J. L. SOLER

Croissance de fiabilité des versions d'un logiciel

Revue de statistique appliquée, tome 44, n° 1 (1996), p. 5-20

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1996__44_1_5_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1996, **XLIV** (1), 5-20

CROISSANCE DE FIABILITÉ DES VERSIONS D'UN LOGICIEL

J.L. Soler

IMAG - Laboratoire de Modélisation et Calcul
B.P 53, 38041 Grenoble Cedex 09

RÉSUMÉ

On présente une modélisation stochastique qui prend en compte une correction différée et irrégulière d'un logiciel, en vue de l'évaluation statistique de la fiabilité de ses versions successives, en représentant les processus des instants de défaillance et des instants de correction par des processus ponctuels mutuellement excités. Les résultats sont appliqués à la détermination des durées des versions successives et à la prédiction des caractéristiques de fiabilité du logiciel quand on ne dispose pas de l'observation des instants des défaillances (comme on le suppose le plus souvent de façon irréaliste dans les modèles classiques) mais seulement de leur nombre et de celle des instants de correction. On modélise ainsi les conditions d'une pratique courante. La croissance de fiabilité est estimée alors par des méthodes statistiques classiques, généralisant les résultats de [1] et [6] .

Mots-clés : *Evaluation statistique de la fiabilité des logiciels. Correction différée. Processus ponctuels mutuellement excités. Estimations de maximum de vraisemblance et bayésienne de la croissance de fiabilité.*

SUMMARY

We present a model of delayed and irregular correction process of a software, in order to evaluate statistically its reliability growth. The failure times and correction times processes are represented as mutually exciting point processes. The results are used to characterize the successive versions lengths and predict their reliability on the basis of the correction process observation and when the failure times are assumed to be missed. This is a new approach to take into acount a current practice. Then, the reliability growth is evaluated by mean of classical statistical methods, generalizing the results of [1] and [6].

Keywords : *Statistical evaluation of software reliability. Delayed correction. Mutually exciting point processes. Maximum likelihood and bayesian estimation of reliability growth.*

1. Notations et hypothèses

Un logiciel, mis en fonctionnement à l'instant 0, est susceptible d'avoir des défaillances à des instants aléatoires successifs $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ formant un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$. On pose $N = \{N_t\}_{t \geqslant 0}$ où $\forall\, t \geqslant 0,\ N_t = \sum_{i=1}^{\infty} I_{[0,t]}(T_i)$ représente le nombre de défaillances survenues jusqu'à l'instant t et $\forall\, i \geqslant 1,\ X_i = T_i - T_{i-1}$ (avec $T_0 = 0$), le temps écoulé entre la $(i-1)^{\mathrm{e}}$ et la i^{e} défaillance. On suppose que ces défaillances sont uniquement dues à des fautes de conception susceptibles d'être corrigées.

La *fiabilité* du logiciel, considéré à un instant donné t de sa vie opérationnelle, est définie par la fontion du temps

$$\forall\, \tau \geqslant 0,\ \ R_t(\tau) = P(T_{N_t+1} - t > \tau).$$

On peut espérer que, grâce aux corrections, le logiciel présente une *croissance de fiabilité* , à savoir que $\forall\, \tau \geqslant 0,\ \ R_t(\tau)$ est une fonction croissante de t. Il s'agit alors d'évaluer cette fiabilité, à partir de données concernant le comportement du logiciel jusqu'à cet instant. La procédure utilisée (cf. [1], [2]), consiste à proposer un modèle de loi de probabilité $\{P_\varphi; \varphi \in \Phi\}$ pour le processus ponctuel N, dépendant de paramètres notés globalement φ et tenant compte du phénomène de correction des fautes à l'origine des défaillances, puis à estimer φ au vu de l'observation de ce processus entre 0 et t. On se place le plus souvent à l'instant $t = t_n$ de la n^{e} défaillance observée et l'on suppose disposer de l'observation $t_1, \ldots, t_n$ des n instants successifs de défaillance ou, ce qui revient au même, de l'observation $x_1, \ldots, x_n$ des durées entre ces défaillances. On adopte, par une méthode statistique quelconque, une valeur $\widehat{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)$ et l'on estime la fiabilité par

$$\forall\, \tau \geqslant 0,\ \widehat{R}_n(\tau) = P_{\widehat{\varphi}(x_1,\ldots,x_n)}(X_{n+1} > \tau).$$

En fait, cette démarche n'est pas toujours réaliste car les praticiens omettent le plus souvent (ou n'ont pas la possibilité), de noter les instants de défaillance, surtout quand la correction des fautes n'est pas immédiate. Dans ce cas, le logiciel est corrigé quand il a manifesté *trop* de défaillances et l'on retient plutôt les instants d'intervention ou les durées entre celles-ci, que l'on appelle aussi durées des *versions* successives, ainsi que les nombres de défaillances survenues pour chacune d'elles.

C'est cette pratique que nous nous proposons de modéliser ici.

