien est si proche de b que, pour tout point entre cette valeur et b , la fonction $f(x)$ diffère de $f(c_u)$ d'une quantité inférieure à ρ .

Si ce n'était pas le cas, on aurait une suite infinie de valeurs intermédiaires c qui convergeraient vers une valeur finie bien déterminée C , située entre a et b ou bien coïncidant avec b ; ces valeurs c seraient donc de plus en plus proches de la limite, quand on s'éloigne dans la suite. Si c_μ et $c_{\mu+1}$ désignent deux éléments successifs quelconques de la suite infinie, ils satisfont toujours à la condition

$$(1) \quad f(c_{\mu+1}) - f(c_\mu) = \pm\rho;$$

mais à mesure qu'on fait croître μ , les deux différences $f(C) - f(c_\mu)$ et $f(C) - f(c_{\mu+1})$ doivent devenir petites à cause de la continuité de la fonction $f(x)$, de sorte que pour μ assez grand, on peut les amener toutes deux à différer arbitrairement peu de 0, en particulier à être plus petites que le nombre donné ρ , ou bien que $\frac{1}{2}\rho$. On aurait alors pour la différence des deux différences, à condition d'aller assez loin : $|f(c_{\mu+1}) - f(c_\mu)| < 2\rho$ ou bien $< \rho$, en contradiction avec la condition (1).

L'intervalle $b - a$ ne peut donc contenir qu'un nombre fini de sous-intervalles possédant la propriété indiquée.

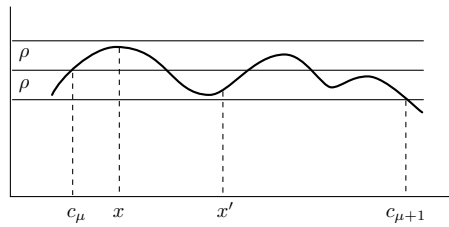


FIGURE 1

On désignera par σ la longueur du plus petit de ces sous-intervalles. Considérons deux valeurs $f(x)$ et $f(x')$ de la fonction, quelconques à ceci près que la distance $|x' - x|$ soit au plus $= \sigma$; les valeurs des abscisses correspondantes x et x' tombent manifestement, ou bien dans le même, ou bien dans deux sous-intervalles consécutifs. De l'examen des figures 1 et 2 on se convainc immédiatement qu'aussi éloignées l'une de l'autre que puissent être les valeurs de $f(x)$ à l'intérieur de $x' - x$, et quelle que soit l'allure de la courbe, elles différeront de moins de 2ρ dans le premier cas (figure 1), et au plus de 3ρ dans le deuxième cas (figure 2).

Notre proposition est donc rigoureusement démontrée. Car si on remplace par $\frac{1}{3}\rho$ la quantité arbitrairement petite ρ donnée, et donc son triple [c'est-à-dire] 3ρ par ρ , ce qui n'empêche évidemment pas ce nouveau ρ d'être arbitrairement petit, on obtient par la construction précédente une grandeur σ qui a la propriété qu'une augmentation ou une diminution d'une quantité moindre que σ , pour un x quelconque entre a et b , ne change les valeurs correspondantes de $f(x)$ que de ρ au plus. Bien entendu σ sera d'autant plus petit que ρ sera choisi plus petit, mais

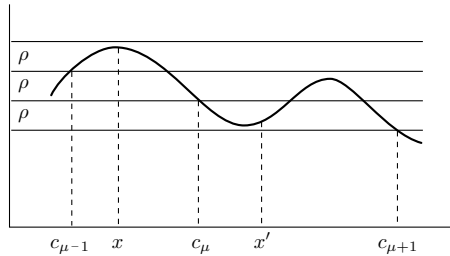


FIGURE 2

il correspondra toujours à une valeur déterminée de ρ une valeur bien déterminée de σ .

Remarque

Cette propriété des fonctions continues pourrait sans doute sembler, au premier coup d’œil, si évidente qu’elle ne demanderait même pas de preuve ; mais cette preuve se justifie parce que d’une part, dans la mesure où la notion d’intégrale définie repose sur cette propriété, aucune certitude ne pourrait être atteinte dans toute la théorie sans une claire compréhension de cette propriété ; d’autre part, par le fait que la propriété n’est correcte que sous les restrictions qui ont été imposées, et qu’en effet, elle ne reste pas toujours vraie pour un intervalle infini, même si la fonction est partout finie et continue.

