Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

B. Lemaire

Fondements, généralisation et critique de la notion d'affinité (Problème du voyageur de commerce)

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 10, n° V3 (1976), p. 43-57

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1976__10_3_43_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle
(vol. 10, n° 10, octobre 1976, p. 43 à 57)

FONDEMENTS, GÉNÉRALISATION ET CRITIQUE DE LA NOTION D'AFFINITÉ (*)
(Problème du voyageur de commerce)

par B. LEMAIRE [1]

Résumé. — *En s'appuyant sur les dénombrements d'un article précédent* [7], *on établit le coût moyen des cycles hamiltoniens* (*C.H.*) *de* K_n (*dont les arêtes ont été valuées*), *passant par une arête donnée ij, puis évitant cette arête: la différence des deux s'interprète comme un gain moyen, qui permet de définir et interpréter la notion d'affinité* a_{ij} *due à Vo-Khac.*

Puis on cherche ce gain moyen pour les C.H. empruntant deux arêtes données : si elles sont adjacentes (*soient ij et jk*), *ce gain s'exprime uniquement en fonction de* a_{ij} *et* a_{jk}*; ce n'est plus le cas si les deux arêtes ne sont pas adjacentes, et — d'une manière générale — dès que l'on se donne plus de deux aretes d'un C.H. : d'où une critique quant à la signification de l'affinité, lorsqu'on l'utilise dans un algorithme S.E.P. avec une liste hiérarchique des affinités.*

Dans la seconde partie, on introduit les coûts « régularisés » qui généralisent la notion d'écartement au travers d'un calcul de récurrence, et débouchent sur une autre introduction de l'affinité.

I

1. Supposons les arêtes de K_n valuées par des nombres c_{ij} (distance ou coût de passage de i à j); par convention : $c_{ii} = 0$.

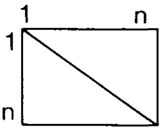
On pose :

$$\Gamma_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}$$

appelé « centration » du sommet i et :

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_i$$

« centration totale du graphe ».



Les c_{ij} peuvent être rangés dans un tableau carré, qui sera symétrique et dont les éléments diagonaux sont nuls.

Remarquons que Γ est la somme de tous les éléments du tableau et que $\sum_{ij \in K_n} c_{ij}$ est la somme des éléments du triangle inférieur (ou supérieur) et vaut donc $\Gamma/2$.

(*) Reçu juin 1975.
(1) Maître-Assistant au Conservatoire national des Arts et Métiers.

D'après [7], le nombre de C.H. de K_n passant par une arête donnée ij est : $(n-2)$! La somme γ des coûts de tous les C.H. de K_n est donc :

$$\sum_{ij \in K_n} c_{ij}(n-2)! = \gamma$$

soit :

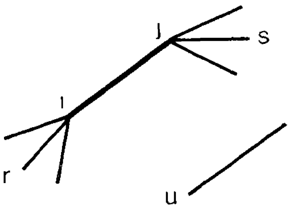
$$\boxed{(n-2)!\,\Gamma/2 = \gamma.}$$

Comme il existe $(n-1)!/2$ C.H. dans K_n, le coût moyen d'un C.H., que nous noterons $\langle C \rangle$, est :

$$\langle C \rangle = \frac{(n-2)!\,\Gamma/2}{(n-1)!/2} \quad \text{soit :} \quad \boxed{\langle C \rangle = \frac{\Gamma}{n-1}}$$

N. B. : Nous reprenons ici les notations de Vo-Khac [10]. Γ_i n'a rien à voir avec la notation de Berge. D'autre part, les résultats des dénombrements, utilisés figurent tous dans le tableau récapitulatif de [7].

2. α) Cherchons le coût moyen des C.H. passant par l'arête ij fixée, noté $\langle C_{ij} \rangle$. D'après [7] par ij, passent $(n-2)$! C.H. Par les arêtes du type ri ($r \neq j$) ou js ($s \neq i$) adjacentes à ij, il passe $(n-3)$! C.H. (passant aussi par ij).



Enfin par une arête uv non adjacente à ij, passent $2(n-3)!$ C.H. (passant aussi par ij).

β) Le coût γ_{ij} de tous les cycles hamiltoniens passant par ij est la somme des termes : (coût d'une arête xy) $\times$ nombre de fois où xy est empruntée par un C.H. passant aussi par ij :

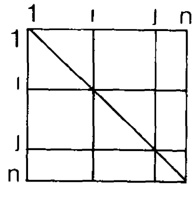
$$\gamma_{ij} = (n-2)!\,c_{ij} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{n} (n-3)!\,c_{ri} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n} (n-3)!\,c_{js} + \sum_{u, v \neq i, j} 2(n-3)!\,c_{uv},$$

$$\gamma_{ij} = (n-2)!\,c_{ij} + (n-3)!\left[\sum_{r \neq j} c_{ri} + \sum_{s \neq i} c_{js}\right] + (n-3)! \sum_{u, v \neq i, j} 2\,c_{uv}.$$