On suppose que les données d'entrée du logiciel à chaque sollicitation étant aléatoires, ses défaillances ne sont pas bloquantes et qu'il peut être relancé sans que l'on ait nécessairement remédié aux fautes imputées, ou même qu'on les ait identifiées. On admet naturellement que le logiciel ne s'use pas en fonctionnant et que son taux de défaillance est constant entre deux corrections.

Les corrections sont effectuées à des instants aléatoires successifs $0 < C_1 < C_2 < \ldots$ formant un autre processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$. On pose $K = \{K_t\}_{t \geqslant 0}$ où, $\forall\, t \geqslant 0,\ K_t = \sum_{j=1}^{\infty} I_{[0,t]}(C_j)$ représente le nombre de corrections effectuées jusqu'à l'instant t et $\forall\, j \geqslant 1$, on note $Y_j = C_j - C_{j-1}$ (avec $C_0 = 0$) le temps écoulé entre la $(j-1)^e$ et la j^e correction. La j^e correction a pour effet de faire passer le taux de défaillance du logiciel d'une valeur λ_j (avant correction) à une valeur λ_{j+1} (après correction), le taux de défaillance initial étant égal à $\lambda_1 > 0$; des corrections bien faites devant conduire à une suite décroissante $\{\lambda_j\}_{j\geqslant 1}$.

Toutes ces hypothèses impliquent que, conditionnellement au processus de correction K, le processus de défaillance est un processus ponctuel (cf. [5]) d'intensité

$$\begin{aligned}\forall t \geqslant 0,\ \ \lambda_t &= \lambda_t(N_t, T_1, \ldots, T_{N_t};\ K_t,\ C_1, \ldots, C_{K_t})\\ &\overset{\text{déf}}{=} \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_t = 1/N_t, T_1, \ldots, T_{N_t};\ K_t, C_1, \ldots, C_{K_t})\\ &= \lambda_{K_t+1}\end{aligned}$$

c'est-à-dire, qu'entre deux instants successifs de correction, c'est un processus de Poisson homogène tronqué.

On suppose que les corrections sont suscitées par les défaillances de la façon suivante : à chaque instant t, l'intensité du processus de correction K est, conditionnellement au processus de défaillance N, proportionnelle au nombre de défaillances survenues depuis la précédente correction; cette intensité relative s'écrit :

$$\begin{aligned}\forall t \geqslant 0,\ \ \mu_t &= \mu_t(K_t, C_1, \ldots, C_{K_t};\ N_t,\ T_1, \ldots, T_{N_t})\\ &\overset{\text{déf}}{=} \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(K_{t+\Delta t} - K_t = 1/K_t, C_1, \ldots, C_{K_t};\ N_t, T_1, \ldots, T_{N_t})\\ &= \mu \cdot (N_t - N_{C_{K_t}})\end{aligned}$$

où $\mu \in [0, \infty]$. Ceci implique en particulier,

– qu'aucune correction n'est effectuée avant la première défaillance,

– quand $\mu = 0$, aucune correction n'est jamais effectuée,

– quand $\mu = \infty$, une correction est effectuée à chaque défaillance (avec la convention $0 \times \infty = 0$).

Le but de l'étude est d'obtenir l'intensité propre du processus de correction, et d'en déduire les caractéristiques de fiabilité du logiciel à partir des durées entre corrections successives (c'est-à-dire des durées de ses versions successives).

2. Loi de probabilité du processus de correction

Il s'agit de déterminer l'intensité de correction propre :

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_t &= \widehat{\mu}_t(K_t, C_1, \ldots, C_{K_t})\\ &\overset{\text{déf}}{=} \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t}(K_{t+\Delta t} - K_t = 1/K_t, C_1, \ldots, C_{K_t}).\end{aligned}$$

On montre, comme pour tout processus ponctuel (cf. [5]) que :

$$\forall t \geqslant c_j,$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_t(j, c_1, \ldots, c_j) &\overset{\text{déf}}{=} \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(K_{t+\Delta t} - K_t = 1/K_t = j,\ C_1 = c_1, \ldots, C_j = c_j) \\ &= -\frac{d}{dt} \log P(C_{j+1} > t/C_1 = c_1, \ldots, C_j = c_j)\end{aligned}$$

et donc,

$$\forall j \geqslant 1,\ \forall t \geqslant c_j,$$

$$P(C_{j+1} > t/K_t = j,\ C_1 = c_1, \ldots, C_j = c_j) = e^{-\int_{c_j}^{t} \widehat{\mu}_s(j; c_1, \ldots, c_j) ds} \tag{1}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}&P(C_{j+1} > t/K_t = j,\ C_1 = c_1, \ldots, C_j = c_j) \\ &\qquad = E[P(C_{j+1} > t/K_t = j,\ C_1 = c_1, \ldots, C_j = c_j;\ \{N_u; 0 \leqslant u \leqslant t\})]\end{aligned}$$

donc on a aussi,

$$\forall j \geqslant 1,\ \forall t \geqslant c_j,$$

$$P(C_{j+1} > t/K_t = j,\ C_1 = c_1, \ldots, C_j = c_j) = E\left[e^{-\int_{c_j}^{t} \mu \cdot (N_s - N_{c_j}) ds}\right].$$