C’est par exemple le cas pour la fonction

$$f(x) = \sin(x^2),$$

qui est finie et continue de $x = -\infty$ ou 0 jusqu’à $x = \infty$, oscille entre 1 et -1 , et prend pour deux valeurs de l’arc x^2 , qui sont séparées de $\frac{1}{2}\pi$ et situées aux extrémités du quadrant, des valeurs qui diffèrent de ± 1 . Si h désigne une quantité petite mais fixée, on pourra toujours trouver dans l’étendue infinie de 0 à ∞ des valeurs de x assez grandes pour que x^2 soit multiple de $\frac{1}{2}\pi$, et que la différence

$$(x + h)^2 - x^2 = 2hx + h^2$$

soit égale à $\frac{1}{2}\pi$ ou à π ou encore plus grande, par conséquent dans l’intervalle de longueur h correspondant, la fonction $\sin(x^2)$ variera d’une quantité 1 ou 2. Il s’ensuit l’impossibilité de pouvoir déterminer une

valeur fixe σ associée, comme dans notre preuve, à une quantité ρ arbitrairement petite ; au contraire, cette valeur σ devrait changer de place en place, et tendre vers 0 pour x croissant. En effet, quand h devient petit, la condition portant sur ρ sera remplie par d'autant plus de sous-intervalles, pris depuis l'origine 0 ; mais dans la mesure où les sous-intervalles deviennent de plus en plus petits, on ne pourra pas parvenir à un sous-intervalle qui soit le plus petit d'entre eux, celui que nous avons appelé σ , ce sur quoi la suite de la preuve était fondée.

BIBLIOGRAPHIE

- ALON (Noga) & SPENCER (Joel H.)
 [1992] *The Probabilistic Method*, New York : John Wiley, 1992.
- BAIRE (René)
 [1899] Sur les fonctions de variables réelles, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 3 (1899), p. 1–123.
- BOREL (Émile)
 [Œuvres] *Œuvres de Émile Borel*, Paris : Éditions du CNRS, 1972, 4 tomes.
 [1894] Sur quelques points de la théorie des fonctions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 118 (1894), p. 340–342 ; *Œuvres I*, p. 235–237.
 [1895] Sur quelques points de la théorie des fonctions, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 12 (1895), p. 9–55 ; *Œuvres I*, p. 239–285.
 [1898] *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris : Gauthier-Villars, 1898 ; 2^e éd., 1914.
 [1905] Sur une propriété des ensembles fermés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 140 (1905), p. 298–300 ; *Œuvres III*, p. 1249–1250.
 [1912a] Le calcul des intégrales définies, *J. Math. Pures Appl. (6)*, 8 (1912), p. 159–210 ; *Œuvres II*, p. 827–878.
 [1912b] Notice sur les travaux scientifiques de Émile Borel, dans *Œuvres I*, Paris : Gauthier-Villars, 1912, p. 119–190.
 [1919] Sur l'intégration des fonctions non bornées et sur les définitions constructives, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 36 (1919), p. 71–91 ; *Œuvres II*, p. 879–899.
- BRU (Bernard), BRU (Marie-France) & CHUNG (Kai Lai)
 [1999] Borel et la martingale de Saint-Petersbourg, *Rev. Histoire Math.*, 5 (1999), p. 181–247.
- BRU (Bernard) & DUGAC (Pierre), éd.
 [1991] Lettres de Henri Lebesgue à Émile Borel, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 12 (1991), p. 1–511.
- CARTAN (Henri)
 [1934] Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 199 (1934), p. 1284–1287.

ČECH (Eduard)

- [1937] On bicompact spaces, *Ann. of Math.*, 38 (1937), p. 823–844.

COUSIN (Pierre)

- [1895] Sur les fonctions de n variables complexes, *Acta Math.*, 19 (1895), p. 1–61.

DARBOUX (Gaston)

- [1875] Mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (2)*, 4 (1875), p. 57–112.

DINI (Ulisse)

- [1878] *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pise, 1878; trad. allemande par Lüroth (Jacob) & Schepp (Adolph), *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse*, Leipzig : Teubner, 1892.

DIRICHLET (Peter G. Lejeune)

- [1854/1904] *G. Lejeune-Dirichlets Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen*, éd. par Arendt (Gustav), Braunschweig : Vieweg, 1854/1904; [Leçons de 1854 à l'Université de Berlin].

DUGAC (Pierre)

- [1989] Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schönflies-Lebesgue, *Arch. Internat. Hist. Sci.*, 39 (1989), p. 69–110.

- [2003] *Histoire de l'analyse*, Paris : Vuibert, 2003.

FRÉCHET (Maurice)

- [1906] Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 22 (1906), p. 1–74.

GISPERT (Hélène)

- [1983] Sur les fondements de l'analyse en France, *Arch. Internat. Hist. Sci.*, 28 (1983), p. 37–106.

- [1995] La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue... et tous les autres, *Rev. Histoire Math.*, 1 (1995), p. 39–81.

HANKEL (Hermann)

- [1870-82] Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen (Abdruck aus dem Gratulationsprogramm der Tübinger Universität vom 6. März 1870), *Math. Ann.*, 20 (1882), p. 63–112.

HARNACK (Axel)

- [1885] Ueber den Inhalt von Punktmengen, *Math. Ann.*, 25 (1885), p. 241–250.

HAWKINS (Thomas)

- [1970] *Lebesgue's Theory of Integration ; its Origins and Development*, Madison (Wis.) : The University of Wisconsin Press, 1970; reprint New York : Chelsea Publ. C^o, 1975.