Or :

$$\sum_{r \neq j} c_{ri} = \Gamma_i - c_{ij}; \qquad \sum_{x \neq i} c_{js} = \Gamma_j - c_{ij}.$$

Détaillons le calcul de $\sum_{u, v \neq j, i} 2\,c_{uv}$:



Le $\sum$ représente la somme de tous les éléments du tableau moins les termes figurant dans les lignes ou colonnes i et j; ces derniers ont pour somme :

$$2\,\Gamma_i + 2\,\Gamma_j - 2\,c_{ij}.$$

Comme Γ est la somme de tous les éléments du tableau :

$$\sum_{u,\, v \neq i,\, j} 2\, c_{uv} = \Gamma - 2(\Gamma_i + \Gamma_j) + 2\, c_{ij}.$$

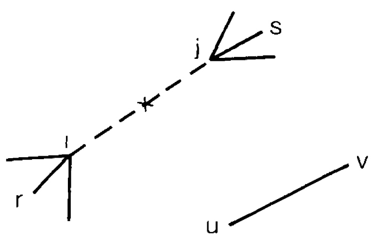
D'où

$$\gamma_{ij} = (n-2)\,!\, c_{ij} + (n-3)\,!\,[\Gamma_i - c_{ij} + \Gamma_j - c_{ij}] + (n-3)\,!\,[\Gamma - 2(\Gamma_i + \Gamma_j) + 2\, c_{ij}],$$

$$\gamma_{ij} = (n-2)\,!\, c_{ij} + (n-3)\,!\,[\Gamma - (\Gamma_i + \Gamma_j)].$$

Comme il existe $(n-2)$! C.H. empruntant l'arête ij, le coût moyen de ces C.H. est :

$$\langle C_{ij} \rangle = \frac{\gamma_{ij}}{(n-2)\,!} \quad \text{soit :} \quad \boxed{\langle C_{ij} \rangle = c_{ij} + \frac{\Gamma}{n-2} - \frac{\Gamma_i + \Gamma_j}{n-2}.}$$



3. α) Cherchons le coût moyen des C.H. évitant l'arête ij, noté $\langle C_{\overline{ij}} \rangle$.

Il y a $(n-2)$! $(n-3)/2$ C.H. de ce type (*cf.* [7]).

Par les arêtes du type $ri\ (r \neq j)$ ou $js\ (s \neq i)$, il passe $(n-3)$! $(n-3)$ C.H. évitant ij. Par les arêtes du type uv (non adjacentes à ij), il passe $(n-3)$! $(n-4)$ C.H. évitant ij.

β) Le coût $\gamma_{\overline{ij}}$ de tous les C.H. évitant ij est alors :

$$\gamma_{\overline{ij}} = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{n} (n-3)\,!\,(n-3)\, c_{ri} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n} (n-3)\,!\,(n-3)\, c_{js} + \sum_{u,\, v \neq i,\, j} (n-3)\,!\,(n-4)\, c_{uv},$$

$$\gamma_{\overline{ij}} = (n-3)!\,(n-3)\,[\Gamma_i - c_{ij} + \Gamma_j - c_{ij}] + (n-3)!\,(n-4)/2\,[\Gamma - 2(\Gamma_i + \Gamma_j) + 2 c_{ij}],$$

$$\gamma_{\overline{ij}} = -(n-2)\,!\, c_{ij} + (n-3)\,!\,(\Gamma_i + \Gamma_j) + \frac{1}{2}(n-3)\,!\,(n-4)\,\Gamma.$$

Comme il existe $(1/2)\,(n-2)$! $(n-3)$ C.H. évitant ij, le coût moyen de ces C.H. est :

$$\langle C(\overline{ij}) \rangle = \frac{2}{(n-2)\,!\,(n-3)}\, \gamma_{\overline{ij}}$$

$$\boxed{\langle C(\overline{ij}) \rangle = \frac{2}{(n-2)(n-3)} [(n-4)\,\Gamma/2 + \Gamma_i + \Gamma_j - (n-2)\, c_{ij}].}$$

REMARQUE : Tout C.H. empruntant ou évitant ij, on peut écrire :

$$\gamma_{ij} + \gamma_{\overline{ij}} = \gamma\,;$$

octobre 1976.

on le vérifie aisément ici. On aurait pu ainsi éviter le calcul du $3-\beta$ en posant directement

$$\gamma_{\bar{i}\bar{j}}=\gamma-\gamma_{ij}.$$

4. Soit $G_{ij}=\langle C_{\bar{i}\bar{j}}\rangle-\langle C_{ij}\rangle$; G_{ij} représente le gain moyen obtenu en empruntant l'arête ij :

$$\boxed{G_{ij}=\frac{n-1}{n-3}\left(-\frac{\Gamma}{(n-2)(n-1)}+\frac{\Gamma_i+\Gamma_j}{n-2}-c_{ij}\right).}$$