Le calcul de cette espérance mathématique s'obtient par le résultat technique suivant (cf. [7]) :

LEMME – *Soit N un processus de Poisson d'intensité $\lambda(.)$ et $\mu(.)$ une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$. Alors,*

$$\forall\ a \geqslant 0, \forall t \geqslant a,\ \ E\left[e^{-\int_a^t \mu(s)(N_s - N_a) ds}\right] = e^{-\int_a^t (1 - e^{-\int_s^t \mu(u)\, du}) \lambda(s) ds}.$$

Dans le contexte, $a = c_j$ et $\lambda(s)) = \lambda_{j+1}$ quand $s > c_j$, $\mu(.) = \mu$; par suite,

$$E\left[e^{-\int_{c_j}^{t} \mu(N_s - N_{c_j}) ds}\right] = e^{-\lambda_{j+1} \int_{c_j}^{t} (1 - e^{-\mu(t-s)}) ds} \tag{2}$$

et on en déduit :

PROPOSITION 2.1. *Le processus de correction est un processus ponctuel dont l'intensité est donnée par :*

$$\forall t \geqslant 0, \;\; \widehat{\mu}_t = \widehat{\mu}_t(K_t, C_1, \ldots, C_k) = \lambda_{K_t+1} \cdot \left[1 - e^{-\mu \cdot (t - C_{K_t})}\right].$$

En effet, par identification de (1) et (2), on a :

$$\begin{aligned} \forall t \geqslant c_j, \;\; \widehat{\mu}_t(j; c_1, \ldots, c_j) &= \frac{d}{dt}\left[\lambda_{j+1} \int_{c_j}^{t} (1 - e^{-\mu(t-s)}) ds\right] \\ &= \lambda_{j+1}\left[1 - e^{-\mu(t-c_j)}\right] \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Cette intensité ne dépendant que de K_t et de $(t - C_{K_t})$, le processus est tel que les v.a.r $Y_j, \; j \geqslant 1$, sont indépendantes et de lois respectives $S(\lambda_j; \mu)$ de densité :

$$\forall y \geqslant 0, \quad f_{Y_j}(y) = \lambda_j(1 - e^{-\mu y}) e^{-\lambda_j \left(y - \frac{(1-e^{-\mu y}}{\mu}\right)}$$

3. Durées des versions du logiciel

On étudie plus précisément la loi de probabilité des intervalles de temps Y_j, $j \geqslant 1$ entre les corrections successives. En notant λ le taux de défaillance courant, la durée de la version courante est la v.a.r Y de loi $S(\lambda; \mu)$ définie par la densité

$$\forall y \geqslant 0, \;\; f_Y(y) = \lambda(1 - e^{-\mu y}) e^{-\lambda \left(y - \frac{(1-e^{-\mu y}}{\mu}\right)}$$

dont le taux de hasard est $h(y) = \lambda(1 - e^{-\mu y}), \, y \geqslant 0$.

On peut donner une représentation différente de Y qui permet d'en simuler des réalisations et d'interpréter le paramètre μ.

PROPOSITION 3.1. *Soient $\{T_i\}_{i \geqslant 1}$ les instants de réalisation du processus de Poisson homogène d'intensité λ et $\{W_i\}_{i \geqslant 1}$ une suite de v.a.r indépendantes entre-elles et indépendantes du processus, de même loi exponentielle de paramètre μ. Alors la v.a.r $Y = \min\limits_{i \geqslant 1} \{T_i + W_i\}$ suit la loi $S(\lambda; \mu)$.*

En effet, soients $y > 0$ et N_y le nombre d'événements du processus jusqu'à l'instant y.

$$P(Y > y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\min_{i \geqslant 1} \{T_i + W_i\} > y / N_y = n) \cdot P(N_y = n)$$

mais, sachant que $N_y = n$, les v.a.r T_i sont réparties au hasard entre 0 et y et donc

$$\begin{aligned} P(Y > y) &= P(N_y = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} P(T_i + W_i > y / N_y = n) \cdot P(N_y = n) \\ &= e^{-\lambda y} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{y} \int_0^y e^{-\mu(y-w)} dw \right]^n \cdot \frac{e^{-\lambda y} (\lambda y)^n}{n!} \end{aligned}$$

comme $\frac{1}{y} \int_0^y e^{-\mu(y-w)} dw = \frac{1}{y} \frac{(1 - e^{-\mu y})}{\mu}$, on obtient :

$$P(Y > y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda y} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{(1 - e^{\mu y})^n}{n!} = e^{-\lambda \left(y - \frac{(1 - e^{-\mu y})}{\mu} \right)}.$$

On constate bien qu'à chaque instant y, le taux de hasard de Y est proportionnel au nombre de réalisations du processus de Poisson survenues jusque-là puisqu'elle se comporte comme un minimum de N_y v.a.r indépendantes de loi exponentielle de paramètre μ.

Remarques :

1) Cette construction de Y permet d'interpréter les v.a.r W_i comme des durées de tolérance de chaque défaillance, la tolérance du logiciel étant le minimum de celles des défaillances déjà survenues. Le paramètre μ s'interprète alors comme un taux instantané (constant) d'intolérance aux défaillances. (On pourrait aussi parler de durées d'insensibilité aux défaillances et de taux de sensibilité à celles-ci).

