

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

JACQUES SERRE

**Un essai d'analyse de la valeur des composantes du couple  
: signe/valeur absolue d'un écart à une norme**

*Revue de statistique appliquée*, tome 32, n° 3 (1984), p. 5-22

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1984\\_\\_32\\_3\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1984__32_3_5_0)

© Société française de statistique, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UN ESSAI D'ANALYSE DE LA VALEUR DES COMPOSANTES DU COUPLE : SIGNE/VALEUR ABSOLUE D'UN ECART A UNE NORME

Jacques SERRE

*Ingénieur Civil des Mines(\*)*

---

## RESUME

En contrôle des fabrications, il arrive que l'une ou l'autre des deux composantes du couple : Signe/Valeur Absolue d'un écart à une norme soit ignorée. Le caractère tronqué prend ses valeurs soit dans  $R^+$ , soit dans  $\{-, +\}$  suivant la composante inconnue. Il en résulte une perte d'information qui peut, pour certains problèmes, être compensée par une augmentation de la taille des échantillons.

Dans le cas particulier où le problème de décision est le test de l'hypothèse nulle  $\mu = 0$  de la moyenne d'un aléa numérique de LAPLACE-GAUSS ( $\mu, \sigma$ ), les propriétés asymptotiques d'un ratio analogue à un coefficient d'aplatissement  $\beta_2$  non centré ont été utilisées pour traiter les échantillons où le signe du caractère est ignoré. L'efficacité du test ainsi bâti a été comparée à celle du test des signes pour le cas où la valeur absolue est inconnue et à celle du test U pour le cas du caractère complet.

Les courbes d'efficacité passant par les deux points :

( $\mu = 0, 1 - \alpha = 0,95$ ) et ( $\mu = \sigma, \beta = 0,05$ ) correspondent à des tailles d'échantillons  $n$  égales à 13 pour le test U, 23 pour le test des signes et 675 pour le test du coefficient d'aplatissement non centré. En considérant que l'information apportée par une donnée est inversement proportionnelle à  $\sqrt{n}$ , ces résultats conduisent à attribuer :

75 % de la valeur au signe de l'écart,

14 % à sa valeur absolue,

le solde (11 %) à la relation biunivoque entre ces deux composantes,

ce qui montre tout l'intérêt, pour le problème de décision étudié, de la mise en place des conditions pratiques, quelquefois contraignantes, nécessaires à l'obtention du signe de l'écart.

## 1. SITUATIONS CONCRETES RENCONTREES DANS L'INDUSTRIE DU LAMINAGE DU CUIVRE ET DE SES ALLIAGES

### 1.1. La flèche longitudinale ("lame de sabre") des bandes maillechort pour la téléphonie :

La figure 1 représente l'histogramme de 658 mesures de la flèche de bandes de section  $125 \times 0,3$  mm destinées à la fabrication de contacts pour centraux téléphoniques électro-mécaniques.

Le caractère "flèche" prend ses valeurs dans  $R^+$  car les échantillons prélevés

---

(\*) Ingénieur en Chef des Fabrications de produits laminés à l'Usine Tréfinmétaux de Dives-sur-Mer (Calvados)

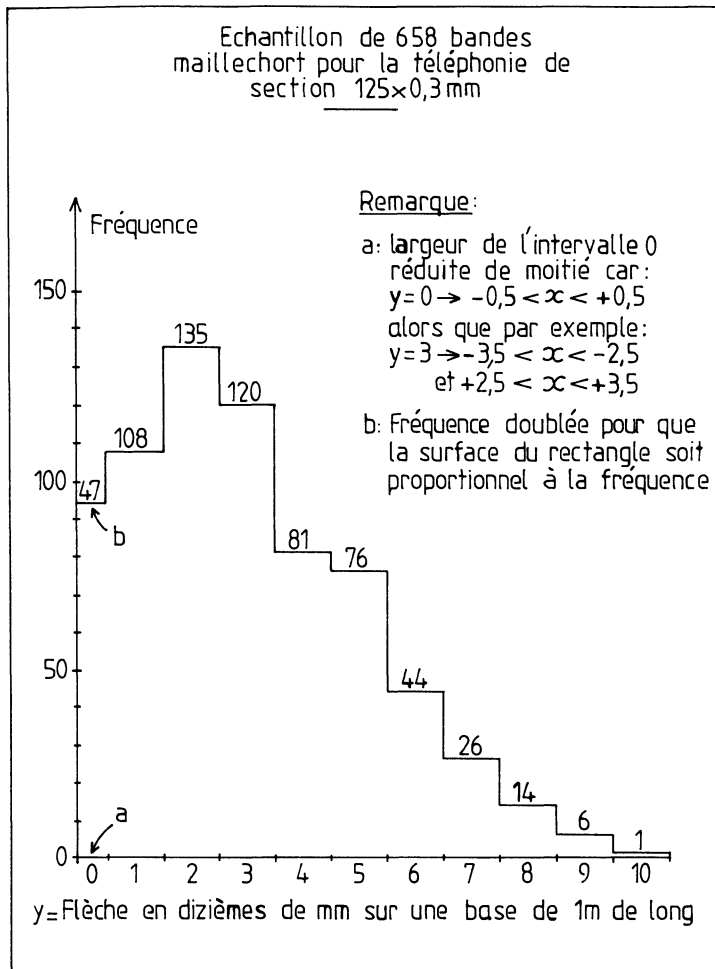


Figure 1

pour le contrôle n'ont reçu aucun repère spatial comme : face dessous/face dessus, bord gauche/bord droit, extrémité début/extrémité fin.

Si les échantillons avaient été repérés, le caractère prendrait ses valeurs dans R en convenant de signer la flèche par - si la bande dévie à gauche et par + dans le cas contraire, la position des faces étant bien précisée.