5. Définissons, avec Vo-Khac, l'affinité d'une arête ij par

$$\boxed{a_{ij}=\Gamma_i+\Gamma_j-(n-2)\,c_{ij},}\qquad i\neq j$$

alors

$$G_{ij}=\frac{n-1}{(n-2)(n-3)}\cdot\left(-\frac{\Gamma}{n-1}+a_{ij}\right)$$

soit

$$a_{ij}=\langle C\rangle+\frac{(n-2)(n-3)}{n-1}\,G_{ij}.$$

D'autre part, on a les relations :

$$\langle C_{ij}\rangle=\frac{1}{n-2}(\Gamma-a_{ij})\qquad\text{et}\qquad\langle C_{\bar{i}\bar{j}}\rangle=\frac{2}{(n-2)(n-3)}\left(\frac{n-4}{2}\Gamma+a_{ij}\right).$$

Classons les arêtes ij de K_n par affinité décroissante en une liste appelée « liste hiérarchique » :

D'après les formules ci-dessus, ceci revient à classer les arêtes par gain moyen décroissant, ou encore par coût moyen croissant.

D'autre part, en faisant la sommation des affinités des arêtes d'un C.H. $\mathscr{C}$ quelconque de K_n :

$$\sum_{ij\in\mathscr{C}}a_{ij}=\sum_{i\in\mathscr{C}}\Gamma_i+\sum_{j\in\mathscr{C}}\Gamma_j-(n-2)\sum_{ij\in\mathscr{C}}c_{ij}.$$

Tout sommet étant rencontré une seule fois sur un C.H., on obtient :

$$A(\mathscr{C})=\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i+\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j-(n-2)\,C(\mathscr{C}).$$

Donc pour tout C.H., entre la somme des affinités des arêtes de $\mathscr{C}$ et le coût de $\mathscr{C}$ on a la relation :

$$\forall\mathscr{C}\qquad\boxed{A(\mathscr{C})+(n-2)\,C(\mathscr{C})=2\,\Gamma.}$$

COROLLAIRE : *Minimiser le coût d'un C.H. est donc équivalent à maximiser la somme des affinités des arêtes constituant ce C.H.*

REMARQUE : Les centrations (en affinités) de tous les sommets sont égales à Γ :

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} = (n-1)\Gamma_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \Gamma_j - (n-2)\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} c_{ij},$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} = (n-1)\Gamma_i + (\Gamma-\Gamma_i) - (n-2)\Gamma_i = \Gamma.$$

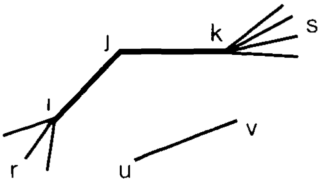
II

Cherchons maintenant à généraliser les résultats précédents, pour les C.H. empruntant deux (ou plusieurs) arêtes fixées :

1. α) Coût moyen des C.H. empruntant deux arêtes adjacentes

Il y a $(n-3)$! C.H. de ce type : comme précédemment on cherche la contribution au coût total $\gamma_{ij,jk}$, des arêtes ij, jk; ir ou ks ($r \neq j, k$ et $s \neq i, j$); uv non adjacentes à ij et jk :

$$\langle C(ij, jk)\rangle = \frac{1}{(n-3)!} \times \Big[(n-3)!(c_{ij}+c_{jk}) + (n-4)!\ \Big(\sum_{r\neq j,k} c_{ir} + \sum_{s\neq j,i} c_{ks}\Big) + 2(n-4)! \sum_{u,v\neq i,j,k} c_{uv}\Big],$$



$$\langle C(ij, jk)\rangle = c_{ij}+c_{jk}+\frac{1}{n-3}(\Gamma_i - c_{ij} - c_{ik} + \Gamma_k - c_{kj} - c_{ki})$$

$$+\frac{1}{n-3}(\Gamma - 2(\Gamma_i+\Gamma_j+\Gamma_k) + 2(c_{ij}+c_{ik}+c_{jk}))$$

$$= \frac{\Gamma}{n-3} - \frac{\Gamma_i+\Gamma_k+2\Gamma_j}{n-3} + \frac{n-2}{n-3}(c_{ij}+c_{jk})$$

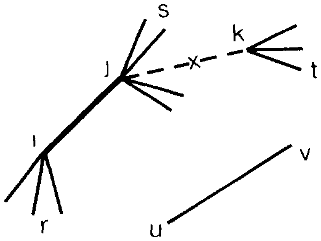
$$= \boxed{\frac{1}{n-3}[\Gamma - (a_{ij}+a_{jk})].}$$

octobre 1976.