2) On peut aussi remarquer que Y a même loi de probabilité que l'instant de sortie du premier client servi dans la file d'attente $M/M/\infty$.

4. Nombre de défaillances des versions

PROPOSITION 4.1. *La v.a.r N_Y égale au nombre de défaillances survenues pendant la durée Y de la version courante, suit la loi de probabilité définie par*

$$P(N_Y = 0) = 0, \ \ et\ \forall n \geqslant 1, \quad P(N_Y = n) = \frac{n \rho^{n-1}}{(\rho + 1) \dots (\rho + n)}$$

où $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. De plus, quand $\rho \to \infty$, $E_\rho(N_Y) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2} \rho}$.

En effet,

$$P(N_Y = 0) = 0 \ \text{ et } \ \forall n \geqslant 1, \quad P(N_Y = n) = \int_0^{\infty} P(N_Y = n / Y = y) f_Y(y) dy$$

mais,

$$\begin{aligned}
P(N_Y = n/Y = y) &= \frac{f_{Y/N_y=n}(y) \cdot P(N_y = n)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{n\mu E(e^{-\int_0^y \mu N_s\, ds}) e^{-\lambda y} (\lambda y)^n}{n!\lambda(1 - e^{-\mu y}) e^{-\lambda\left(y - \frac{(1-e^{-\mu y})}{\mu}\right)}} \\
&= \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu y})} \left[\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu y})\right]^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

en effet, $f_{Y/N_y=n}(y) = E\left[f_{Y/N_y=n}(y)/\{N_u;\ 0 \leqslant u \leqslant y\}\right]$. On utilise, pour ce calcul, le fait que, sachant que $N_y = n$, on a $\int_0^y N_s ds = ny - (T_1 + \ldots + T_n) = (y - T_1) + \ldots + (y - T_n)$, qui a même loi de probabilité qu'une somme de n v.a.r indépendantes, de loi uniforme sur $[0, y]$ et donc, $E(e^{-\mu \int_0^y N_s\, ds}) = \left[\frac{1}{y}\int_0^y e^{-\mu u}\, du\right]^n$.

Ce résultat prouve, en posant $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, que conditionnellement à Y, la v.a $N_Y - 1$ suit la loi de Poisson de paramètre $\rho(1 - e^{-\mu Y})$. On en déduit que $E(N_Y/Y) = 1 + \rho(1 - e^{-\mu Y})$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
P(N_Y = n) &= \mu \int_0^\infty \frac{e^{-\rho(1-e^{-\mu y})} \left[\rho(1 - e^{-\mu y})\right]^n e^{-\lambda y + \rho(1-e^{-\mu y})}}{(n-1)!} dy \\
&= \frac{\mu \rho^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda y} (1 - e^{-\mu y})^n\, dy
\end{aligned}$$

En posant $u = e^{-\mu y}$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(N_Y = n) &= \frac{\rho^n}{(n-1)!} \int_0^1 u^{\rho-1} (1 - u)^n\, du \\
&= \frac{\rho^n \Gamma(\rho)\Gamma(n+1)}{(n-1)!\Gamma(\rho + n + 1)}
\end{aligned}$$

soit, $P(N_Y = 0) = 0$, et $\forall n \geqslant 1$,

$$P(N_Y = n) = \frac{n\rho^n}{\rho(\rho+1)\ldots(\rho+n)} = \frac{n\rho^n}{[\rho]^{n+1}} = \frac{n\rho^{n-1}}{[1+\rho]^n}$$

selon la notation classique (cf. [3]) : $[x]^n = x(x+1)\ldots(x+n-1)$.

La loi de probabilité de N_Y ne dépend donc que du rapport $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. On peut démontrer (cf. [7]) directement ou encore à partir de la fonction génératrice de N_Y, qui est calculable quand ρ est entier, que son espérance mathématique est équivalente à $\sqrt{\frac{\pi}{2}\rho}$, quand ρ devient grand.

5. Inférence du modèle

L'estimation des paramètres $\lambda,\ \mu,\ \rho$ dépend de la nature des observations dont on dispose. Elles sont constituées du nombre de défaillances survenues pendant la durée d'une version, accompagné ou non de la durée de cette version, ces observations pouvant être répétées sur plusieurs versions successives, auquel cas on pourra estimer la croissance de fiabilité due aux corrections effectuées sur le logiciel.