La figure 1 concerne donc la valeur absolue  $y = |x|$  d'une variable aléatoire  $x$ . Cette dernière est-elle décentrée ? (l'allure de l'histogramme le suggère). La réponse à la question posée est importante car, si elle est positive, il est possible, en recherchant la cause du décentrage systématique et en y portant remède, de réduire notablement la tolérance tenue.

Anticipons et traitons le cas de la figure 1 qui est particulièrement exemplaire :

- Hypothèse :  $x$  est un aléa numérique de LAPLACE-GAUSS de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$
- Estimations : de  $\sigma$  : 2,46  
de  $|\mu|$  : 2,83 soit 1,15  $\sigma$

- Test : Hypothèse nulle  $\mu = 0$ , risque 5% : Hypothèse rejetée, Décision  $\mu \neq 0$
- Limite de confiance : au risque 5% :  $|\mu| \geq 0,95 \sigma$
- Gain potentiel : sur la tolérance tenue à 95% pour y :
  - avant recentrage :  $(1,15 + 1,64) \sigma = 2,79 \sigma$  (env.  $7/10^e$  mm)
  - après recentrage :  $1,96 \sigma$  (env.  $5/10^e$  mm) soit une réduction de 30%
- Cause du décentrage : Alignement défectueux d'un enrouleur d'une machine de production.
- Remède : Réalignement de l'enrouleur
- Résultat : Recentrage de x et gain de 30% sur la tolérance de flèche tenue à 95%

## 1.2. Autres exemples :

La figure 2 donne 4 exemples de défauts rencontrés couramment sur les produits laminés :

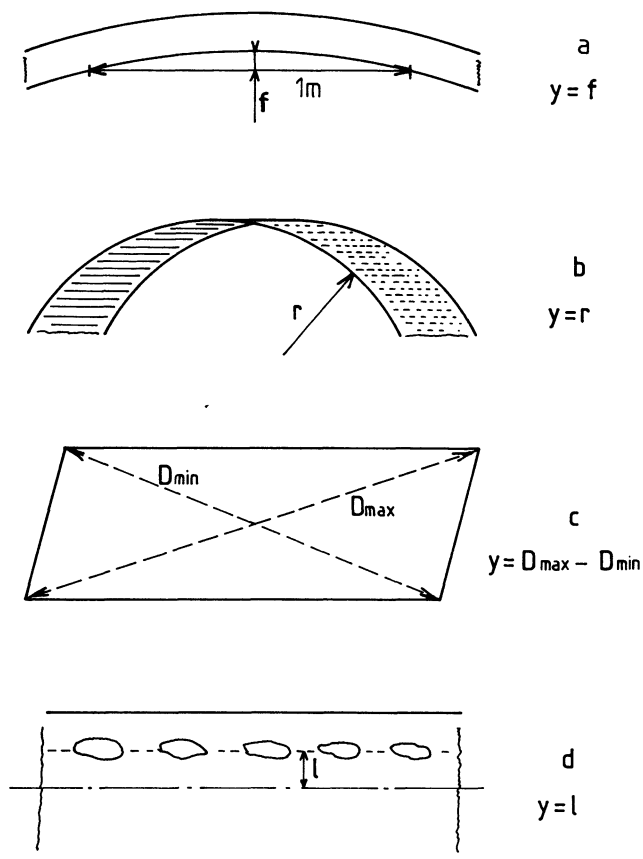


Figure 2

- a : défaut de flèche longitudinale (qui vient d'être analysé au paragraphe précédent).
- b : Défaut de cambrage longitudinal ("mémoire d'enroulement").
- c : Défaut d'équerrage d'une tôle (le caractère à mettre sous contrôle est la différence entre les longueurs des deux diagonales). Les fabricants de ballons d'eau chaude (COPPER CYLINDER) obtenus par roulage puis soudage bord à bord sont particulièrement exigeants dans ce domaine.
- d : Série de "poches" le long d'une génératrice d'une bande traduisant l'existence d'une fibre plus longue que les autres.

Dans tous les cas, le caractère étudié peut être ou non "tronqué" du signe suivant que les échantillons soumis au contrôle n'ont pas été ou ont été munis des repères nécessaires.

## 2. OBJECTIFS ET CADRE DE L'ETUDE

### 2.1. 1<sup>er</sup> objectif (§ 3)

Résoudre à partir d'un échantillon d'écarts tronqués de leurs signes les problèmes classiques d'inférence statistique :

- estimations ponctuelles des paramètres de la distribution des écarts non tronqués ;
- tests d'hypothèses sur ces paramètres, courbes d'efficacité de ces tests ;
- Intervalles de confiance.

Les réponses apportées ici ne sont valables que dans un cadre restreint :

- les écarts non tronqués sont distribués suivant une loi de LAPLACE-GAUSS de paramètres inconnus  $\mu, \sigma$  ;
- la taille de l'échantillon est suffisamment élevée pour que les propriétés asymptotiques des moments empiriques puissent s'appliquer.

### 2.2. 2<sup>e</sup> objectif (§ 4)

Il constitue en fait le véritable but de l'étude :

"Mesurer" les conséquences de la perte du signe d'un écart algébrique, ou, encore,

"Analyser la valeur" des composantes du couple : Signe/Valeur absolue d'un écart à une norme.

