REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. ROUZET

Contrôle statistique de réception. Comparaison des ASN, des plans simple, double, multiple, progressif dans le cas de contrôle simultané ou successif

Revue de statistique appliquée, tome 5, nº 4 (1957), p. 13-31

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1957__5_4_13_0>

CONTROLE STATISTIQUE DE RÉCEPTION

COMPARAISON DES ASN, DES PLANS SIMPLE, DOUBLE, MULTIPLE, PROGRESSIF [1] DANS LE CAS DE CONTROLE SIMULTANÉ OU SUCCESSIF

par

G. ROUZET

Ingénieur à la Compagnie des compteurs

Dans l'exposé des techniques de Contrôle Statistique de Réception, on est amené à comparer les ASN des plans simple, double, multiple, progressif, correspondant à une courbe d'efficacité analogue, de façon à montrer que, par rapport au plan simple, l'emploi de plans dont l'application est sans doute un peu moins aisée, permet en revanche une économie parfois importante.

On a l'habitude, pour ce faire, de considérer que chaque prélèvement que le plan peut nous conduire à effectuer, constitue un bloc. C'est-à-dire que lorsqu'on devra prendre un ième prélèvement de taille n_i, *on prélèvera effectivement et l'on contrôlera ces* n_i *individus, sans s'occuper de la possibilité de prendre une décision en cours de route.*

Dans le cas où le contrôle consiste en un essai, parfois long, effectué simultanément sur l'ensemble des individus du prélèvement (essai de vieillissement, d'usure, essais en étuve, etc.) cette façon de voir se trouve pleinement justifiée .

Dans le cas où le contrôle est effectué successivement sur les unités du prélèvement, on peut également adopter cette attitude. Mais on peut aussi convenir d'arrêter le contrôle dès que l'on peut connaître la décision finale, sans que celle-ci puisse être modifiée par le résultat du contrôle des autres individus du prélèvement. Ainsi, par exemple, si l'on utilise un plan simple de caractéristiques n, A, R *et que les* R *premières pièces sont trouvées défectueuses, on peut dès lors conclure au refus du lot.*

Adopter cette seconde attitude plutôt que la première, ne change en rien la courbe d'efficacité du plan choisi, puisque la décision est la même, mais permet de diminuer la valeur de l'ASN.

Il faut alors étudier les nouvelles courbes ASN *et, en particulier, comparer à nouveau dans cette hypothèse les courbes respectives des plans simple, double, multiple ou progressif.*

*Si l'on admet, ce que nous allons vérifier, que ces plans, pris dans cet ordre, restent de plus en plus économiques, on peut dire que le plan progressif sera sans doute le plus généralement utilisé; l'adoption d'un autre plan résultera alors en principe d'autres considérations, telles que, précisément, la notion de temps de contrôle dans le cas d'essais de vieillissement, d'usure, etc. La première attitude trouve donc, a posté*riori, *une justification nouvelle. Mais il n'en reste pas moins vrai qu'*a priori *l'étude envisagée est nécessaire; et dans tous les cas, elle présente un intérêt certain.*

Pour désigner aisément chacune des deux attitudes possibles que nous venons de distinguer, nous dirons qu'il s'agit dans le premier cas de « contrôle simultané » et dans le second, de « contrôle successif ».

A. REMARQUES PRÉLIMINAIRES

a) On sait que la position relative des courbes ASN des plans simple, double, multiple et progressif correspondant à une même courbe d'efficacité, se conserve, dans le cas du contrôle simultané, lorsqu'on fait varier cette dernière. Il en est évidemment de même dans le cas du contrôle successif. Nous allons donc pouvoir nous borner à effectuer la comparaison précise des ASN dans un cas

(1) Communication présentée aux Journées d'Etude et de Discussion du Centre de Formation (Juillet 1957).

particulier; ce qui nous évite d'avoir à affronter l'extrême complexité d'une étude générale.

Le cas particulier choisi est celui des plans F_f des tables SRG, sur la définition desquels nous reviendrons en temps utile.

b) Les calculs qui aboutissent aux résultats que nous allons donner sont en général trop longs et ne présentent pas en eux-mêmes d'intérêt particulier. Nous nous contenterons donc, pour alléger le texte, d'en donner le principe et les grandes lignes.

c) Chacun des résultats peut être mis sous différentes formes. Par exemple, la probabilité d'accepter un lot contenant une proportion ϖ de défectueux, peut s'exprimer soit directement par une fonction de ϖ, soit par l'intermédiaire de probabilités lues dans les tables de la loi binomiale, soit par l'intermédiaire de valeurs lues dans les tables de la fonction B incomplète.

Plutôt que d'adopter une présentation unique, nous mettrons chacun des résultats sous la forme la plus propice aux calculs numériques.

d) Rappelons la définition de la notation $I_x(p;q)$, valeur relative de la fonction B incomplète :

$$I_x(p\,;\,q) = \frac{\int_0^x u^{p-1}(1-u)^{q-1}du}{\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du}$$

B. ÉTUDE

Les plans F_f des tables SRG sont caractérisés par les valeurs :

AQL 2,2 à 3,2 %
LT 16 %

Nous prendrons donc comme plan progressif equivalent le plan défini par :

$$\begin{cases} \alpha = 0{,}05 & \varpi_1 = 3\ \% \\ \beta = 0{,}10 & \varpi_2 = 16\ \% \end{cases}$$

Nous vérifierons donc d'abord que ces plans ont une courbe d'efficacité analogue. Nous étudierons ensuite les ASN dans le cas de contrôle simultané puis dans le cas de contrôle successif.