5.1. Cas d'une version unique

5.1.1. Estimation de ρ à partir du nombre n de défaillances de la version

PROPOSITION 5.1. *L'estimation de maximum de vraisemblance de ρ est l'unique racine positive $\widehat{\rho}(n)$, du polynôme $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)S_{n+1}^{k}\widehat{\rho}^{\,k-1} - \widehat{\rho}^{\,n}$, où les S_n^k sont les nombres de Stirling de première espèce. De plus, quand n est grand, $\widehat{\rho}(n) \approx \frac{n^2}{2}$.*

En effet, la fontion de vraisemblance de ρ est

$$L_n(\rho) = P_\rho(N_Y = n) = \frac{n\rho^{n-1}}{(\rho+1)\ldots(\rho+n)} = \frac{n\rho^n}{[\rho]^{n+1}}$$

et la valeur la plus vraisemblable de ρ, si elle existe, est solution de

$$\frac{d}{d\rho}L_n(\rho) = \left.\frac{n^2\rho^{n-1}[\rho]^{n+1} - \frac{d}{d\rho}[\rho]^{n+1}\cdot n\rho^n}{([\rho]^{n+1})^2}\right|_{\rho=\widehat{\rho}} = 0$$

ce qui revient à résoudre : $n[\widehat{\rho}]^{n+1} - \widehat{\rho}\frac{d}{d\rho}[\widehat{\rho}]^{n+1} = 0$. Mais, en utilisant l'identité (cf. [3]) $[x]^n = \sum_{k=1}^{n} S_n^k x^k$, où les S_n^k sont les nombres de Stirling de première espèce, on obtient la condition :

$$\sum_{k=1}^{n+1}(n-k)S_{n+1}^{k}\widehat{\rho}^{\,k} = 0$$

comme $S_{n+1}^{n+1} = 1$ et que le terme en $k = n$ disparaît, on a finalement à résoudre :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) S_{n+1}^{k} \widehat{\rho}^{\,k-1} - \widehat{\rho}^{\,n} = 0$$

Ce polynôme de degré n, dont la suite des coefficients ne présente qu'un seul changement de signe, admet d'après la règle de Descartes (cf. [4]), une unique racine positive $\widehat{\rho}(n)$ qui est l'estimateur de maximum de vraisemblance de ρ.

Pour $n = 1$, $P_\rho(N_Y = 1) = \frac{1}{1+\rho}$, qui est maximum quand $\rho = 0$;

pour $n = 2$, on a $S_3^1 \widehat{\rho}^{\,0} - \widehat{\rho}^{\,2} = 0$, soit $2 - \widehat{\rho}^{\,2} = 0$, d'où $\widehat{\rho}(2) = \sqrt{2}$;

pour $n = 3$, on a $2S_4^1 \widehat{\rho}^{\,0} + S_4^2 \widehat{\rho}^{\,1} - \widehat{\rho}^{\,3} = 0$, soit $12 + 11\widehat{\rho} - \widehat{\rho}^{\,3} = 0$, d'où $\widehat{\rho}(3) = 3.76$, etc .

on obtient la table de valeurs suivante :

n	$\widehat{\rho}(n)$	n	$\widehat{\rho}(n)$
1	0	10	48.112
2	1.414	20	196.445
3	3.76	30	444.779
4	7.106	40	793.112
5	11.442	50	1241.444
6	16.777	60	1789.774
7	23.111	70	2438.108
8	30.444	80	3186.444
9	38.777	90	4034.778
10	48.112	100	4983.105

On constate que $\widehat{\rho}(n) \approx \frac{n^2}{2}$, quand n devient grand.

5.1.2. Estimation de λ et μ à partir de l'observation conjointe (n, y) du nombre de défaillances et de la durée d'une version

La fonction de vraisemblance est donnée par la loi de probabilité conjointe du couple $(N_Y, Y) : \forall\, (\lambda > 0,\ \mu > 0)$,

$$\begin{aligned} L_{n,y}(\lambda, \mu) &= P_{\lambda,\mu}(N_Y = n / Y = y) f_Y(y) \\ &= \frac{e^{-\rho(1-e^{-\mu y})} \left[\rho(1-e^{-\mu y})\right]^{n-1} \lambda(1-e^{-\mu y}) e^{-\lambda y + \rho(1-e^{-\mu y})}}{(n-1)!} \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda y}(1-e^{-\mu y})^n}{(n-1)!\,\mu^{n-1}} = \frac{g(\lambda; n, y) h(\mu; n, y)}{(n-1)!} \end{aligned}$$

elle se factorise à travers λ et μ séparément.

$\log L_{n,y}(\lambda,\mu) = n \log \lambda - \lambda y - \log (n-1)! + n \log (1-e^{-\mu y}) - (n-1) \log \mu$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\lambda} \log L_{n,y}(\lambda,\mu) = \frac{n}{\lambda} - y\Big|_{\lambda=\widehat{\lambda}} = 0, & \Longrightarrow \widehat{\lambda}(n,y) = \frac{n}{y} \\ \dfrac{\partial}{\partial\mu} \log L_{n,y}(\lambda,\mu) = \dfrac{nye^{-\mu y}}{(1-e^{-\mu y})} - \dfrac{(n-1)}{\mu}\Big|_{\mu=\widehat{\mu}} = 0 & \end{cases}$$

$$\Longrightarrow n\widehat{\mu}ye^{-\widehat{\mu}y} = (n-1)(1-e^{-\widehat{\mu}y})$$

quand $n = 1$, cette dernière relation est vérifiée pour $\mu = 0$ ou pour $\mu = \infty$, or dans ce cas, $h(\mu;\, 1, y) = (1-e^{-\mu y})$ qui est maximum quand $\mu = \infty$; on prendra donc $\widehat{\mu}(1,y) = \infty$ quel que soit y, ce qui revient à estimer que le plus vraisemblablement, la correction est immédiate. Quand $n \geqslant 2$, cette équation admet une solution unique car elle est de la forme $a(\widehat{\mu}) = b(\widehat{\mu})$ où a et b sont deux fonctions positives continues sur $\mathbb{R}_+$, telles que $a\,(0) = b\,(0)$, $a'(0) = ny > b'(0) = (n-1)y$, a est croissante puis décroissante avec $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = 0$ et b est strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = n-1$.