Le domaine étudié est ici aussi limité :

- aux mêmes conditions de normalité et de taille d'échantillon que pour le 1<sup>er</sup> objectif,
- au seul problème de décision de l'hypothèse nulle  $\mu = 0$  contre l'alternative  $\mu \neq 0$ , dont l'importance a été illustrée par l'exemple de la flèche (§ 1.1)

### 3. ETUDE DE LA VALEUR ABSOLUE D'UN ALEA NUMERIQUE DE LAPLACE-GAUSS

#### 3.1. Densité de probabilité

Si  $f(x)$  est la densité de probabilité d'une variable aléatoire  $x$  distribuée suivant une loi de LAPLACE-GAUSS  $\mu, \sigma$ , la valeur absolue  $y = |x|$  de  $x$  a pour densité de probabilité :

$$h(y) = \begin{cases} \text{pour } y < 0 : 0 \\ \text{pour } y \geq 0 : f(y) + f(-y) \end{cases}$$

soit pour  $y \geq 0$  :

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2+\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot \left( e^{+\frac{\mu y}{\sigma^2}} + e^{-\frac{\mu y}{\sigma^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2+\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot \text{Ch} \frac{\mu y}{\sigma^2} \end{aligned}$$

#### 3.2. Forme de la distribution

En passant en variables réduites :

$\lambda = \frac{|\mu|}{\sigma}$  (décentrage absolu réduit de  $x$ ) et  $z = \frac{y}{\sigma}$  (valeur absolue réduite de  $x$ )

la densité de probabilité de  $z$  est

$$l(z) = \begin{cases} \text{pour } z < 0 : 0 \\ \text{pour } z \geq 0 : \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{z^2+\lambda^2}{2}} \text{Ch} \lambda z \end{cases}$$

Elle ne dépend que de  $\lambda$ .

La figure 3 donne les distributions obtenues qui présentent un maximum pour  $z \neq 0$  si  $\lambda > 1$ .

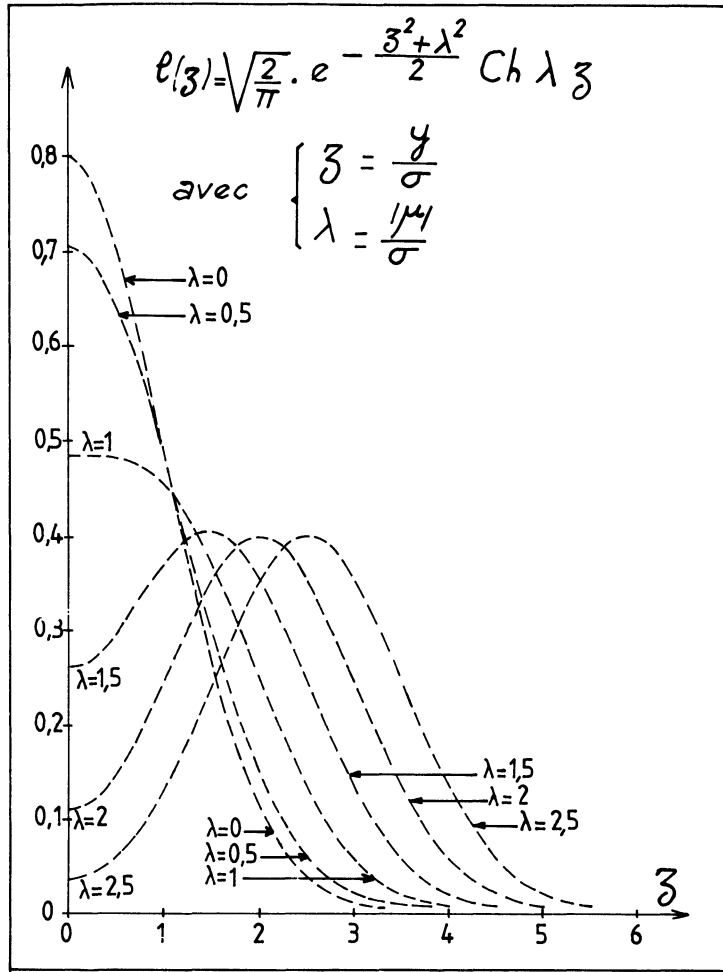


Figure 3

### 3.3. Moments non centrés

- d'ordre pair : ce sont pour  $y = |x|$  les mêmes que pour  $x$  :

$$\begin{cases} \alpha_2 = (1 + \lambda^2) \sigma^2 \\ \alpha_4 = (3 + 6\lambda^2 + \lambda^4) \sigma^4 \end{cases}$$

- d'ordre impair : ils s'expriment en fonction de  $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$  et de  $\psi(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(t) dt$  :

$$\alpha_1 = 2 [\varphi(\lambda) + \lambda \psi(\lambda)] \sigma$$

$$\alpha_3 = 2 [(2 + \lambda^2) \varphi(\lambda) + \lambda (3 + \lambda^2) \psi(\lambda)] \sigma^3$$

### 3.4. Estimations de $\mu$ et de $\sigma$

#### 3.4.1. Remarques liminaires

3.4.1.1. Seule la valeur absolue de  $\mu$  peut être estimée.  $\mu^*$  désignera l'estimation de  $|\mu|$ ,  $\sigma^*$  celle de  $\sigma$  et  $\lambda^*$  le rapport  $\mu^*/\sigma^*$

3.4.1.2. La loi de probabilité de  $y$  ne fait pas partie des familles exponentielles. Il en résulte, d'après le théorème de DARMOIS-KOOPMANN, qu'il ne peut exister de résumé exhaustif d'un échantillon issu d'une population suivant cette loi. Aucune estimation du couple  $(\mu, \sigma)$  ne peut donc réaliser une réduction optimale des données et il n'y a ainsi aucune raison, a priori, de choisir une méthode plutôt qu'une autre. Trois seront successivement examinées :

- celle des moments d'ordre 1 et 2,
- ” ” ” 2 et 4,
- ” du maximum de vraisemblance.

#### 3.4.2. Méthode des moments d'ordre 1 et 2

En désignant par  $a_p$  le moment non centré d'ordre  $p$  de l'échantillon de

taille  $n$  :  $a_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^p$  il vient :

pour le moment d'ordre 1 :  $a_1 = 2 [\varphi(\lambda^*) + \lambda^* \psi(\lambda^*)] \sigma^*$   
 ” ” ” 2 :  $a_2 = (1 + \lambda^{*2}) \sigma^{*2}$

et 
$$\frac{a_1^2}{a_2} = \omega(\lambda^*)$$

avec 
$$\omega(\lambda) = \frac{4[\varphi(\lambda) + \lambda \psi(\lambda)]^2}{1 + \lambda^2}$$

La figure 4 qui donne les variations de  $\omega(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$  permet, connaissant  $a_1^2/a_2$ , de déterminer  $\lambda^*$  et ensuite  $\mu^*$  et  $\sigma^*$ .