En conséquence, l'étude comprend 11 chapitres récapitulés dans le tableau suivant :

Plan	Courbe d'efficacité	ASN	
		Contrôle simultané	Contrôle successif
Simple	1	5	9
Double	2	6	10
Multiple	3	7	11
Progressif	4	8	

CHAPITRE PREMIER

PLAN SIMPLE, COURBE D'EFFICACITÉ

Le plan simple F_f est défini par :

$$n = 40 \qquad A = 3 \qquad R = 4$$

La courbe d'efficacité est donc définie par :

$$p = \sum_{0}^{3} C_{40}^{k} \varpi^{k} (1 - \varpi)^{40-k}$$

ou encore :

$$\boxed{p = I_{1-\varpi}(37 ; 4)}$$

D'où les valeurs suivantes :

ϖ	p
0	1
0,01	0,9993
0,02	0,9918
0,03	0,9686
0,04	0,9252
0,05	0,8619
0,06	0,7827
0,07	0,6937
0,08	0,6007
0,09	0,5092
0,10	0,4231
0,15	0,1302
0,20	0,0285
0,25	0,0047
0,30	0,0006
1	0

CHAPITRE II

PLAN DOUBLE, COURBE D'EFFICACITÉ

Le plan double F_f est défini par :

$$n_1 = 25 \qquad A_1 = 1 \qquad R_1 = 5$$
$$n_2 = 50 \qquad A_2 = 4 \qquad R_2 = 5$$

La courbe d'efficacité est donc définie par :

$$p = \left| \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k_1=0}^{k_1=1} C_{25}^{k_1} \varpi^{k_1} (1 - \varpi)^{25-k_1} \\ \\ \displaystyle + \sum_{k_1=2}^{k_1=4} C_{25}^{k_1} \varpi^{k_1} (1 - \varpi)^{25-k_1} \sum_{k_2=0}^{k_2=4-k_1} C_{50}^{k_2} \varpi^{k_2} (1 - \varpi)^{50-k_2} \end{array} \right.$$

d'où les valeurs suivantes :

ϖ	p
0	1
0,01	0,9995
0,02	0,9900
0,03	0,9555
0,04	0,8886
0,05	0,7950
0,06	0,6872
0,07	0,5777
0,08	0,4754
0,09	0,3854
0,10	0,3093
0,15	0,0961
0,20	0,0275
1	0

CHAPITRE III

PLAN MULTIPLE, COURBE D'EFFICACITÉ

Le plan multiple F_f est défini par :

$n_1 = 10$		$R_1 = 2$	(on ne peut accepter au 1er prélèvement)
$n_2 = 10$	$A_2 = 0$	$R_2 = 3$	
$n_3 = 10$	$A_3 = 1$	$R_3 = 4$	
$n_4 = 10$	$A_4 = 2$	$R_4 = 5$	
$n_5 = 10$	$A_5 = 4$	$R_5 = 6$	
$n_6 = 10$	$A_6 = 4$	$R_6 = 6$	
$n_7 = 10$	$A_7 = 5$	$R_7 = 6$	

La récapitulation des différents échantillons possibles dont la composition conduit à l'acceptation est faite dans le tableau suivant; pour chaque cas d'acceptation est mentionnée, dans ce tableau, l'expression de la probabilité correspondante, avec :

$$p_k = C_{10}^k \, \varpi^k (1 - \varpi)^{10-k}$$

Le total de ces probabilités, qui est donc la probabilité d'accepter, s'écrit :

$$p = \left| \begin{array}{l} p_0^2 + 2p_0^2 p_1 + 3p_0^2 p_1^2 + p_0^3 p_2 + 4p_0^2 p_1^3 + 4p_0^3 p_1 p_2 + 5p_0 p_1^4 + 10p_0^2 p_1^2 p_2 \\ + p_0^3 p_2^2 + p_0^2 p_1^5 + 10\, p_0^3 p_1^3 p_2 + 5p_0^4 p_1 p_2^2 \end{array} \right.$$

D'où les valeurs suivantes :

ϖ	p
0	1
0,03	0,9484
0,06	0,7584
0,08	0,5841
0,10	0,4024
0,15	0,1203
0,20	0,0274
1	0

1	2	3	4	5	6	7	Expression		
0	0						p_0^2		
	1	0					p_0^2	p_1	
		1	0				p_0^2	p_1^2	
			1	0			p_0^2	p_1^3	
				1			p_0	p_1^4	
				2	0	0	p_0^3	p_1^3	p_2
			2	0			p_0^2	p_1^2	p_2
				1	0	0	p_0^3	p_1^3	p_2
		2	0	0			p_0^3	p_1	p_2
				1			p_0^2	p_1^2	p_2
				2	0	0	p_0^4	p_1	p_2^2
			1	0			p_0^2	p_1^2	p_2
				1	0	0	p_0^3	p_1^3	p_2
	2	0	0				p_0^3		p_2
			1	0			p_0^3	p_1	p_2
				1			p_0^2	p_1^2	p_2
				2	0	0	p_0^4	p_1	p_2
			2	0			p_0^3		p_2^2
				1	0	0	p_0^4	p_1	p_2^2
		1	0	0			p_0^3	p_1	p_2
				1			p_0^2	p_1^2	p_2
				2	0	0	p_0^4	p_1	p_2^2
			1	0			p_0^2	p_1^2	p_2
				1	0	0	p_0^3	p_1^3	p_2
1	0	0					p_0^2	p_1	
		1	0				p_0^2	p_1^2	
			1	0			p_0^2	p_1^3	
				1			p_0	p_1^4	
				2	0	0	p_0^3	p_1^3	p_2
			2	0			p_0^2	p_1^2	p_2
				1	0	0	p_0^3	p_1^3	p_2
		2	0	0			p_0^3	p_1	p_2
				1			p_0^2	p_1^2	p_2
				2	0	0	p_0^4	p_1	p_2^2
			1	0			p_0^2	p_1^2	p_2
				1	0	0	p_0^3	p_1^3	p_2
	1	0	0				p_0^2	p_1^2	
			1	0			p_0^2	p_1^3	
				1			p_0	p_1^4	
				2	0	0	p_0^3	p_1^3	p_2
			2	0			p_0^2	p_1^2	p_2
				1	0	0	p_0^3	p_1^3	p_2
		1	0	0			p_0^2	p_1^3	
				1			p_0	p_1^4	
				2	0	0	p_0^3	p_1^3	p_2
			1	0			p_0	p_1^4	
				1	0	0	p_0^2	p_1^5	

CHAPITRE IV

PLAN PROGRESSIF, COURBE D'EFFICACITÉ

Les trois plans précédents ayant pour caractéristiques :

$$\begin{array}{lll} AQL & \# & 3\ \% \\ LT & \# & 16\ \% \end{array}$$

nous utiliserons le plan progressif défini par :

$$\begin{cases} \varpi_1 = 0{,}03 \\ \varpi_2 = 0{,}16 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 0{,}05 \\ \beta = 0{,}10 \end{array}$$

Les valeurs h_A, h_R et s, définies par :

$$s = \frac{\log \frac{1-\varpi_1}{1-\varpi_2}}{\log \frac{\varpi_2}{\varpi_1} + \log \frac{1-\varpi_1}{1-\varpi_2}}$$

$$h_R = \frac{\log \frac{1-\beta}{\alpha}}{\log \frac{\varpi_2}{\varpi_1} + \log \frac{1-\varpi_1}{1-\varpi_2}}$$

$$h_A = \frac{\log \frac{1-\alpha}{\beta}}{\log \frac{\varpi_2}{\varpi_1} + \log \frac{1-\varpi_1}{1-\varpi_2}}$$

sont égales à :

$$\begin{cases} s = 0{,}0791553 \\ h_R = 1{,}5899767 \\ h_A = 1{,}2384225 \end{cases}$$