β) Coût moyen des C.H. empruntant une arête *ij* et évitant une arête *jk* adjacente

Il y a $(n-3).(n-3)\,!$ C.H. de ce type :

$$\langle C(ij, \overline{jk})\rangle = \frac{1}{(n-3)(n-3)\,!}.\Big[(n-3)(n-3)\,!\,c_{ij}+(n-4)\,!\,(n-4)\sum_{\substack{r\neq j\\ r\neq k}} c_{ir}$$



$$+(n-3)\,!\sum_{\substack{s\neq i\\ s\neq k}} c_{js}+(n-4)\,!\,(2n-7)\sum_{\substack{t\neq i\\ t\neq j}} c_{kt}$$

$$+(n-3)\,!\,c_{ik}+2(n-4)\,!\,(n-4)\sum_{u,\,v\neq i,j,k} c_{uv}\Big].$$

Pour calculer $\gamma_{ij,\,\overline{jk}}$, on doit trouver la contribution de l'arête ij des arêtes de ri ($r \neq j, k$) et $js\,(s \neq k, i)$ adjacentes à ij, des arêtes $kt\,(t \neq i,j)$; de l'arête ik, des arêtes uv adjacentes ni à ij, ni à jk.

$$\langle C(ij, \overline{jk})\rangle = c_{ij}+\frac{c_{ik}}{n-3}+\frac{(n-4)}{(n-3)^2}[(\Gamma_i-c_{ij}-c_{ik})]+\frac{1}{n-3}[(\Gamma_j-c_{ij}-c_{jk})]$$

$$+\frac{(2n-7)}{(n-3)^2}(\Gamma_k-c_{ik}-c_{jk})$$

$$+\frac{n-4}{(n-3)^2}[\Gamma-2(\Gamma_i+\Gamma_j+\Gamma_k)+2(c_{ij}+c_{ik}+c_{jk})]$$

$$=\frac{1}{(n-3)^2}[(n-4)[\Gamma-\Gamma_i-\Gamma_j+(n-2)c_{ij}]+\Gamma_j+\Gamma_k-(n-2)c_{jk}]$$

$$\boxed{=\frac{1}{(n-3)^2}[(n-4)(\Gamma-a_{ij})+a_{jk}].}$$

VÉRIFICATION : Comme plus haut (II.3), on peut écrire :

$$\gamma(ij, jk)+\gamma(ij, \overline{jk}) = \gamma(ij);$$

d'après (II.1 α) :

$$\gamma(ij, jk) = (n-4)\,!\,[\Gamma-(a_{ij}+a_{jk})]$$

et :

$$\gamma(ij) = (n-3)\,!\,(\Gamma-a_{ij}) \qquad \text{car} \quad \gamma(ij, jk) = (n-3)\,!\,\langle C(ij, jk)\rangle.$$

D'où :

$$\gamma(ij, \overline{jk}) = \gamma(ij)-\gamma(ij, jk) = (n-4)\,!\,[(n-4)(\Gamma-a_{ij})+a_{jk}]$$

et :

$$\langle C(ij, \overline{jk})\rangle = \gamma(ij, \overline{jk})/(n-3)(n-3)\,! = \frac{1}{(n-3)^2}[(n-4)(\Gamma-a_{ij})+a_{jk}].$$

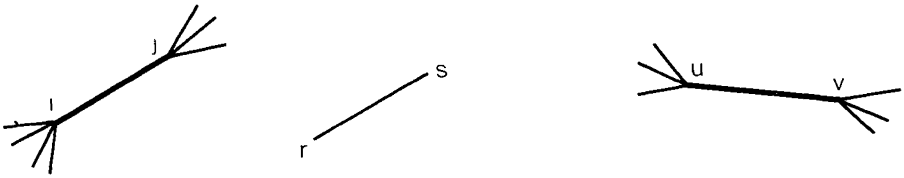
Par suite, le gain moyen obtenu en empruntant l'arête jk pour les C.H. qui empruntent déjà l'arête ij est :

$$G(ij, jk) = \langle C(ij, \overline{jk}) \rangle - \langle C(ij, jk) \rangle = \frac{1}{(n-3)^2}\left[-\Gamma + a_{ij} + (n-2)\, a_{jk}\right]$$

et ces gains sont encore classés comme les affinités a_{jk}. Le « meilleur » choix de la seconde arête dans la liste hiérarchique (après le choix de la première arête de la liste) est donc justifié si la seconde arête est adjacente à la première.

γ) **Coût moyen des C.H. empruntant deux arêtes non adjacentes** ij **et** uv :

$$\begin{aligned}\gamma(ij, uv) = {} & 2(n-3)\,!\,(c_{ij}+c_{uv}) + (n-4)\,!\,(c_{iu}+c_{iv}+c_{ju}+c_{jv}) \\ & + 2(n-4)\,!\,\Big[\sum_{k\neq j,u,v} c_{ik} + \sum_{k\neq i,u,v} c_{jk} \\ & + \sum_{k\neq i,j,v} c_{uk} + \sum_{k\neq i,j,u} c_{vk}\Big] + 4(n-4)\,! \sum_{r,s\neq i,j,u,v} c_{rs},\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\gamma(ij, uv) = {} & 2(n-3)\,!\,(c_{ij}+c_{uv}) \\ & + (n-4)\,!\,(c_{iu}+c_{iv}+c_{ju}+c_{jv}) + 2(n-4)\,!\,[\Gamma - (\Gamma_i+\Gamma_j+\Gamma_u+\Gamma_v)].\end{aligned}$$

Le coût moyen cherché est : $\langle C(ij, uv) \rangle = \gamma(ij, uv)/[2(n-3)\,!]$.

$$\boxed{\begin{aligned}\langle C(ij, uv) \rangle = {} & c_{ij}+c_{uv}+\frac{1}{2(n-3)}(c_{iu}+c_{iv}+c_{ju}+c_{jv}) \\ & -\frac{1}{n-3}(\Gamma_i+\Gamma_j+\Gamma_u+\Gamma_v).\end{aligned}}$$

Il ne s'exprime pas en fonction uniquement de a_{ij} et a_{uv}.