Ces estimations n'existent que si :  $\frac{a_1^2}{a_2} \geq \frac{2}{\pi}$  ( $= 0,637$ ).

#### 3.4.3. Méthode des moments d'ordre 2 et 4

C'est en fait la méthode des moments d'ordre 1 et 2 appliquée à  $y^2$  qui contient toute l'information apportée par  $|x|$ .

Il vient :

pour le moment d'ordre 2 :  $a_2 = (1 + \lambda^{*2}) \sigma^{*2}$   
 ” ” ” ” 4 :  $a_4 = (3 + 6\lambda^{*2} + \lambda^{*4}) \sigma^{*4}$

et : 
$$3 - \frac{a_4}{a_2^2} = \rho(\lambda^*) \text{ avec } \rho(\lambda) = \frac{2\lambda^4}{(1 + \lambda^2)^2}$$

ce qui permet de calculer explicitement les estimations  $\mu^*$  et  $\sigma^*$ .

Ces estimations n'existent que si :  $a_4/a_2^2 \leq 3$



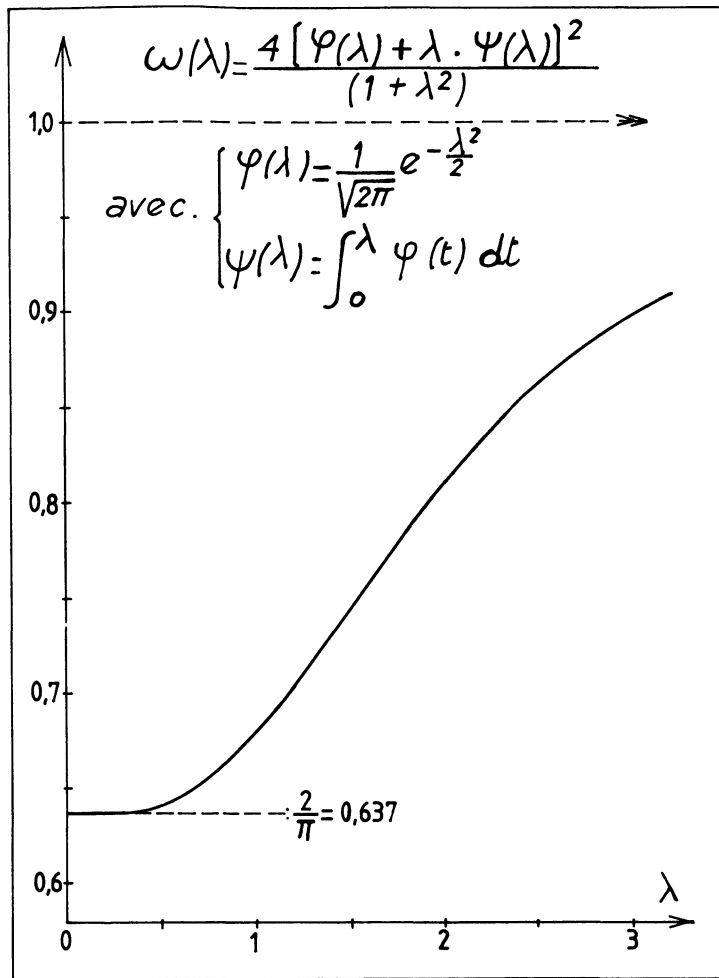


Figure 4

### 3.4.4. Méthode du maximum de vraisemblance

3.4.4.1. Les équations du maximum de vraisemblance sont les suivantes :

- pour  $\frac{\partial \text{Log } L}{\partial \mu} : \frac{1}{\sigma^{*2}} \left[ \sum_{i=1}^n y_i \text{th} \frac{\mu^* y_i}{\sigma^{*2}} - n\mu^* \right] = 0$

- pour  $\frac{\partial \text{Log } L}{\partial \sigma} : \frac{1}{\sigma^{*3}} \left[ n(\mu^{*2} - \sigma^{*2}) + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\mu^* \sum_{i=1}^n y_i \text{th} \frac{\mu^* y_i}{\sigma^{*2}} \right] = 0$

ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = (1 + \lambda^{*2}) \sigma^{*2} \quad \text{comme pour les 2 méthodes précédentes} \\ r(\mu^*) = 0 \quad \text{avec} \quad r(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \operatorname{th} \frac{\mu y_i}{a_2 - \mu^2} - \mu \end{array} \right.$$

cette dernière équation permettant par approximations successives de déterminer  $\mu^*$  et ensuite  $\sigma^*$  et  $\lambda^*$ .

3.4.4.2. La figure 5 donne l'allure des variations de  $r(\mu)$  en fonction de  $\mu$ . Le développement limité de  $r$  au voisinage de 0 montre que pour que la branche A coupe