On sait que la courbe d'efficacité est définie par des équations paramétriques; dans les expressions suivantes, en donnant à x une valeur supérieure à 1, on obtient deux points (ϖ', p'), (ϖ'', p'') de la courbe d'efficacité :

$$\begin{cases} \varpi' = \dfrac{x^s - 1}{x - 1} \\[2ex] p' = \dfrac{x^{h_A + h_R} - x^{h_A}}{x^{h_A + h_R} - 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varpi'' = x^{1-s}\, \varpi' \\[2ex] p'' = \dfrac{1}{x^{h_A}}\, p' \end{cases}$$

ainsi, on obtient :

pour $x = 10^{\frac{1}{2}}$	$\varpi' = 0,0441196$ $p' = 0,8733269$	$\varpi'' = 0,1273644$ $p'' = 0,2098788$
$x = 10$	$\varpi' = 0,0222111$ $p' = 0,9757433$	$\varpi'' = 0,1851029$ $p'' = 0,0563524$
$x = 10^{\frac{3}{2}}$	$\varpi' = 0,0102667$ $p' = 0,9959384$	$\varpi'' = 0,2470065$ $p'' = 0,0138228$
$x = 10^2$	$\varpi' = 0,0044424$ $p' = 0,9993410$	$\varpi'' = 0,3085380$ $p'' = 0,0033332$

D'autre part, pour $\varpi = s$ (ce qui correspond à $x = 1$ dans les équations ci-dessus) on a :

$$p = \frac{h_R}{h_A + h_R} = 0,5621472.$$

Au total, on pourra donc tracer la courbe d'efficacité par les points suivants:

ϖ	p
0	1
0,0044424	0,9993410
0,0102667	0,9959384
0,0222111	0,9757433
0,0300000	0,9500000
0,0441196	0,8733269
0,0791553	0,5621472
0,1273644	0,2098788
0,1600000	0,1000000
0,1851029	0,0563524
0,2470065	0,0138228
0,3085380	0,0033332
1	0

CHAPITRE V

PLAN SIMPLE, ASN, CONTROLE SIMULTANÉ

Dans ce cas, l'ASN a évidemment la valeur uniforme de :

$$ASN = 40$$

CHAPITRE VI

PLAN DOUBLE, ASN, CONTROLE SIMULTANÉ

Rappelons le plan :

$$\begin{cases} n_1 = 25 & A_1 = 1 & R_1 = 5 \\ n_2 = 50 & A_2 = 4 & R_2 = 5 \end{cases}$$

l'ASN est donc :

$$ASN = 25 + 50 \sum_{k=2}^{k=4} C_{25}^{k}\, \varpi^k (1 - \varpi)^{25-k}$$

ou encore :

$$ASN = 25 + 50 \left[I_{1-\varpi}(21 ; 5) - I_{1-\varpi}(24 ; 2) \right]$$

D'où les valeurs :

ϖ	ASN
0	25
0,02	29,426170
0,04	38,070475
0,06	46,614515
0,08	53,006755
0,10	56,540025
0,13	56,803120
0,15	54,451825
0,20	44,664225
0,30	29,445045
0,50	25,022725
0,75	25,000000
1	25

CHAPITRE VII

PLAN MULTIPLE, ASN, CONTROLE SIMULTANÉ

La taille de chaque prélèvement éventuel étant uniformément de $n_k = 10$, si nous appelons p_k la probabilité d'avoir à effectuer le $k^{\text{ième}}$ prélèvement, l'ASN est :

$$ASN = 10 \sum_{k=1}^{k=7} p_k$$

Les P_k s'expriment en fonction de la probabilité P_d de trouver d pièces défectueuses dans un échantillon de 10 pièces, soit :

$$P_d = C_{10}^{d}\, \varpi^d (1 - \varpi)^{10-d}$$

On a : (pour le plan considéré)

$p_1 = 1$

$p_2 = P_0 + P_1$

$p_3 = 2\,P_0\,P_1 + (P_0\,P_2 + P_1^2)$

$p_4 = (3P_0\,P_1^2 + P_0^2P_2) + (3P_0\,P_1\,P_2 + P_1^3)$

$p_5 = (4\,P_0\,P_1^3 + 4\,P_0^2P_1\,P_2) + (6\,P_0\,P_1^2P_2 + P_0^2P_2^2 + P_1^4)$

$p_6 = 10\,P_0\,P_1^3P_2 + 5\,P_0^2P_1\,P_2^2 + P_1^5$

$p_7 = 10\,P_0^2P_1^3P_2 + 5\,P_0^3P_1\,P_2^2 + P_0\,P_1^5$

d'où, en tenant compte des expressions des P_d :

$$\begin{aligned} ASN = 10 \Big[& 1 + (1-\varpi)^{10} + 10\,\varpi(1-\varpi)^9 + 20\,\varpi(1-\varpi)^{19} + 145\,\varpi^2(1-\varpi)^{18} \\ & + 345\,\varpi^2(1-\varpi)^{28} + 2\,350\,\varpi^3(1-\varpi)^{27} + 5\,800\,\varpi^3(1-\varpi)^{37} \\ & + 39\,025\,\varpi^4(1-\varpi)^{36} + 651\,250\,\varpi^5(1-\varpi)^{45} + 651\,250\,\varpi^5(1-\varpi)^{55} \Big] \end{aligned}$$

D'où les valeurs suivantes :

ϖ	ASN
0	20
0,02	23,7813
0,04	27,7003
0,06	29,6887
0,07	29,9493
0,08	29,7468
0,09	29,1470
0,10	28,0329
0,15	21,7977
0,20	16,5244
0,30	11,8430
0,50	10,1091
1	10

CHAPITRE VIII

PLAN PROGRESSIF, ASN

C'est parce qu'on peut considérer dans son principe le plan progressif comme le cas limite d'un échantillonnage multiple, qu'on peut parler de contrôle simultané ou successif. En fait, à ce stade, le contrôle est nécessairement successif d'où une courbe ASN unique.