Supposons que l'arête ij soit en tête de la liste hiérarchique (donc celle du plus grande affinité). Ce calcul indique que si la seconde arête de la liste n'est pas adjacente à ij, on ne peut affirmer que (en termes de gain moyen) le meilleur choix, après ij, d'une arête soit la seconde arête de la liste. Ceci remet donc en cause l'efficacité de la liste hiérarchique. Remarquons qu'avec la notion d'écartement, on ne rencontre pas cet inconvénient.

octobre 1976.

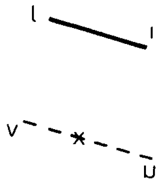
δ) Coût moyen des C.H. empruntant une arête *ij* **et évitant une arête non adjacente** *uv*

$$\gamma(ij, \overline{uv}) = (n-3)\,!\,(n-4)\,c_{ij} + (n-4)\,!\,(n-5)\Big(\sum_{k \neq j,u,v} c_{ik} + \sum_{k \neq i,u,v} c_{jk}\Big)$$

$$+ (n-4)\,!\,(n-4)(c_{iu}+c_{iv}+c_{ju}+c_{jv})$$

$$+ 2(n-4)\,!\,(n-4)\Big(\sum_{k \neq i,j,v} c_{uk} + \sum_{k \neq i,j,v} c_{vk}\Big)$$

$$+ 2(n-4)\,!\,(n-5)\sum_{r,s \neq i,j,u,v} c_{rs}.$$



Le coût moyen cherché est : $\langle C(ij, \overline{uv}) \rangle = \gamma(ij, \overline{uv})/[(n-3)\,!\,(n-4)]$

$$\boxed{\begin{aligned} \langle C(ij, \overline{uv}) \rangle = c_{ij} - \frac{2}{n-4}\,c_{uv} + \frac{2(\Gamma_u+\Gamma_v)-(c_{iu}+c_{iv}+c_{ju}+c_{jv})}{(n-3)(n-4)} \\ + \frac{n-5}{(n-3)(n-4)}\,\Gamma - (\Gamma_i+\Gamma_j). \end{aligned}}$$

Il ne s'exprime pas non plus en fonction des seules affinités a_{ij} et a_{uv}.

Vérification de : $\gamma(ij, uv) + \gamma(ij, \overline{uv}) = \gamma(ij)$.

Le premier membre vaut :

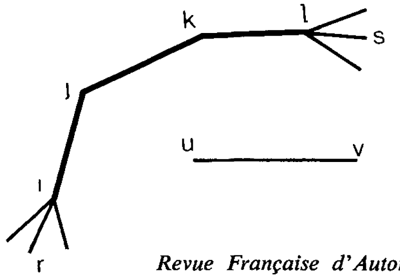
$$(n-3)\,!\,(2+n-4)\,c_{ij} + (n-4)\,!\,(2+n-5)[\Gamma - (\Gamma_i+\Gamma_j)]$$

$$= (n-2)\,!\,c_{ij} + (n-3)\,!\,[\Gamma - (\Gamma_i+\Gamma_j)] = (n-3)\,!\,[\Gamma - (\Gamma_i+\Gamma_j) + (n-2)\,c_{ij}]$$

$$= (n-3)\,!\,[\Gamma - a_{ij}] = \gamma(ij).$$

ε) Coût moyen des C.H. empruntant trois arêtes adjacentes : *ij*, *jk*, *kl*

$$\langle C(ij, jk, kl) \rangle = \frac{1}{(n-4)\,!}\Big[(n-4)\,!\,(c_{ij}+c_{jk}+c_{kl})$$



$$+ (n-5)\,!\,\Big(\sum_{r \neq j,k,l} c_{ri} + \sum_{s \neq i,j,k} c_{ls}\Big)$$

$$+ 2(n-5)\,!\sum_{\substack{u,v \neq i,j \\ k,l}} c_{uv}\Big].$$

Il y a $(n-5)!$ C.H. passant par $ri\,(h \neq j, k, l)$ ou par $ls\,(h \neq i, j, k)$; $2\,(n-5)!$ C.H. passant par uv non adjacente à $\{ij, jk, kl\}$,

$$\langle C(ij, jk, kl)\rangle$$

$$= c_{ij}+c_{jk}+c_{kl}+\frac{1}{n-4}(\Gamma_i-c_{ij}-c_{ik}-c_{il}-\Gamma_l-c_{il}-c_{jl}-c_{kl})$$

$$+\frac{1}{n-4}(\Gamma-2(\Gamma_i+\Gamma_j+\Gamma_k+\Gamma_l)+2(c_{ij}+c_{ik}+c_{il}+c_{jk}+c_{jl}+c_{kl}))$$

$$= c_{ij}+c_{jk}+c_{kl}+\frac{1}{n-4}\left[\Gamma-(\Gamma_i+2\,\Gamma_j+2\,\Gamma_k+\Gamma_l)+(c_{ij}+c_{ik}+2\,c_{jk}+c_{lj}+c_{lk})\right].$$

Ce coût ne peut pas être exprimé uniquement en fonction a_{ij}, a_{jk} et a_{kl} : même si dans la liste hiérarchique la seconde arête était adjacente à la première, le meilleur choix peut, à nouveau, ne pas être la troisième arête de la liste.