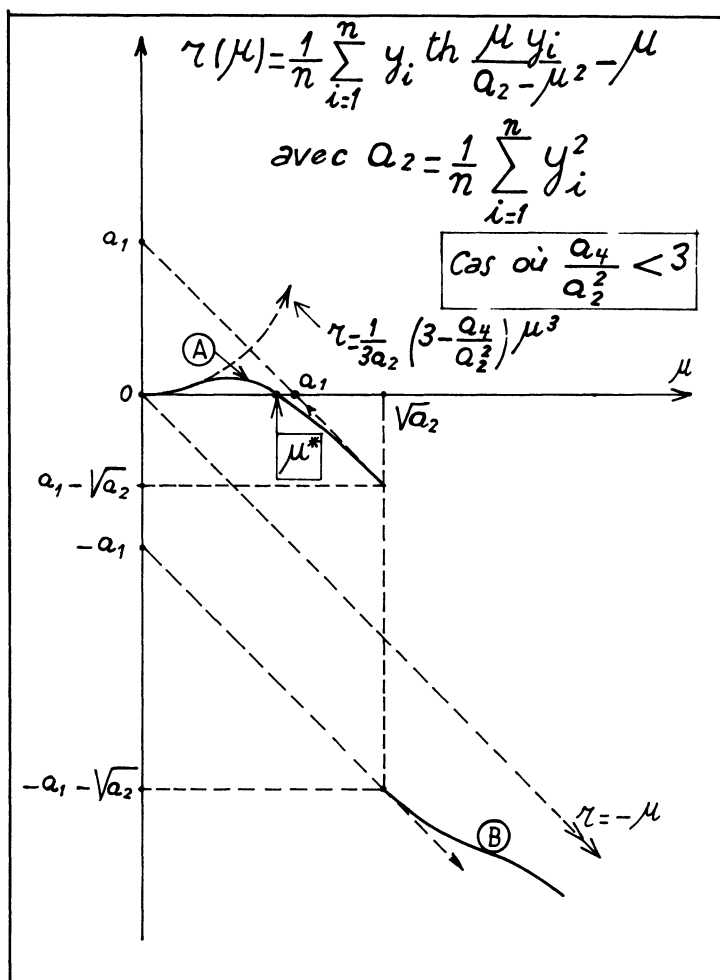


Figure 5

l'axe des abscisses il faut que  $3 - \frac{a_4}{a_2^2} > 0$ , d'où

Les estimations du maximum de vraisemblance n'existent que si :  $\frac{a_4}{a_2^2} \leq 3$   
comme pour la méthode des moments d'ordre 2 et 4

### 3.4.5. Synthèse et choix de la méthode d'estimation :

3.4.5.1. Pour les 3 méthodes,  $\mu^*$  et  $\sigma^*$  sont reliés par la même relation :

$$\mu^{*2} + \sigma^{*2} = a_2$$

La condition d'existence des estimations par la 1<sup>ère</sup> méthode est ;

$$\frac{a_1^2}{a_2} \geq \frac{2}{\pi}$$

Pour les 2<sup>è</sup> et 3<sup>è</sup> méthodes, la condition d'existence est la même :

$$\frac{a_4}{a_2^2} \leq 3$$

Quatre cas peuvent se présenter suivant les valeurs relatives de  $a_1^4$ ,  $a_2^2$  et  $a_4$ . Ils ont tous été rencontrés en pratique.

Lorsque les 3 estimations existent, elles peuvent se classer de façons différentes comme le montre le tableau 1 avec deux exemples concernant la flèche de bandes maillechort pour la téléphonie de sections 91 x 0,25 mm et 90 x 0,35 mm (y exprimé en 10<sup>e</sup> de mm)

TABLEAU 1

		91 x 0,25	90 x 0,35
n		311	197
$\sum y_i$		1.177	599
$\sum y_i^2$		6.675	2.809
$\sum y_i^4$		417.015	102.349
$a_1^2/a_2$		0,667	0,648
$a_4/a_2^2$		2,91	2,55
$\lambda^*$	1 <sup>er</sup> & 2 <sup>e</sup> moments	0,52	0,65
	2 <sup>e</sup> & 4 <sup>e</sup> "	0,66	0,86
	Maxi de vrais.	0,88	0,94

3.4.5.2. Notre choix s'est porté sur la méthode d'estimation des 2<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> moments pour les raisons suivantes :

- $y^2$  renferme toute l'information contenue dans  $|x|$ ,
- la condition d'existence est la même que pour la méthode du maximum de vraisemblance,

- elle conduit à des estimations qui peuvent s'exprimer littéralement en fonction des  $y_i$ , ce qui permettra de répondre au 1<sup>er</sup> objectif de l'étude : bâtir un test de l'hypothèse nulle  $\mu = 0$  et un intervalle de confiance de  $\lambda$ .

### 3.5. Utilisation de la méthode des 2<sup>è</sup> et 4<sup>è</sup> moments :

3.5.1. *Propriétés asymptotiques de* :  $b_2 = 3 - \frac{a_4}{a_2^2}$

En désignant par  $E(t)$  et  $V(t)$  l'espérance mathématique et la variance de  $t$  et par  $\text{CoV}(t, u)$  la covariance de  $t$  et  $u$ , il vient :

$$E(a_2) = (1 + \lambda^2) \sigma^2 \qquad V(a_2) = 2(1 + 2\lambda^2) \frac{\sigma^4}{n}$$

$$E(a_4) = 3 \left( 1 + 2\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{3} \right) \sigma^4 \qquad V(a_4) = 96 \left( 1 + 4\lambda^2 + \frac{7\lambda^4}{4} + \frac{\lambda^6}{6} \right) \frac{\sigma^8}{n}$$

$$\text{CoV}(a_2, a_4) = 12 \left( 1 + 3\lambda^2 + \frac{2\lambda^4}{3} \right) \frac{\sigma^6}{n}$$

Le coefficient de corrélation entre  $a_2$  et  $a_4$  est très élevé : il varie entre  $\sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866$  pour  $\lambda = 0$  et 1 pour  $\lambda \rightarrow \infty$ .

*Asymptotiquement* la variable aléatoire  $b_2$  est distribuée suivant une loi de LAPLACE-GAUSS de moyenne et de variance :

$$E(b_2) = (b_2)_\bullet$$

$$V(b_2) = V(a_2) \left[ \left( \frac{\partial b_2}{\partial a_2} \right)_\bullet \right]^2 + 2 \text{CoV}(a_2, a_4) \left( \frac{\partial b_2}{\partial a_2} \right)_\bullet \left( \frac{\partial b_2}{\partial a_4} \right)_\bullet + V(a_4) \left[ \left( \frac{\partial b_2}{\partial a_4} \right)_\bullet \right]^2$$

l'indice  $\bullet$  indiquant que les valeurs de  $b_2$  et de ses dérivées partielles sont prises au point  $a_2 = E(a_2)$  et  $a_4 = E(a_4)$ .