Cette courbe est définie par l'équation :

$$ASN = \frac{p\,(h_A + h_R) - h_R}{s - \varpi}$$

le point particulier obtenu pour $\varpi = s$ étant

$$\varpi = s\ , \quad ASN = \frac{h_A\,h_R}{s\,(1-s)}$$

d'où, (à partir des mêmes valeurs de ϖ, considérées dans la courbe d'efficacité) les valeurs :

ϖ	ASN	
0	15,64548	→ donc 16
0,0044424	16,55080	
0,0102667	17,81042	
0,0222111	20,54318	
0,0300000	22,31707	
0,0441196	25,12124	
0,0791553	27,01428	
0,1273644	20,66738	
0,1600000	16,16849	
0,1851029	13,50280	
0,2470065	9,23961	
0,3085380	6,89342	
0,50	3,778	
0,75	2,370	
1	1,72665	→ donc 2

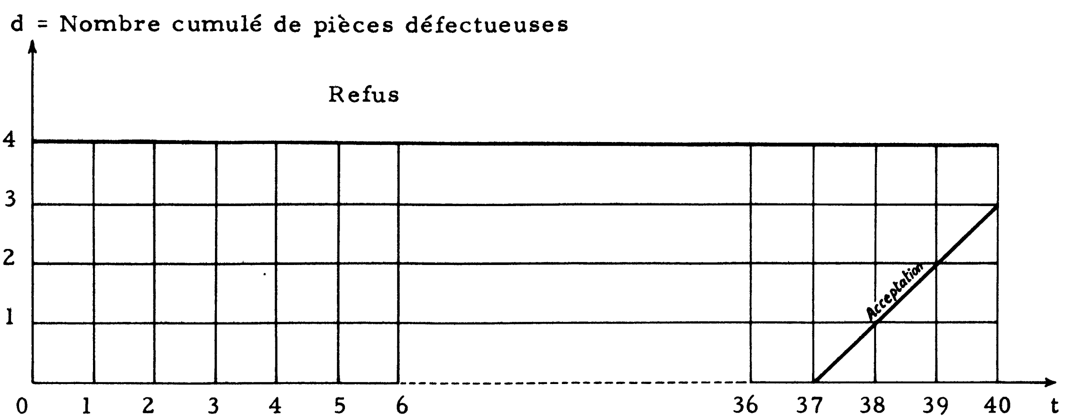
CHAPITRE IX

PLAN SIMPLE, ASN, CONTROLE SUCCESSIF

Par convention, on arrête le contrôle dès que la décision peut être prise; ainsi, dans le cas présent, dès que le nombre de pièces défectueuses atteint 4, on sait que, quel que soit le résultat que donnerait le contrôle des autres pièces de l'échantillon de 40 pièces, le lot sera refusé. La décision peut donc être prise et le contrôle est arrêté. De même, si l'on a :

0 pièce défectueuse à la 37ème pièce prélevée
1 " " " " 38ème " "
2 " " " " 39ème " "

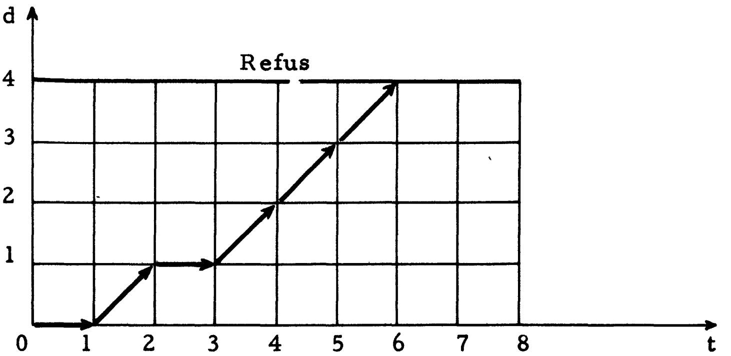
on peut prendre la décision d'acceptation et le contrôle s'arrête là. Après prélèvement de la $t^{\text{ème}}$ pièce de l'échantillon ($4 \leqslant t \leqslant 40$) les limites correspondantes d'acceptation et de refus peuvent donc être traduites par le graphique suivant:



Ainsi, si la :

1ère	pièce	contrôlée	est	bonne
2ème	"	"	"	mauvaise
3ème	"	"	"	bonne
4ème	"	"	"	mauvaise
5ème	"	"	"	mauvaise
6ème	"	"	"	mauvaise

ce qui se traduit sur le graphique par l'itinéraire suivant :



la décision de refus sera prise sur cet échantillon de 6 pièces.

On voit alors sur ce graphique que pour prendre la décision de refus après contrôle de 6 pièces, il faut :

- d'une part : que la dernière pièce soit mauvaise

- d'autre part : que dans les 5 premières pièces, il y en ait 3 mauvaises, quel que soit leur ordre d'arrivée (tous les chemins menant au point (t = 5, d = 3) conviennent).

En d'autres termes, la probabilité de prendre la décision de refus après contrôle de 6 pièces est égale à :

$$P_{R6} = C_5^3 \varpi^4(1 - \varpi)^2$$

D'une façon générale, la probabilité de refuser au rang t est :

$$\begin{cases} t < 4 & p_{Rt} = 0 \\ 4 \leqslant t \leqslant 40 & p_{Rt} = C_{t-1}^3 \varpi^4(1 - \varpi)^{t-4} \end{cases}$$

et de même, la probabilité d'accepter au rang t est :

$$\begin{cases} t < 37 & p_{At} = 0 \\ 37 \leqslant t \leqslant 40 & p_{At} = C_{t-1}^{t-37} \varpi^{t-37}(1 - \varpi)^{37} = C_{t-1}^{36} \varpi^{t-37}(1 - \varpi)^{37} \end{cases}$$

Avant de continuer dans la voie qui nous mènera à la valeur de l'ASN, il nous faut ici faire une remarque d'une très grande importance pour la suite des calculs. La probabilité d'accepter au rang t étant p_{At}, la probabilité totale d'accepter est :

$$\sum_{t=0}^{t=40} p_{At} = \sum_{t=37}^{t=40} C_{t-1}^{36} \varpi^{t-37}(1 - \varpi)^{37}$$

Mais, nous savons par ailleurs que cette probabilité est égale à :

$$p = \sum_{k=0}^{k=3} C_{40}^{k} \ \varpi^{k}(1 - \varpi)^{40-k}$$

d'où l'identité :

$$\sum_{t=37}^{t=40} C_{t-1}^{36} \ \varpi^{t-37}(1 - \varpi)^{37} \equiv \sum_{k=0}^{k=3} C_{40}^{k} \ \varpi^{k}(1 - \varpi)^{40-k}$$

et l'on a de même en écrivant :

$$\sum_{t=0}^{t=40} p_{Rt} = (1 - p)$$

$$\sum_{t=4}^{t=40} C_{t-1}^{3} \ \varpi^{4}(1 - \varpi)^{t-4} \equiv \sum_{k=4}^{k=40} C_{40}^{k} \ \varpi^{k}(1 - \varpi)^{40-k}$$