CONCLUSION : Dans une méthode de construction progressive, arête par arête, d'une solution du problème du voyageur de commerce (que l'on emploie une heuristique ou bien un algorithme de recherche arborescente), le classement statique des arêtes par affinité décroissante en une liste hiérarchique est tout à fait remis en cause quant à son efficacité dès que l'on a introduit dans un C.H. l'arête située en tête de cette liste. En effet, le gain moyen associé à la seconde arête de la liste (et – *a fortiori* – de la troisième, etc.) n'est pas généralement le plus grand. Une liste hiérarchique par écartements décroissants ne présente pas cet inconvénient.

III

COÛTS RÉGULARISÉS

On propose, ici, une démonstration détaillée de formules proposées par Vo-Khac. L'écartement $e^k(i, j)$ d'une arête ij par rapport au sommet k est

$$e^k(i, j) = c(i, k)+c(k, j)-c(i, j).$$

Le coût « moyen » de l'arête ij, noté $c_1(i, j)$ est défini par Vo-Khac [10] comme l'opposé de la moyenne des écartements des arêtes :

$$c_1(i, j) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^k(i, j),$$

soit en remplaçant $e^k(i, j)$:

$$c_1(i, j) = c_0(i, j)-\frac{\Gamma(i)+\Gamma(j)}{n}.$$

La transformation $c_0(i, j) \rightarrow c_1(i, j)$ est donc admissible.

octobre 1976.

On a posé : $c_0(i,j) = c(i,j)$; $\Gamma(i)$ est la centration du sommet $i : \Gamma(i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} c(i,k)$.

L'idée étant de chercher à profiter de la notion d'écartement sans privilégier dans le problème du voyageur de commerce, un sommet particulier, on a calculé la moyenne des écartements.

On définit, par récurrence, le coût moyen d'ordre $p+1$ d'une arête ij :

$$\boxed{c_{p+1}(i,j) = -\frac{1}{n}(\Gamma_p(i)+\Gamma_p(j))+c_p(i,j)}$$

avec

$$\begin{cases} \Gamma_p(i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} c_p(i,k), \\ \Gamma_0(i) = \Gamma(i). \end{cases}$$

Exemple : Calcul de $c_2(i,j)$:

$$c_2(i,j) = -\frac{1}{n}\left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} c_1(i,k) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} c_1(k,j)\right] + c_1(i,j),$$

$$c_2(i,j) = -\frac{1}{n}\left[\sum_{k \neq i} c(i,k) - \frac{\Gamma(i)+\Gamma(k)}{n}\right.$$
$$\left. + \sum_{k \neq j} c(k,j) - \frac{\Gamma(k)+\Gamma(j)}{n}\right] + c(i,j) - \frac{\Gamma(i)+\Gamma(j)}{n},$$

$$c_2(i,j) = -\frac{1}{n}\left[\left(\Gamma(i) - \frac{n-1}{n}\Gamma(i) - \frac{\Gamma-\Gamma(i)}{n}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\Gamma(j) - \frac{\Gamma-\Gamma(j)}{n} - \frac{n-1}{n}\Gamma(j)\right)\right] + c(i,j) - \frac{\Gamma(i)+\Gamma(j)}{n},$$

$$c_2(i,j) = c(i,j) + \frac{2\Gamma}{n^2} - \frac{n+2}{n^2}\Gamma(i)+\Gamma(j).$$

On a posé $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \Gamma(k)$, « centration totale » du graphe.

Vue la forme de $c_0(i,j)$, $c_1(i,j)$ et $c_2(i,j)$, nous supposerons que $c_p(i,j)$ est de la forme :

$$c_p(i,j) = c(i,j) + \lambda_p \Gamma - \mu_p[\Gamma(i)+\Gamma(j)];$$

calculons alors $c_{p+1}(i, j)$:

$$c_{p+1}(i,j) = c_p(i,j) - \frac{1}{n}[\Gamma_p(i)+\Gamma_p(j)]$$
$$= c(i,j)+\lambda_p\Gamma-\mu_p[\Gamma(i)+\Gamma(j)] - \frac{1}{n}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} c_p(i,k)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} c_p(k,j)\right];$$

détaillons le calcul du premier sigma :