5.2. Estimation de la croissance de fiabilité sur plusieurs versions

5.2.1. Estimation de maximum de vraisemblance et modèle Proportionnel

Supposons que l'on dispose des nombres de défaillances et des durées de m versions successives $(n_i, y_i)_{i=1,\ldots,m}$ de taux de défaillance respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, μ restant constant. La fonction de vraisemblance vaut :

$$L_{(n_i,y_i),i=1,\ldots,m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\mu) = \prod_{i=1}^{m} \frac{g(\lambda_i;\, n_i, y_i)h(\mu;\, n_i, y_i)}{(n_i-1)!}$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^{n_i} \cdot e^{-\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i y_i} \cdot \prod\limits_{i=1}^{m} \left(1-e^{-\mu y_i}\right)^{n_i}}{\mu^{\sum\limits_{i=1}^{m}(n_i-1)} \prod\limits_{i=1}^{m}(n_i-1)!}$$

et les estimations de maximum de vraisemblance des λ_i sont respectivement :

$$\widehat{\lambda}_i = \frac{n_i}{y_i},\ i = 1,\ldots,m.$$

Pour modéliser l'effet des corrections, on peut poser $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_i = \theta\lambda_{i-1}$, pour $i = 2,\ldots,m$, où θ est un coefficient de *proportionnalité* positif inconnu et λ

le taux de défaillance inconnu de la première version. Il y a donc trois paramètres à estimer, dont la vraisemblance vaut :

$$L_{\{(n_i,y_i),i=1,\dots,m\}}(\lambda,\theta,\mu) = \prod_{i=1}^{m} \frac{g(\lambda\theta^{i-1};n_i,y_i)h(\mu;n_i,y_i)}{(n_i-1)!}$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^{m}(\lambda\theta^{i-1})^{n_i}\cdot e^{-\lambda\sum_{i=1}^{m}\theta^{i-1}y_i}\cdot\prod_{i=1}^{m}(1-e^{-\mu y_i})^{n_i}}{\mu^{\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)}\prod_{i=1}^{m}(n_i-1)!}$$

d'où,

$$\log L_{\{(n_i,y_i),i=1,\dots,m\}}(\lambda,\theta,\mu) = \sum_{i=1}^{m}(i-1)n_i\log\theta + \sum_{i=1}^{m}n_i\log\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{m}\theta^{i-1}y_i$$
$$+\sum_{i=1}^{m}n_i\log(1-e^{-\mu y_i}) - \sum_{i=1}^{m}\log(n_i-1)! - \sum_{i=1}^{m}(n_i-1)\log\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log L_{\{(n_i,y_i),i=1,\dots,m\}}(\lambda,\theta,\mu) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{m}n_i - \sum_{i=1}^{m}\theta^{i-1}y_i\Bigg|_{\substack{\lambda=\widehat{\lambda}\\ \theta=\widehat{\theta}}} = 0,$$

$$\Longrightarrow \widehat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{m}n_i}{\sum_{i=1}^{m}\widehat{\theta}^{i-1}y_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L_{\{(n_i,y_i),i=1,\dots,m\}}(\lambda,\theta,\mu) = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{m}(i-1)n_i - \lambda\sum_{i=1}^{m}(i-1)\theta^{i-2}y_i\Bigg|_{\substack{\theta=\widehat{\theta}\\ \lambda=\widehat{\lambda}}} = 0,$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{m}(j-1)n_j\sum_{i=1}^{m}\widehat{\theta}^{i-1}y_i - \sum_{j=1}^{m}n_j\sum_{i=1}^{m}(i-1)\widehat{\theta}^{i-1}y_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{m}\widehat{\theta}^{i-1}y_i\left[\sum_{j=1}^{m}(j-1)n_j - (i-1)\sum_{j=1}^{m}n_j\right] = 0$$
$$\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{m}(j-i)n_j\right]y_i\widehat{\theta}^{i-1} = 0$$

ce qui montre que $\widehat{\theta}$ est racine d'un polynôme de degré $m-1$, dont les coefficients sont les composantes du vecteur

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & m-1 \\ -1 & 0 & 1 & m-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(m-1) & -(m-2) & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}$$

la suite de ces coefficients ne présentant qu'un seul changement de signe, le polynôme admet, d'après la règle de Descartes (cf. [4]), une unique racine positive $\widehat{\theta}(n_1, \dots, n_m; y_1, \dots, y_m)$. Il s'agit en fait de déterminer le vecteur $(1, \widehat{\theta}, \widehat{\theta}^2, \dots, \widehat{\theta}^{m-1})$ orthogonal au précédent dans $\mathbb{R}_+^m$.