En généralisant à un plan simple de caractéristique n et A (puisque R = A + 1) on obtient alors les deux identités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{t=n-A}^{t=n} C_{t-1}^{n-(A+1)} \ \varpi^{t-(n-A)}(1 - \varpi)^{n-A} \equiv \sum_{k=0}^{k=A} C_{n}^{k} \ \varpi^{k}(1 - \varpi)^{n-k} & (1) \\ \displaystyle\sum_{t=A+1}^{t=n} C_{t-1}^{A} \ \varpi^{A+1}(1 - \varpi)^{t-(A+1)} \equiv \sum_{k=A+1}^{k=n} C_{n}^{k} \ \varpi^{k}(1 - \varpi)^{n-k} & (2) \end{array} \right.$$

Revenons au calcul de l'ASN.

La probabilité de prendre une décision (quelle qu'elle soit) après prélèvement de t pièces étant :

$$p_t = p_{At} + p_{Rt}$$

on a alors :

$$ASN = E(t) = \sum_{t=0}^{t=40} t \ p_t$$

d'où :

$$ASN = \sum_{t=37}^{t=40} t \ C_{t-1}^{36} \ \varpi^{t-37}(1 - \varpi)^{37} + \sum_{t=4}^{t=40} t \ C_{t-1}^{3} \ \varpi^{4}(1 - \varpi)^{t-4}$$

Or :

$$t \ C_{t-1}^{36} = t \ \frac{(t - 1)!}{36!\,(t - 37)!} = \frac{t!}{36!\,(t - 37)!} = 37 \ \frac{t!}{37!\,(t - 37)!} = 37 \ C_{t}^{37}$$

d'où :

$$\sum_{t=37}^{t=40} t \ C_{t-1}^{36} \ \varpi^{t-37}(1 - \varpi)^{37} \equiv 37 \sum_{t=37}^{t=40} C_{t}^{37} \ \varpi^{t-37}(1 - \varpi)^{37}$$

ou encore, en changeant t en (t - 1) dans la dernière expression :

$$\sum_{t=37}^{t=40} t \ C_{t-1}^{36} \ \varpi^{t-37}(1 - \varpi)^{37} = \frac{37}{1 - \varpi} \sum_{t=38}^{t=41} C_{t-1}^{37} \ \varpi^{t-38}(1 - \varpi)^{38}$$

Si l'on fait alors dans l'expression (1) n = 41 et A = 3, on voit que :

$$\sum_{t=38}^{t=41} C_{t-1}^{37}\ \varpi^{t-38}(1-\varpi)^{38} \equiv \sum_{k=0}^{k=3} C_{41}^{k}\ \varpi^{k}(1-\varpi)^{41-k}$$

d'où

$$\sum_{t=37}^{t=40} t\ C_{t-1}^{36}\ \varpi^{t-37}(1-\varpi)^{37} = \frac{37}{1-\varpi}\sum_{k=0}^{k=3} C_{41}^{k}\ \varpi^{k}(1-\varpi)^{41-k}$$

de même :

$$t\ C_{t-1}^{3} = 4\ C_{t}^{4}$$

ce qui conduit, par l'intermédiaire de l'expression (2), à :

$$\sum_{t=4}^{t=40} t\ C_{t-1}^{3}\ \varpi^{4}(1-\varpi)^{t-4} = \frac{4}{\varpi}\sum_{k=5}^{k=41} C_{41}^{k}\ \varpi^{k}(1-\varpi)^{41-k}$$

l'ASN s'écrit donc :

$$\boxed{ASN = \frac{37}{1-\varpi}\sum_{0}^{3} C_{41}^{k}\ \varpi^{k}(1-\varpi)^{41-k} + \frac{4}{\varpi}\sum_{5}^{41} C_{41}^{k}\ \varpi^{k}(1-\varpi)^{41-k}}$$

Les valeurs peuvent donc être aisément obtenues par l'emploi des tables de la loi binomiale, ou de la fonction B incomplète. Dans ce dernier cas, on prendra:

$$ASN = \frac{37}{1-\varpi}\left[I_{1-\varpi}(38\ ;\ 4)\right] + \frac{4}{\varpi}\left[1 - I_{1-\varpi}(37\ ;\ 5)\right]$$

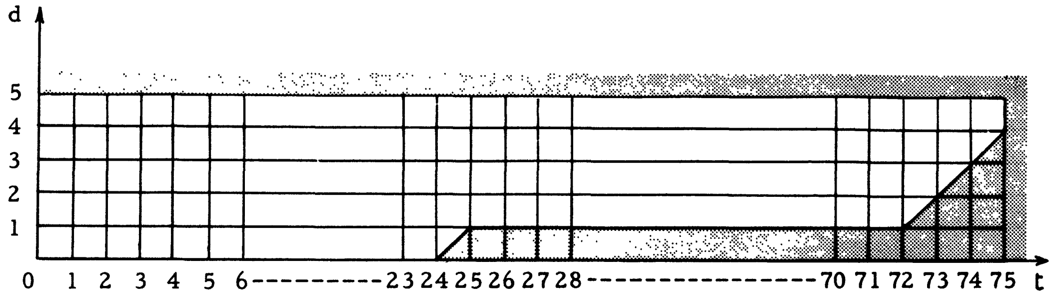
D'où les valeurs :

ϖ	ASN
0	37
0,01	37,114
0,02	37,740
0,03	37,831
0,04	37,760
0,05	37,409
0,07	35,905
0,08	34,821
0,09	33,580
0,10	32,235
0,16	24,061
0,20	19,798
0,30	13,331
0,40	10,000
0,50	8,000
0,75	5,333
0,90	4,444
1	4

CHAPITRE X

PLAN DOUBLE, ASN, CONTROLE SUCCESSIF

Le graphique que nous avons tracé dans le chapitre précédent se traduit dans le cas du plan double par :