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} c_p(i,k) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (c(i,k)+\lambda_p\Gamma-\mu_p[\Gamma(i)+\Gamma(k)])$$
$$= \Gamma(i)+(n-1)\lambda_p\Gamma-(n-1)\mu_p\Gamma(i)-\mu_p(\Gamma-\Gamma(i)),$$
$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} c_p(k,j) = \Gamma(j)+(n-1)\lambda_p\Gamma-(n-1)\mu_p\Gamma(j)-\mu_p(\Gamma-\Gamma(j));$$

D'où :

$$c_{p+1}(i,j) = c(i,j)+\Gamma\left(\lambda_p-\frac{2(n-1)}{n}\lambda_p+\frac{2\mu_p}{n}\right)$$
$$-(\Gamma(i)+\Gamma(j))\left(\mu_p+\frac{1}{n}-\frac{n-2}{n}\mu_p\right),$$

finalement $c_{p+1}(i, j)$ est de la forme :

$$c_{p+1}(i,j) = c(i,j)+\lambda_{p+1}\Gamma-\mu_{p+1}[\Gamma(i)+\Gamma(j)],$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{p+1} &= -\frac{n-2}{n}\lambda_p+\frac{2\mu_p}{n},\\ \mu_{p+1} &= \frac{2\mu_p}{n}+\frac{1}{n}.\end{aligned}}$$

Nous allons maintenant calculer λ_p et μ_p en fonction de p (et de la constante n) :

Calcul de μ_p : n étant constant on a : $\mu_{p+1}-(2/n)\,\mu_p = 1/n$: équation de récurrence linéaire, portant sur deux termes consécutifs, avec second membre On sait que la solution est la somme de la solution générale sans second membre et d'une solution particulière avec second membre (noter l'analogie avec les équations différentielles).

On a une solution particulière avec second membre, constante : posons $\mu_{p+1} = \mu_p = \ldots = \mu$:

$$\mu - \frac{2}{n}\mu = \frac{1}{n}, \qquad \text{d'où} \quad \mu = \frac{1}{n-2}.$$

L'équation sans second membre est $\mu_{p+1} - (2/n)\,\mu_p = 0$; on cherche des solutions de la forme $\mu_p = a.r^p$, d'où $r-(2/n) = 0$ soit $r = 2/n$ et $\mu_p = a\,(2/n)^p$.

Pour la suite donnée la solution est alors : $\mu_p = [1/(n-2)] + a\,(2/n)^p$. Comme $\mu_0 = 0$ on doit avoir $a = -1/(n-2)$. Finalement :

$$\mu_p = \frac{1}{n-2}\left[1-\left(\frac{2}{n}\right)^p\right].$$

Calcul de λ_p : En remplaçant μ_p par sa valeur, on obtient

$$\lambda_{p+1} = -\frac{(n-2)}{n}\lambda_p + \frac{2}{n(n-2)}\left[1-\left(\frac{2}{n}\right)^p\right]. \tag{1}$$

Pour se débarrasser du terme non constant en $(2/n)^p$ nous allons écrire :

$$\lambda_p = -\frac{(n-2)}{n}\lambda_{p-1} + \frac{2}{n(n-2)}\left[1-\left(\frac{2}{n}\right)^{p-1}\right] \tag{2}$$

et faire la combinaison linéaire : (1) $-\dfrac{2}{n}$ (2),

$$\lambda_{p+1} - \frac{2}{n}\lambda_p = -\frac{(n-2)}{n}\lambda_p + \frac{2(n-2)}{n^2}\lambda_{p-1} + \frac{2}{n(n-2)}\left(1-\frac{2}{n}\right).$$

D'où

$$n^2\lambda_{p+1} + n(n-4)\lambda_p - 2(n-2)\lambda_{p-1} = 2. \tag{3}$$

On obtient une équation linéaire de récurrence, portant sur trois termes consécutifs avec second membre. On procède comme ci-dessus :

Cherchons d'abord une solution particulière avec second membre qui soit une constante λ :

$$n^2\lambda + n(n-4)\lambda - 2(n-2)\lambda = 2$$

soit

$$\lambda(2n^2 - 6n + 4) = 2, \qquad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{1}{(n-1)(n-2)}.$$

Pour l'équation sans second membre : on cherche des solutions de la forme $\lambda^p = \alpha . r^p$: l'équation caractéristique est : $n^2 r^2 + n(n-4) r - 2(n-2) = 0$; $\Delta = n^2 (n-4)^2 + 8 n^2 (n-2) = n^4$, d'où :

$$r = -\frac{n(n-4)+n^2}{2n^2} \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{2}{n}, \quad r_2 = \frac{2}{n} - 1;$$

d'où

$$\lambda'_p = \alpha (r_1)^p + \beta r_2^p = \alpha \left(\frac{2}{n}\right)^p + \beta \left(\frac{2}{n} - 1\right)^p;$$

En repassant à la suite initiale :

$$\lambda_p = \alpha \left(\frac{2}{n}\right)^p + \beta \left(\frac{2}{n} - 1\right)^p + \frac{1}{(n-1)(n-2)};$$

or $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ d'où le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}, \\ \left(\dfrac{2}{n}\right)\alpha + \left(\dfrac{2}{n} - 1\right)\beta = -\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}, \end{cases}$$

d'où :

$$\alpha = -\frac{2}{n(n-2)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{n(n-1)}.$$