HEINE (Eduard)

- [1872] Die Elemente der Functionenlehre, *J. reine angew. Math.*, 74 (1872), p. 172–188.

- [1878-81] *Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendungen*, vol. 2, Berlin : G. Reimer, 1878-81.
- HILDEBRANDT (Theophil H.)
- [1926] The Borel theorem and its generalizations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 32 (1926), p. 423–474; réimp. dans Abbott (J.C.), éd., *The Chauvenet Papers*, Washington : The Mathematical Association of America, 1978, vol. I, p. 28–62.
- KOWALEWSKI (Gerhard)
- [1906] Notizen und Besprechungen : G. Lejeune-Dirichlets Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, herausgegeben von G. Arendt, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 15 (1906), p. 160–164.
- LEBESGUE (Henri)
- [1904] *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris : Gauthier-Villars, 1904.
- [1907] Comptes rendus et analyses : Young (W.-H.) & Chisholm Young (Grace) – The theory of sets of points, Cambridge : Cambridge University Press, *Bull. Sci. Math. (2)*, 31 (1907), p. 129–135.
- [1918] Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 35 (1918), p. 191–250.
- LÜROTH (Jacob)
- [1873] Bemerkung über gleichmässige Stetigkeit, *Math. Ann.*, 6 (1873), p. 319–320.
- MAUREY (Bernard) & TACCHI (Jean-Pierre)
- [2002] Ludwig Scheeffer et les extensions du théorème des accroissements finis, *Publications du Centre universitaire de Luxembourg, Travaux mathématiques*, fasc. XIII (2002), p. 1–60.
- OSGOOD (William Fogg)
- [1924] *Lehrbuch der Funktionentheorie*, vol. 2, Leipzig : Teubner, 1924.
- PIER (Jean-Paul)
- [1996] *Histoire de l'intégration*, Paris : Masson, 1996.
- PINCHERLE (Salvatore)
- [1882] Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche, *Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, IV, 3 (1882), p. 149–180; *Opere scelte*, vol. I, p. 64–91.
- PISIER (Gilles)
- [1989] The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry, dans *Tracts of Mathematics*, vol. 94, Cambridge : Cambridge University Press, 1989.
- POINCARÉ (Henri)
- [1883] Sur les fonctions à espaces lacunaires, *Acta Societatis scientiarum Fennicae*, 12 (1883), p. 343–350; *Œuvres de Henri Poincaré*, t. IV, Paris : Gauthier-Villars, p. 28–35.
- [1892] Sur les fonctions à espaces lacunaires, *Amer. J. Math.*, 14 (1892), p. 201–221; *Œuvres de Henri Poincaré*, t. IV, Paris : Gauthier-Villars, p. 36-56.

ROSENTHAL (Artur)

- [1923-27] Die Punktmenngen, dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, II.3.2, « Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen » , 1923-27, p. 855–1030.

SCHEEFFER (Ludwig)

- [1884-85] Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen, [2^e partie], *Acta Math.*, 5 (1884-85), p. 279–296.

SCHÖNFLIES (Arthur)

- [1900] Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 8 (1899), p. 1–250; [2^e partie terminée et publiée en 1900].

- [1913] Über einen Youngschen Beweis des verallgemeinerten Borelschen Intervalltheorems, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 35 (1913), p. 74–78.

TANNERY (Jules)

- [1904] Comptes rendus et analyses : Arendt (G.) – Lejeune-Dirichlet's Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, *Bull. Sci. Math. (2)*, 28 (1904), p. 297–300.

THOMAE (Johannes)

- [1873] *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und Thetafunctionen einer Veränderlichen*, 2^e éd., Halle édition, 1873.

TYCHONOFF (Andreï N.)

- [1930] Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.*, 102 (1930), p. 544–561.

VEBLEN (Oswald)

- [1904] The Heine-Borel theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 10 (1904), p. 436–439.

VITALI (Giuseppe)

- [1904] Sulla integrabilità delle funzioni, *Rendiconti del R. Istituto Lombardo di sc. e Lett.*, (II), 37 (1904), p. 69–73; *Opere sull'analisi reale e complessa*, p. 133–137.

WEIERSTRASS (Karl)

- [1881] Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques, *Bull. Sci. Math. (2)*, 5 (1881), p. 157–181; traduit des *Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1880, p. 719–743; *Mathematische Werke* II, Berlin 1895, réimp. G. Olms, 1967, p. 201-223.

YOUNG (William H.)

- [1902-03] Overlapping intervals, *Proc. London Math. Soc.*, 35 (1902-03), p. 384–388.

YOUNG (William H.) & CHISHOLM-YOUNG (Grace)

- [1906] *The Theory of Sets of Points*, Cambridge : Cambridge University Press, 1906.

ZORETTI (Ludovic)

- [1912] Les ensembles de points, dans *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, « Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions », t. II, vol. 1, fasc. 2, Paris/Leipzig : Gauthier-Villars/Teubner, 1912, p. 113–170.