Les probabilités p_{Rt} et p_{At} s'expriment par :

$$
\begin{cases}
5 \leqslant t \leqslant 27 & p_{Rt} = C^4_{t-1}\, \varpi^5 (1-\varpi)^{t-5} \\
28 \leqslant t \leqslant 75 & p_{Rt} = \left| \begin{array}{l} C^2_{25}\, C^2_{t-26}\, \varpi^5 (1-\varpi)^{t-5} \\ + C^3_{25}\, C^1_{t-26}\, \varpi^5 (1-\varpi)^{t-5} \\ + C^4_{25}\, C^0_{t-26}\, \varpi^5 (1-\varpi)^{t-5} \end{array} \right.
\end{cases}
$$

et :

$$
\begin{cases}
0 \leqslant t \leqslant 23 & p_{At} = 0 \\
24 \leqslant t \leqslant 25 & p_{At} = C^{23}_{t-1}\, \varpi^{t-24} (1-\varpi)^{24} \\
26 \leqslant t \leqslant 72 & p_{At} = 0 \\
73 \leqslant t \leqslant 75 & p_{At} = \Big[C^2_{25}\, C^{47}_{t-26} + C^3_{25}\, C^{48}_{t-26} + \\
 & \qquad + C^4_{25}\, C^{49}_{t-26} \Big] \varpi^{t-71} (1-\varpi)^{71}
\end{cases}
$$

et un calcul analogue à celui du chapitre précédent conduit à l'expression de l'ASN :

$$
\mathrm{ASN} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{5}{\varpi} \Big[1 - I_{1-\varpi}(21\,;\,6) \Big] + \dfrac{24}{1-\varpi}\, I_{1-\varpi}(25\,;\,2) \\ + \dfrac{1}{\varpi} \left\{ \begin{array}{l} 3 \Big[1 - I_{1-\varpi}(48\,;\,4) \Big] \Big[I_{1-\varpi}(23\,;\,3) - I_{1-\varpi}(24\,;\,2) \Big] \\ + 2 \Big[1 - I_{1-\varpi}(49\,;\,3) \Big] \Big[I_{1-\varpi}(22\,;\,4) - I_{1-\varpi}(23\,;\,3) \Big] \\ + \Big[1 - I_{1-\varpi}(50\,;\,2) \Big] \Big[I_{1-\varpi}(21\,;\,5) - I_{1-\varpi}(22\,;\,4) \Big] \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

$$
\left|
\begin{array}{l}
+ \dfrac{1}{1-\varpi}
\left\{
\begin{array}{l}
48 \left[I_{1-\varpi}(49\,;\,3) \right] \left[I_{1-\varpi}(23\,;\,3) - I_{1-\varpi}(24\,;\,2) \right] \\
+ 49 \left[I_{1-\varpi}(50\,;\,2) \right] \left[I_{1-\varpi}(22\,;\,4) - I_{1-\varpi}(23\,;\,3) \right] \\
+ 50 \left[I_{1-\varpi}(51\,;\,1) \right] \left[I_{1-\varpi}(21\,;\,5) - I_{1-\varpi}(22\,;\,4) \right]
\end{array}
\right. \\
+ 25 \left[I_{1-\varpi}(21\,;\,5) - I_{1-\varpi}(24\,;\,2) \right]
\end{array}
\right.
$$

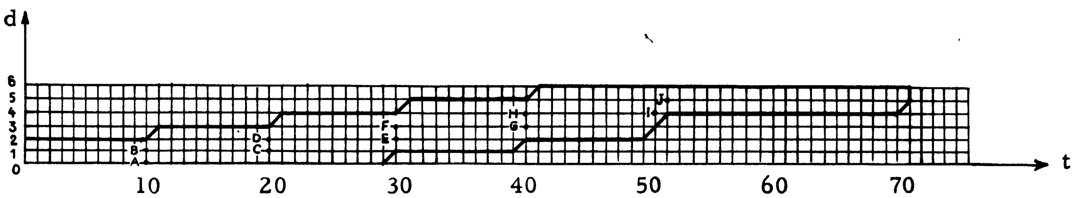
D'où les valeurs suivantes :

ϖ	ASN
0	24
0,05	37,8366645
0,07	39,8313275
0,15	30,6922057
0,20	24,4278922
0,30	16,6450791
0,50	9,9999935
1	5

CHAPITRE XI

PLAN MULTIPLE, ASN, CONTROLE SUCCESSIF

Le principe reste évidemment le même que dans le chapitre précédent. Toutefois, le graphique devenant beaucoup plus complexe, il faut commencer par la détermination du nombre de chemins permettant d'arriver aux points A, B, C, ... I, J, placés sur le graphique ci-dessous :



N_A désignant le nombre de chemins permettant d'arriver à A, etc, on trouve que :

$N_A = 1$
$N_B = 10$
$N_C = 20$
$N_D = 145$
$N_E = 345$
$N_F = 2\ 350$
$N_G = 5\ 800$
$N_H = 39\ 025$
$N_I = 91\ 225$
$N_J = 651\ 250$

De là les expressions de p_{At} et p_{Rt} et, par des développements beaucoup trop volumineux pour être reproduits ici, on arrive finalement à la valeur ASN en employant les mêmes méthodes que dans les deux chapitres précédents.

$$
\begin{aligned}
ASN = \frac{1}{\varpi} & \left\{ \begin{aligned} & \left[1 - I_{1-\varpi}(9;3)\right]\left[2 + 20\,\theta + 290\,\theta^2 + 4\,700\,\theta^3 + 78\,050\,\theta^4\right] \\ & + \frac{1-\varpi}{\varpi}\left\{3\left[1 - I_{1-\varpi}(8;4)\right]\left[\theta + 20\,\theta^2 + 345\,\theta^3 + 17\,400\,\theta^4\right] + 284\,200\,\theta^5\right\} \\ & + 651\,250\left[1 - I_{1-\varpi}(20\,;\,2)\right]\theta^5 \end{aligned} \right. \\
+ & \left\{ \begin{aligned} & 100\left[1 - I_{1-\varpi}(9\,;\,2)\right]\left[\theta + 29\,\theta^2 + 705\,\theta^3 + 15\,610\,\theta^4\right] \\ & + \frac{1-\varpi}{\varpi}\left\{10\left[1 - I_{1-\varpi}(8;3)\right]\left[\theta + 40\,\theta^2 + 1\,035\,\theta^3 + 23\,200\,\theta^4\right] + 4\,561\,250\,\theta^5\right\} \\ & + 32\,562\,500\,\theta^5 \\ & + 20\left[I_{1-\varpi}(20\,;\,1)\right]\left[1 + 30\,\theta + 690\,\theta^2 + 651\,250\,\theta^5\right] \end{aligned} \right.
\end{aligned}
$$

Avec $\theta = \varpi\,(1-\varpi)^9$

d'où les valeurs :