D'où :

$$E(b_2) = \frac{2\lambda^4}{(1 + \lambda^2)^2} \quad \text{et} \quad V(b_2) = \frac{1 + 6\lambda^2 + 9\lambda^4 + \frac{20}{3}\lambda^6 + \frac{4}{3}\lambda^8}{(1 + \lambda^2)^6} \cdot \frac{24}{n}$$

Pour  $\lambda = 0$  ;  $E(b_2) = 0$  et  $V(b_2) = \frac{24}{n}$  qui sont les valeurs asymptotiques du coefficient d'aplatissement (of excess) d'une loi normale.

La figure 6 donne les variations en fonction de  $\lambda$  de  $E(b_2)$ , de  $\sqrt{n V(b_2)}$  et de  $E(b_2) + 0,1 \sqrt{n V(b_2)}$  qui correspond à la limite (supérieure) de probabilité à 95 % de  $b_2$  pour  $n = 270$  (car  $0,1 \sqrt{270} = 1,6449$ , limite supérieure à 95 % de la loi normale réduite).

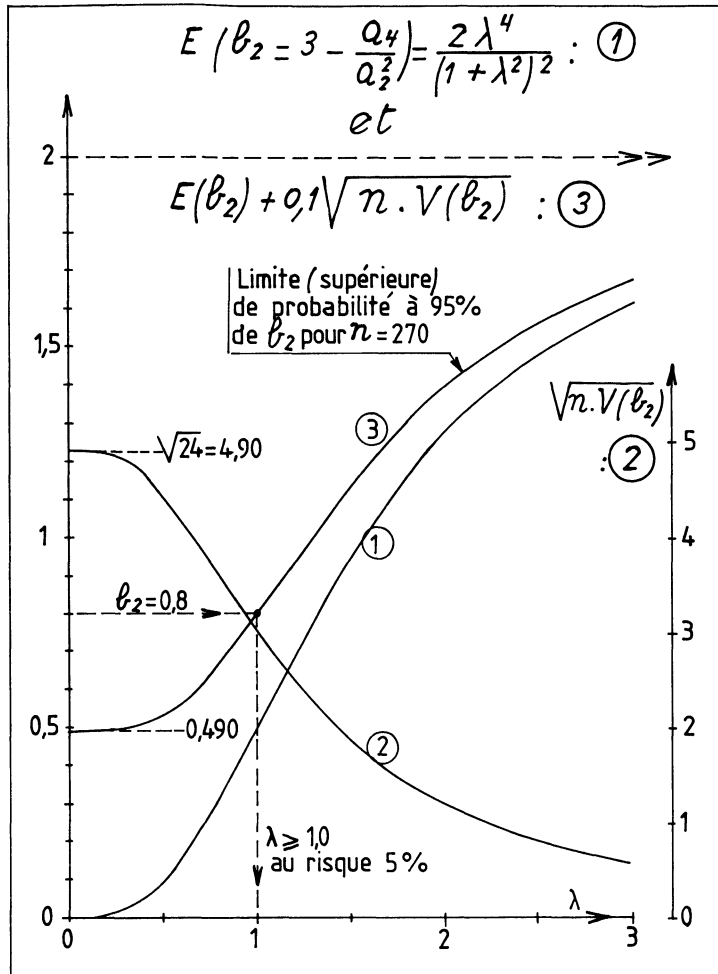


Figure 6

### 3.5.2. Test de l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = 0$ (contre l'alternative $\mu \neq 0$ )

#### 3.5.2.1. Règle de test

Comme il n'existe pas de résumé exhaustif de l'échantillon (§ 3.4.1.2) il n'existe pas non plus de test UPP (Uniformément le plus puissant).

Pour des raisons déjà indiquées (§ 3.4.5.2), le test retenu est basé sur les propriétés asymptotiques de  $b_2$ .

La zone d'acceptation de  $H_0$  est :

$$b_2 \leq u(1 - \alpha) \sqrt{\frac{24}{n}} \quad (\text{test unilatéral})$$

où  $u(p)$  est la fonction inverse de  $p(u) = \int_{-\infty}^u \varphi(t) dt$  (§ 3.3) et où  $\alpha$  désigne le risque de 1<sup>ère</sup> espèce (de refuser l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie).

Si, par exemple,  $\alpha = 5\%$  [ $u(1 - \alpha) = 1,6449$ ] et  $n = 270$ ,  $H_0$  est accepté si  $b_2 \leq 0,490$  (ordonnée à l'origine de la courbe ③ de la figure 6).

### 3.5.2.2. Courbe d'efficacité

Le risque  $\beta$  de 2<sup>è</sup> espèce (d'accepter l'hypothèse nulle alors qu'elle est fautive) est :

$$\beta = p \left[ \frac{u(1 - \alpha) \sqrt{\frac{24}{n}} - E(b_2)}{V(b_2)} \right]$$

Si, par exemple,  $\alpha = 5\%$ ,  $n = 270$  et  $\lambda = 1,2$  [ $E(b_2) = 0,697$ ,  $nV(b_2) = 6,135$  et  $\sqrt{V(b_2)} = 0,151$ ]:

$$\beta = p \left( \frac{0,490 - 0,697}{0,151} \right) = p(-1,37) \text{ et } \beta = 8,5\%.$$

La figure 7 donne en ③ la courbe d'efficacité pour  $n = 675$ .