Pour $m = 2$, on obtient

$$\left\langle \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \widehat{\theta} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

soit :

$$n_2 y_1 - n_1 y_2 \widehat{\theta} = 0$$

d'où :

$$\widehat{\theta} = \frac{n_2}{n_1} \frac{y_1}{y_2}$$

pour $m = 3$, on obtient

$$\left\langle \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \widehat{\theta} \\ \widehat{\theta}^2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

soit :

$$(n_2 + 2n_3) y_1 + (n_3 - n_1) y_2 \widehat{\theta} - (2n_1 + n_2) y_3 \widehat{\theta}^{\,2} = 0$$

par suite :

$$\widehat{\theta} = \frac{(n_3 - n_1) y_2 + \sqrt{(n_3 - n_1)^2 y_2^2 + 4(2n_1 + n_2)(n_2 + 2n_3) y_1 y_3}}{2(2n_1 + n_2) y_3}$$

pour $m > 3$, on utilisera un procédé itératif de Newton pour déterminer $\widehat{\theta}$.

Enfin, en ce qui concerne le paramètre μ, on a

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log L_{\{(n_i, y_i), i=1,\dots,m\}}(\lambda, \theta, \mu) = \sum_{i=1}^{m} n_i \frac{y_i e^{-\mu y_i}}{(1 - e^{\mu y_i})} - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \Big|_{\mu = \widehat{\mu}} = 0$$

soit à résoudre :

$$\sum_{i=1}^{m} n_i \left[\frac{\widehat{\mu} y_i e^{-\widehat{\mu} y_i}}{(1 - e^{-\mu y_i})} - 1 \right] = m.$$

Remarque : On constate que l'estimation des paramètres de fiabilité λ et θ ne nécessite pas celle du paramètre de temporisation de la correction μ, ce qui ne serait pas le cas si l'on ne disposait que des durées des versions. Cela est dû à la factorisation de la fonction de vraisemblance des paramètres relative aux couples (n_i, y_i) ce qui ne se produit pas pour celle relative aux y_i seuls. En fait, la connaissance de μ importe peu en pratique.

On estime donc la fiabilité de la version $m + 1$ par :

$$\forall \tau \geqslant 0, \quad \widehat{R}_{m+1}(\tau) = e^{-\widehat{\lambda}\,\widehat{\theta}^{m}\tau}.$$

Enfin, l'étude asymptotique des estimateurs dans le modèle Proportionnel a été faite en détails dans [1], pour le cas où la correction est immédiate ($\mu = \infty$). Dans le cas de correction différée, outre qu'elle paraît difficile, elle ne semble pas très utile en pratique puisqu'on ne dispose généralement de données de défaillances que d'un petit nombre de versions.

5.2.2. Estimation bayésienne de la croissance de fiabilité

Généralement, m est petit ce qui est un handicap pour l'estimation précise du paramètre de croissance de fiabilité θ par la méthode du maximum de vraisemblance. De plus, on peut douter qu'il soit constant d'une correction à l'autre. Pour palier ces deux inconvénients, on propose une méthode bayésienne qui consiste à supposer que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ est la réalisation d'un vecteur aléatoire $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$ de loi de probabilité à priori P_Λ, de densité $f_\Lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. On estime alors chaque λ_i par l'espérance mathématique de Λ_i dans la loi à postériori de Λ. On remarque également que cette méthode ne nécessite pas non plus la connaissance du paramètre μ puisqu'il s'élimine dans le calcul de la loi à postériori, dont la densité est donnée par :

$$f_{\Lambda/N_i=n_i, Y_i=y_i, i=1,\ldots,m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{m} \left[\lambda_i^{n_i}(1 - e^{-\mu y_i})^{n_i} e^{-\lambda_i y_i} \;/\; (n_i - 1)!\mu^{n_i - 1}\right] f_\Lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{\int_{\lambda_i > 0, i=1,\ldots,m} \prod_{i=1}^{m} \left[\lambda_i^{n_i}(1 - e^{-\mu y_i})^{n_i} e^{-\lambda_i y_i} \;/\; (n_i - 1)!\mu^{n_i - 1}\right] f_\Lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) d\lambda_1 \ldots d\lambda_m}$$

$$= \frac{\left(\prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{n_i}\right) e^{-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i} f_\Lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{\int_{\lambda_i > 0, i=1,\ldots,m} \left(\prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{n_i}\right) e^{-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i} f_\Lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) d\lambda_1 \ldots d\lambda_m}$$