ϖ	ASN
0	20
0,02	24,0486
0,04	27,3612
0,06	28,9148
0,08	28,4253
0,10	26,3335
0,15	18,8670
0,20	12,8277
0,30	7,6447
0,50	4,0184
1	2

CONCLUSION

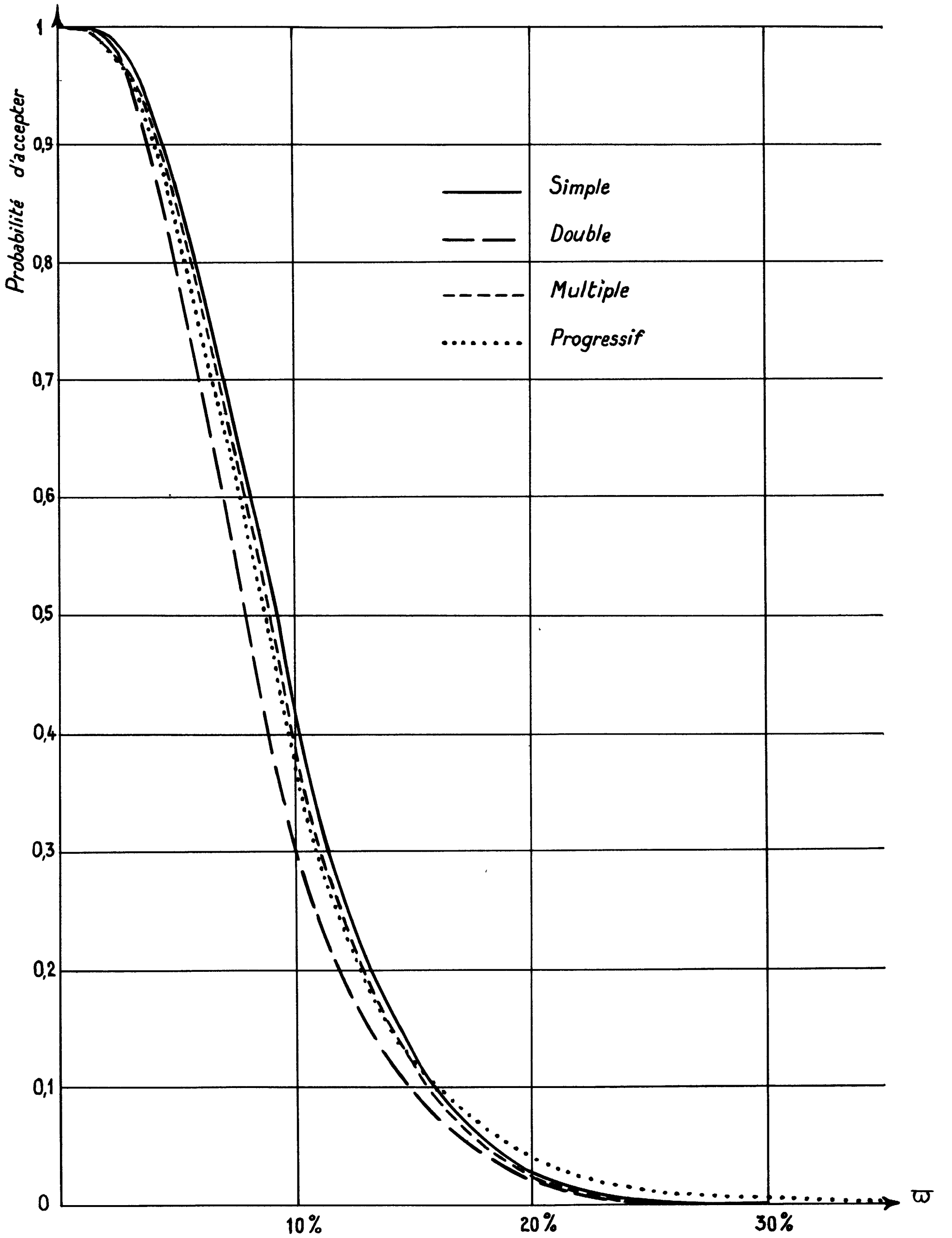
Sur le premier graphique ci-après, sont tracés les courbes d'efficacité des quatre plans, à partir des résultats obtenus dans les quatre premiers chapitres. On voit que ces plans sont bien comparables.

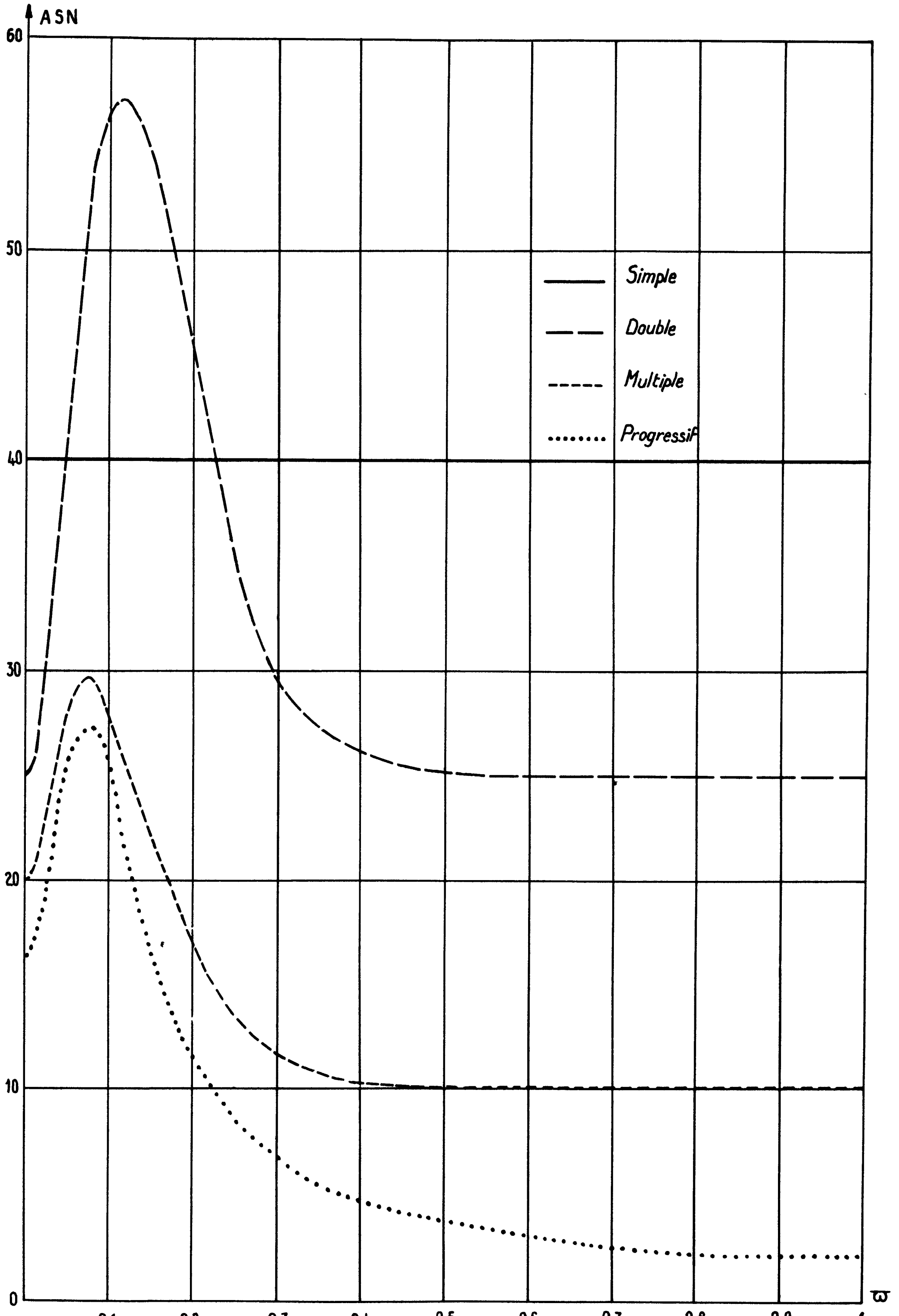
Sur le second graphique, sont tracées les courbes ASN correspondant au contrôle simultané; ce sont celles qu'on a l'habitude de considérer.