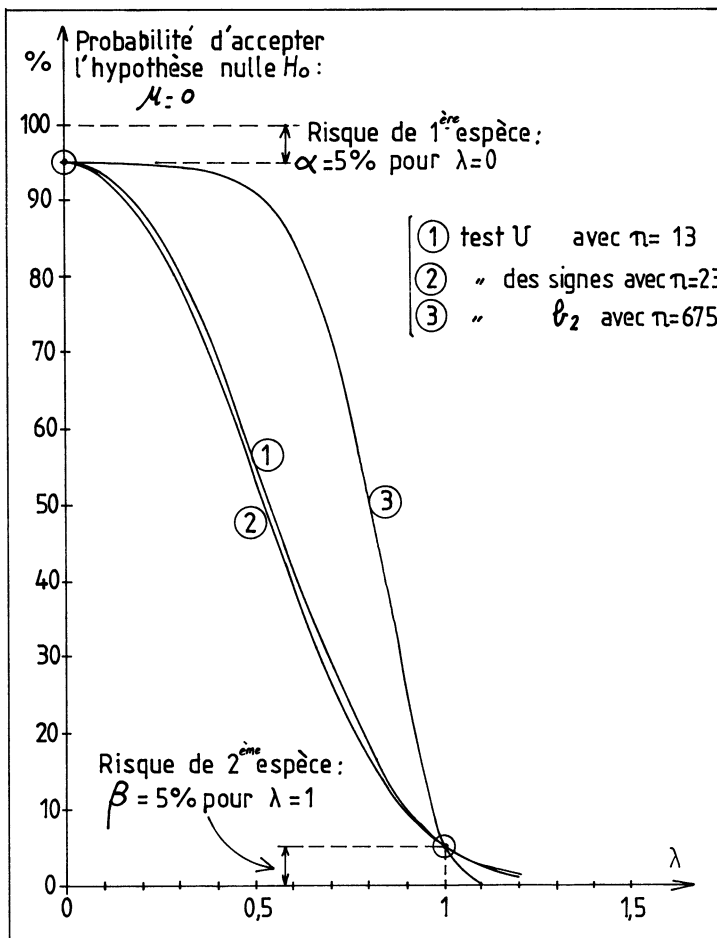


Figure 7

### 3.5.2.3. Taille des échantillons correspondant à des risques donnés à l'avance

n est donné en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$  par :

$$\sqrt{n} = \frac{\sqrt{6}}{(1 + \lambda^2) \lambda^4} \left[ (1 + \lambda^2)^3 u(1 - \alpha) + \sqrt{1 + 6\lambda^2 + 9\lambda^4 + \frac{20}{3}\lambda^6 + \frac{4}{3}\lambda^8 u(1 - \beta)} \right]$$

Si, par exemple,  $\alpha = 5\%$  et  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 5\%$  :  $n = 675$

### 3.5.3. Intervalle de confiance de $\lambda$

En l'absence d'application pivotale il est basé sur la courbe ③ de la figure 6 qui donne la limite supérieure (à un risque donné, ici 5%) de  $b_2$ , pour une taille d'échantillon n (ici 270).

Si, par exemple,  $b_2 = 0,80$  l'intervalle de confiance de  $\lambda$  est, à 95% :

$$\lambda \geq 1,0 \quad \text{ou} \quad |\mu| \geq \sigma$$

## 4. COMPARAISON DU TEST "b<sub>2</sub>" AVEC LE TEST "U" ET LE TEST DES SIGNES

### 4.1. Test "U" :

Il est utilisé lorsque les x sont connus, aussi bien en signes qu'en valeurs absolues, dès que n est assez grand.

La variable aléatoire  $U = m/s$  (m et s : moyenne et écart-type de l'échantillon) est asymptotiquement distribuée suivant une loi normale avec

$$E(U) = \frac{\mu}{\sigma} \quad \text{et} \quad V(U) = \frac{1}{n}$$

et la zone d'acceptation de  $H_0 (\mu = 0)$  est :

$$-\frac{u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{n}} \leq \frac{m}{s} \leq +\frac{u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{n}} \quad (\text{test bilatéral})$$

La courbe d'efficacité est définie par la relation :

$$\beta = p \left[ u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \lambda\sqrt{n} \right] - p \left[ u\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \lambda\sqrt{n} \right]$$

Pour  $\alpha$  petit et  $\lambda\sqrt{n}$  assez grand (en pratique  $\alpha \leq 5\%$  et  $\lambda\sqrt{n} \geq 2$ ) le 2<sup>e</sup> terme est négligeable et :

$$\sqrt{n} = \frac{1}{\lambda} \left[ u \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) + u(1 - \beta) \right]$$

Si, par exemple,  $\alpha = 5\%$  et ( $\lambda = 1, \beta = 5\%$ ):  $n = 13$  avec en (1) la courbe d'efficacité de la figure 7.

#### 4.2. Test des signes

Il est utilisé lorsque seul le signe de  $x$  est connu.

Si  $\theta$  est la proportion de signe  $-$  dans la population et  $k$  celle de l'échantillon, la variable aléatoire :

$$v = 2 \arcsin \sqrt{k}$$

est asymptotiquement distribuée normalement avec :

$$E(v) = 2 \arcsin \sqrt{\theta} \quad \text{et} \quad V(v) = \frac{1}{n}$$

La zone d'acceptation de  $H_0$  ( $\mu = 0$  c'est-à-dire  $\theta = 0,5$  et  $2 \arcsin \sqrt{\theta} = \frac{\pi}{2}$ ) est la même que celle d'un test "U" ou  $\frac{m}{s}$  est remplacé par :  $\frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \sqrt{k} = \arcsin(1 - 2k)$ .

La courbe d'efficacité est définie (pour  $\alpha$  petit et  $\lambda\sqrt{n}$  assez grand) par :

$$\sqrt{n} = \frac{1}{\arcsin [1 - 2p(-\lambda)]} \left[ u \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) + u(1 - \beta) \right], \quad \text{car} \quad \theta = p(-\lambda)$$

Si, par exemple,  $\alpha = 5\%$  et ( $\lambda = 1, \beta = 5\%$ ):  $n = 23$  avec en (2) la courbe d'efficacité de la figure 7.