D'où :

$$\lambda_p = \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{2}{n(n-2)} \left(\frac{2}{n}\right)^p + \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{2}{n} - 1\right)^p.$$

PASSAGE A LA LIMITE : Cherchons $\lim_{p \to \infty} c_p$; on a immédiatement :

$$\lim_{p \to \infty} \mu_p = \frac{1}{n-2} \quad \text{et} \quad \lim_{p \to \infty} \lambda_p = \frac{1}{(n-1)(n-2)},$$

car :

$$\left|\frac{2}{n}\right| < 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{2}{n} - 1\right| < 1.$$

On peut poser $c_\infty (i, j) = c(i, j) + \lambda_\infty \Gamma - \mu_\infty (\Gamma(i) + \Gamma(j))$.

$c_\infty (i, j)$ est appelé le coût régularisé de l'arête ij :

$$\boxed{c_\infty (i, j) = c(i, j) + \frac{\Gamma}{(n-1)(n-2)} - \frac{\Gamma(i) + \Gamma(j)}{n-2}.}$$

octobre 1976.

PROPRIÉTÉS : 1° Tous les sommets ont une centration en coûts régularisés, nulle :

$$\Gamma_\infty(i) = 0.$$

2° Une translation ne modifie pas les coûts régularisés : à la ligne et à la colonne k de la matrice, on ajoute α_k : $\Gamma_{(k)}$ augmente de $(n-1)\,\alpha_k$, les autres centrations augmentant de α_k et la centration totale augmente de $2\,(n-1)\,\alpha_k$;

pour $i, j \neq k$, après translation :

$$c'_\infty(i, j) = c(i, j) + \frac{\Gamma + 2(n-1)\alpha_k}{(n-1)(n-2)} - \frac{\Gamma(i) + \Gamma(j) + 2\alpha_k}{n-2} = c_\infty(i, j),$$

pour $i, j = k$,

$$c'_\infty(i, k) = c(i, k) + \alpha_k + \frac{\Gamma + 2(n-1)\alpha_k}{(n-1)(n-2)} - \frac{\Gamma(k) + \Gamma(i) + n\,\alpha_k}{n-2} = c_\infty(i, j).$$

Si on définit l'affinité de l'arête ij par $a(i, j) = \Gamma(i) + \Gamma(j) - (n-2)\,c(i, j)$,

$$c_\infty(i, j) = -\frac{a(i, j)}{n-2} + \frac{\Gamma}{(n-1)(n-2)}.$$

Les coûts régularisés sont donc classés par ordre inverse de celui des affinités.

N. B. : Les calculs ci-dessus s'étendent sans difficulté pour un graphe orienté, complet mais tel que les coûts ne soient pas symétriques; $c(i, j) \neq c(j, i)$.

On posera

$$\gamma(i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} c(i, k) \qquad \text{et} \qquad \delta(i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} c(k, i); \qquad \Gamma = \sum_{1}^{n} \gamma(i) = \sum_{1}^{n} \delta(i).$$

On obtient

$$c_1(i, j) = c(i, j) - \frac{\gamma(i) + \delta(j)}{n};$$

on définit alors $\gamma_p(i)$ et $\delta_p(i)$ comme ci-dessus.

On pose

$$c_{p+1}(i, j) = c_p(i, j) - \frac{1}{n}\left[\gamma_p(i) + \delta(j)\right]$$

et ainsi de suite.

Il suffit de remplacer $\Gamma(i) + \Gamma(j)$ par $\gamma(i) + \delta(j)$ dans la suite.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
2. C. BERGE, *Principes de Combinatoire*, Dunod, Paris, 1968.

3. P. BERTIER, *Procédures pour élaborer des tournées de distribution*, Metra série spéciale, n° 8, 1966, p. 1-114.
4. D. FOATA, *Enumerating k-Trees*, Discrete Mathematics, vol. 1, n° 2, 1971, p. 181-186.
5. M. HELD et R. KARP, *The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees*, Operations Research, vol. 18, 1970.
6. M. HELD et R. KARP, *The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees*, part II, Research report, University of California, Berkeley.
7. B. LEMAIRE, *Dénombrement des cycles hamiltoniens de K_n et $K_{n,n}$ empruntant ou évitant des arêtes données*, R.A.I.R.O., 5e année, V 1, 1975, p. 101-111.
8. B. LEMAIRE, *Problèmes de tournées avec contraintes multiples*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paris VI, 1971.
9. B. ROY, *Procédure d'exploration par séparation et évaluation, (PSEP et PSES)*, R.I.R.O., 3e année, V 1, 1969, p. 61-90.
10. K. VO-KHAC, *La régularisation dans les problèmes combinatoires et son application au problème des tournées de livraison*, R.I.R.O., 3e année, 1969, V 1, p. 91-104.

octobre 1976.