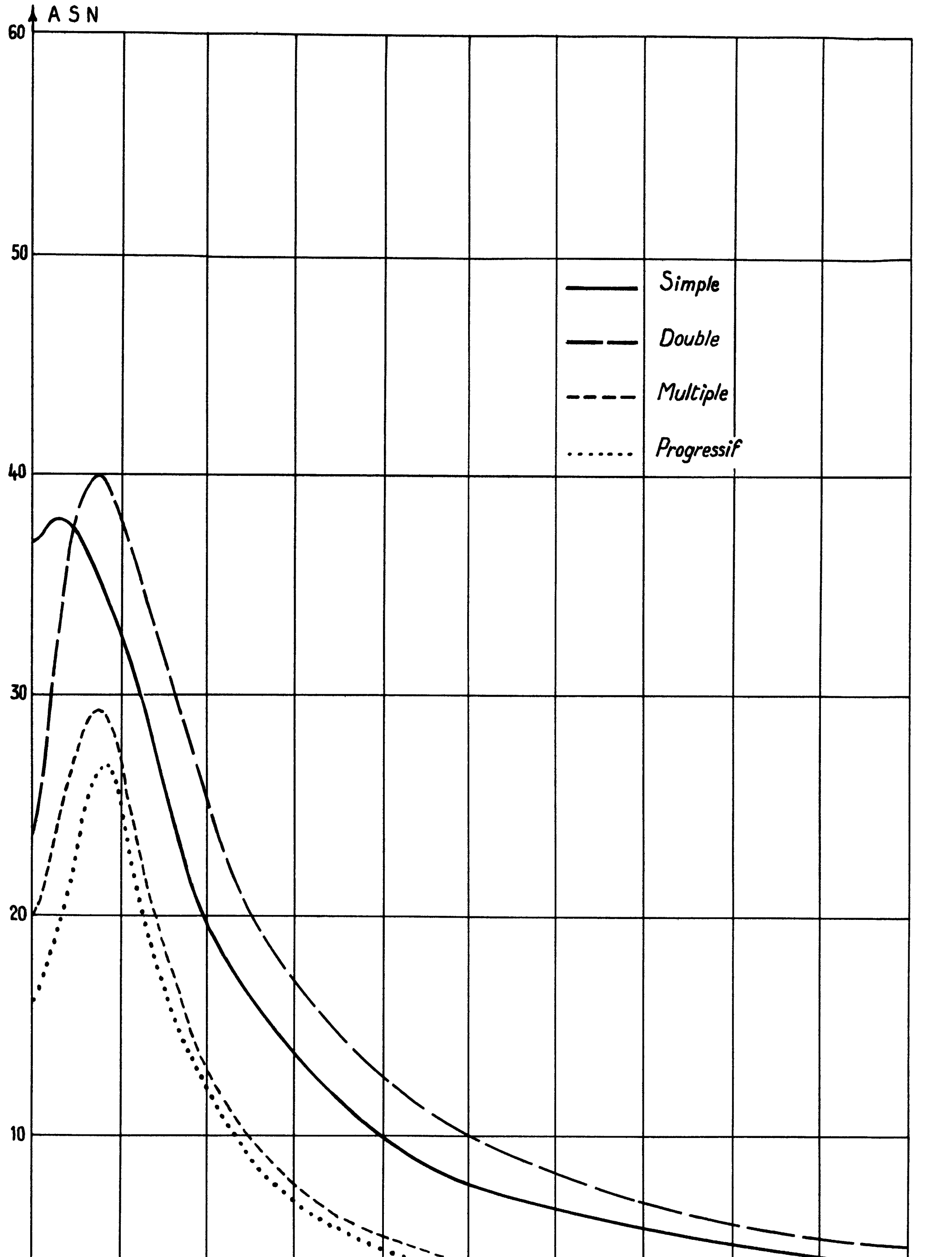
Sur le troisième graphique sont tracées les courbes ASN correspondant au contrôle successif. Si l'on compare, pour un même type de plan la courbe du contrôle successif à la courbe du contrôle simultané, on voit que l'économie est importante (sauf bien entendu pour le plan progressif, puisqu'on a la même courbe).

Si l'on compare sur ce troisième graphique, les courbes des différents types de plans, on voit qu'à l'exception du plan double dont la courbe reste au-dessus de celle du plan simple pour des ϖ non petits, le classement des plans dans l'ordre décroissant des ASN reste bien, comme dans le cas du contrôle simultané, l'ordre suivant :

plan simple,
plan double,
plan multiple,
plan progressif.




ASN
60
50
40
30
20
10
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
ϖ
Simple
Double
Multiple
Progressif


ASN
60
50
40
30
20
10
0
Simple
Double
Multiple
Progressif
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
ω