#### 4.3. Comparaison des 3 tests

##### 4.3.1. Forme des courbes d'efficacité

La figure 7 montre que si le test "U" et le test des signes ont des courbes d'efficacité très voisines (mais correspondant à des tailles d'échantillons différentes) le test  $b_2$  a une courbe assez différente des deux autres, bien que par construction elles passent toutes par les points (0,95 %) et (1,5 %). C'est ainsi par exemple que pour  $\lambda = 0,7$  le risque d'accepter  $H_0$  est de :

30 % et 26 % pour les tests "U" et des signes  
73 % pour le test " $b_2$ "

la courbe du test " $b_2$ " étant beaucoup plus "raide" que les deux autres.



#### 4.3.2. Tailles relatives des échantillons

Soit  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  les tailles des échantillon nécessaires pour avoir les mêmes risques  $\alpha$  et  $\beta$  (pour une valeur donnée de  $\lambda$ ).

Les équations données § 3.5.2.3 pour  $n_3$ , § 4.1 pour  $n_1$  et § 4.2 pour  $n_2$  permettent de comparer ces tailles en formant les rapports  $\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$  et  $\sqrt{\frac{n_1}{n_3}}$ . Le tableau 2 donne leurs valeurs pour 3 niveaux de risques ( $\alpha = \beta = 1\%$ ,  $5\%$  et  $10\%$ ) et pour 3 niveaux du décentrage réduit correspondant au risque  $\beta$  ( $\lambda = \frac{2}{3}$ ,  $1$  et  $\frac{3}{2}$ )

TABLEAU 2

	$\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$	$\sqrt{\frac{n_1}{n_3}}$		
	q.q.s. $\alpha, \beta$	$\alpha = \beta = 1\%$	$\alpha = \beta = 5\%$	$\alpha = \beta = 10\%$
$\lambda = \frac{2}{3}$	0,777	0,067	0,070	0,073
$\lambda = 1$	0,751	0,133	0,139	0,145
$\lambda = \frac{3}{2}$	0,699	0,199	0,207	0,216

avec :  $n_1$  pour le test "U"  
 $n_2$  pour le test des signes  
 $n_3$  pour le test "b<sub>2</sub>"

$\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$  ne dépend pas du niveau des risques et varie peu en fonction de  $\lambda$ ,

$\sqrt{\frac{n_1}{n_3}}$  dépend peu des risques mais varie assez rapidement en fonction de  $\lambda$ .

#### 4.3.3. Analyse de la valeur des composantes du couple : Signe/Valeur Absolue d'un écart à une norme

L'information apportée par un échantillon de taille  $n$  étant proportionnelle à  $\sqrt{n}$ , la "valeur" d'un résultat est inversement proportionnelle à la racine carrée de la taille de l'échantillon nécessaire pour pouvoir prendre une décision dans des conditions données de risques (donc de courbe d'efficacité).

De ce point de vue et *vis-à-vis du problème de décision considéré* (test de l'hypothèse nulle  $\mu = 0$ ) les résultats du tableau 2 constituent une analyse de la valeur des composantes du couple : Signe/Valeur Absolue d'un écart à une norme.

Pour  $\alpha = \beta = 5\%$  et  $\lambda = 1$

75 % de la valeur sont attribués au signe de l'écart ;

14 % de la valeur sont attribués à sa valeur absolue

le solde pouvant correspondre à l'information supplémentaire apportée par le fait que dans un écart algébrique un signe est *accouplé* à une valeur absolue. En d'autres termes, une collection d'écarts a plus de valeur que la réunion sans relation entre elles d'une collection de signes et d'une collection de valeurs absolues.

## 5. CONCLUSION

En contrôle des fabrications, la vérification de la conformité des produits à une spécification type : "amplitude du défaut inférieure à tant" n'impose pas les repérages spatiaux qui seraient nécessaires pour affecter un signe aux résultats de mesure.

S'il n'y a pas pris garde au préalable (et c'est ce qui se passe couramment sur le terrain), le praticien qui doit s'adapter aux exigences présentes ou à venir de ses clients ne dispose que d'un historique de valeurs absolues d'écarts qui, par nature, sont algébriques. L'analyse statistique en est malgré tout possible. Un test de l'hypothèse nulle : absence de décentrage systématique des écarts (un exemple vécu a montré que la décision pouvait déboucher sur des progrès rapides et conséquents) a été bâti à partir des propriétés asymptotiques des moments empiriques d'ordre 2 et 4. Son application est cependant subordonnée à des hypothèses strictes de normalité et nécessite, pour être efficace, des échantillons de taille élevée (plusieurs centaines d'individus).

Dans le cadre du problème de décision correspondant à ce test, un essai d'analyse de la valeur du couple : Signe/Valeur absolue a mis en évidence l'importance du signe qui, dans les conditions étudiées, renferme 75 % de l'information apportée par l'écart algébrique. Ce résultat devrait nous convaincre de l'intérêt à prévoir, dès la mise en place des contrôles, un repérage complet des échantillons prélevés, quitte à compenser les contraintes que cela entraîne par un allègement substantiel du taux de contrôle.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- **Ouvrages consultés**

Jeanine ULMO et Jacques BERNIER. – *Éléments de décision statistique* (Presses Universitaires de France).

Harald CRAMER. – *Mathematical Methods of statistics* (Princeton University Press).

A. HALD. – *Statistical theory with engineering applications* (New York, John Wiley and sons, inc.).

- **Exemples choisis dans une étude interne à Tréfinmétaux-Dives-sur-Mer.**

Guy DELAITRE. – *Flèches des bandes maillechort pour Téléphone (7.5.74)*.