Il est naturel d'utiliser une loi de probabilité *à priori* pour laquelle le vecteur aléatoire soit markovien et décroissant, si l'on soupçonne une croissance de fiabilité. On peut supposer, par exemple, que Λ est à (dés)-accroissements indépendants à savoir que les v.a.r $U_i = \Lambda_i - \Lambda_{i+1}$ sont indépendantes de densités respectives $f_i(u_i)$, $i = 1, \ldots, m$ (avec $\Lambda_{m+1} = 0$). (C'est le cas, par exemple, quand $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$ a même loi que m v.a.r indépendantes rangées dans l'ordre décroissant). Le dénominateur vaut alors

$$D = \prod_{i=1}^{m} \int_0^\infty (u_i + \ldots + u_m)^{n_i} e^{-u_i(y_1 + \ldots + y_i)} f_i(u_i)\, du_i$$

mais

$$(u_i + \ldots + u_m)^{n_i} = \sum_{\left\{\substack{\nu_j^i \geqslant 0,\ j=i,\ldots m \\ \nu_i^i + \ldots + \nu_m^i = n_i}\right\}} \frac{n_i!}{\nu_i^i!\, \nu_{i+1}^i! \ldots \nu_m^i!} u_i^{\nu_i^i} u_{i+1}^{\nu_{i+1}^i} \ldots u_m^{\nu_m^i}$$

alors $$D = \sum_\nu K(\nu; n_1, \ldots, n_m) \prod_{i=1}^{m} \int_0^\infty u_i^{\beta_i(\nu)} e^{-u_i s_i} f_i(u_i) du_i$$

où $s_i = y_1 + \ldots + y_i$ et $\beta_i(\nu) = \sum_{k=1}^{i} \nu_i^k$, tandis que $K(\nu; n_1, \ldots, n_m)$ est un coefficient numérique. On en déduit que la loi de probabilité à *postériori* du vecteur aléatoire $U = (U_1, \ldots, U_m)$ est une combinaison convexe de lois de probabilité, de la forme $\sum_\nu p_\nu(n_1, \ldots, n_m;\ s_1, \ldots, s_m) \bigotimes_{i=1}^{m} G_i^\nu$ avec $\sum_\nu p_\nu(n_1, \ldots, n_m; s_1, \ldots, s_m) = 1$, où G_i^ν est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}_+$, de densité

$$g_i^\nu(u_i; s_i) = \frac{u_i^{\beta_i(\nu)} e^{-u_i s_i} f_i(u_i)}{\int_0^\infty u_i^{\beta_i(\nu)} e^{-u_i s_i} f_i(u_i) du_i}$$

on aura donc pour $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned}\widehat{u}_i &= E(U_i/n_1, \ldots, n_m; s_1, \ldots, s_m) \\ &= \sum_{\nu} p_\nu(n_1, \ldots, n_m; s_1, \ldots, s_m) \frac{\displaystyle\int_0^\infty u_i^{\beta_i(\nu)+1} e^{-u_i s_i} f_i(u_i) du_i}{\displaystyle\int_0^\infty u_i^{\beta_i(\nu)} e^{-u_i s_i} f_i(u_i) du_i}\end{aligned}$$

et finalement, l'estimateur bayésien de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ est $(\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_m)$ avec

$$\forall\, i = 1, \ldots, m, \ \widehat{\lambda}_i = \sum_{j=i}^{m} \widehat{u}_j.$$

6. Conclusion

Cette étude montre d'abord que l'on peut modéliser avec profit, le fait que les processus de défaillance et de correction d'un logiciel sont deux processus ponctuels mutuellement excités et que l'on peut supposer que les corrections ne sont pas immédiates comme on le sous-entend généralement. Mais surtout, que les paramètres du modèle peuvent être estimés sans que l'on dispose des observations des instants de défaillance, pourvu que l'on ait celles des nombres de défaillances des versions et de leurs durées respectives, et qu'il n'est pas nécessaire de connaître le paramètre de temporisation de la correction. En fait, il n'est pas nécessaire de connaître son mécanisme, puisque les estimateurs obtenus s'avèrent être ceux que l'on aurait en faisant les corrections au bout de nombres fixés (déterministes) de défaillances. Leurs propriétés n'étant toutefois pas les mêmes.

Je remercie les relecteurs pour les améliorations qu'ils m'ont permis d'apporter à ce texte.

Références

[1] GAUDOIN, O. & SOLER, J.-L. Statistical analysis of the geometric de-eutrophication software reliability model. *IEEE Trans. on Reliability*, 1992, vol. 41, 4, pp. 518-524.

[2] GAUDOIN, O. & SOLER, J.-L. Modèles pour l'évaluation de la fiabilité des systèmes présentant des fautes de conception. Application à la fiabilité des logiciels. *Revue de Statistique Appliquée*, 1992, XXXX (2), pp. 91-98.

[3] GRAHAM, R.L. , KNUTH, D.E. & PATASHNIK, O. *Concrete mathematics*. Addison-Wesley Publ. C°, N.Y., 1989.

[4] HENRICI, P. *Applied and computationnal complex analysis.* vol. 1. J. Wiley, N.Y., 1974.

[5] SNYDER, D.L. *Random Point Processes*. J. Wiley, N.Y., 1975.

[6] SOLER, J.L. & EL AROUI, M. A bayesian framework for software reliability growth evaluation. *A paraître, IEEE Trans. on Reliability*.

[7] SOLER, J.L. Un modèle de correction différée et irrégulière en Fiabilité des Logiciels. *Rapport de recherche du projet IMAG : Modèles Aléatoires et Informatique*, n° 1, Mai 1994.