RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO TONOLO

Sistemi isostatici dei corpi elastici negli spazi a curvatura costante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 2 (1931), p. 152-163
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1931__2__152_0>

SISTEMI ISOSTATICI DEI CORPI ELASTICI NEGLI SPAZÎ A CURVATURA COSTANTE

di ANGELO TONOLO

In una precedente ricerca (¹) ho determinato tutti i sistemi isostatici che può ammettere un corpo elastico isotropo in equilibrio in assenza di forze di massa, nell'ipotesi che siano costanti gli sforzi che agiscono sulle superficie del sistema. Nella presente Nota ho studiato lo stesso problema, supponendo che il corpo sia immerso in uno spazio a curvatura costante. Il risultato di questo studio fu, dirò così, negativo per gli spazî a curvatura positiva, nel senso che in tali spazî non esistono mezzi elastici che ammettono sistemi isostatici nella ipotesi poc'anzi precisata. Negli spazî a curvatura negativa ha luogo la stessa esclusione, quando si esige che gli sforzi, cui sono sottoposte le superficie isostatiche, siano eguali fra loro.

Sistemi isostatici possono invece esistere se i tre sforzi sono diversi fra loro, oppure due sono eguali e distinti dal terzo. Nel primo caso uno sforzo è nullo, e gli altri due sono eguali ed opposti; nel secondo caso, i due sforzi sono vincolati fra loro da una semplice relazione in cui figurano soltanto le costanti elastiche del mezzo.

Assunte a superficie coordinate quelle del sistema isostatico, il ds^2 dello spazio occupato dal corpo assume, nel primo caso, la forma

$$ds^2 = e^{2x_3\sqrt{-k}}(dx_1^2 + dx_2^2) + dx_3^2,$$

(¹) A. TONOLO, *Sui sistemi isostatici con sforzi costanti di un mezzo elastico in equilibrio*, [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. I, (1932)].

ove $k < 0$, denota la curvatura dello spazio, e nel secondo caso, la forma

$$ds^2 = e^{2x_3\sqrt{-k}}\,dx_1^2 + e^{-2x_3\sqrt{-k}}\,dx_2^2 + dx_3^2 .$$

I. - Preliminari

Un corpo elastico isotropo S immerso in uno spazio a curvatura costante k non nulla, in equilibrio in assenza di forze di massa, sia dotato di un triplo sistema ortogonale di superficie isostatiche soggette agli sforzi unitari θ_h. Introduciamo le rotazioni γ_{hkl} di Ricci relative alla terna di congruenze costituite dalle mutue intersezioni delle superficie isostatiche. Questi coefficienti sono in numero di nove distinti, per indicare i quali possiamo liberarci dalla notazione a tre indici, e usare quella a due indici, facendo la posizione ([1])

$$\rho_{hk} = \gamma_{h+1\, h+2\, k} .$$

Ricordiamo che in forza della normalità delle congruenze in discorso, le γ_{hkl} a tre indici diversi sono nulle, e quindi

$$\rho_{hh} = 0 .$$

Ponendo

(1) $$\mu_h = \theta_h - \theta_{h+1} ,$$

le equazioni di equilibrio di Lamé del corpo S, in assenza di forze di massa, sono le seguenti ([2]):

(2) $$\frac{d\theta_k}{d\sigma_h} + \mu_h \rho_{h+2\, h+1} + \mu_{h+2}\rho_{h+1\, h+2} = 0,$$

([1]) Ora, e nel seguito, gli indici delle lettere devono assumere successivamente i valori 1, 2, 3. Converremo ancora di considerare equivalenti quegli indici che differiscono fra loro per tre, o per multipli di tre.

([2]) A. Tonolo: *Forma intrinseca delle equazioni di equilibrio dei corpi elastici isotropi.* [Rend. Acc. Lincei, Vol. XI, serie 6, (1930)].

dove $d\sigma_h$ è l'elemento d'arco della linea tangente allo sforzo θ_h.

Alle tre equazioni (2) vanno aggiunte le sei equazioni che ci assicurano che lo spazio, dove è immerso il corpo S, è a curvatura costante k, e inoltre le sei equazioni di SAINT-VENANT, che legano fra loro gli sforzi θ_h, le rotazioni ρ_{hk} e la curvatura k, le quali costituiscono la generalizzazione di quelle ben classiche dell'ordinaria teoria elastica.

Ammesso che il corpo S sia dotato di sistemi isostatici, proponiamoci la quistione di determinare tutti quelli nei quali gli sforzi θ_h, pure variando con l'indice h, non variano col mutare del punto al quale si riferiscono. Divideremo lo studio in tre parti:

1) Gli sforzi θ_h sono fra loro diversi.

2) Due degli sforzi θ_h sono eguali fra loro, e distinti dal terzo.

3) I tre sforzi θ_h sono eguali fra loro.

II. - Sistemi isostatici con sforzi costanti.

1. - *Gli sforzi θ_h sono fra loro differenti.* Nella ipotesi che le θ_h siano costanti, le equazioni (2) di LAMÉ diventano

$$(\alpha)\qquad \mu_h \rho_{h+2\,h+1} + \mu_{h+2}\,\rho_{h+1\,h+2} = 0.$$

Alle sei equazioni che esprimono che lo spazio occupato dal corpo S è di curvatura costante k, daremo la forma seguente:

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\rho_{hh+1}}{d\sigma_{h+2}} - \dfrac{d\rho_{hh+2}}{d\sigma_{h+1}} + \rho_{h+1\,h+2}\,\rho_{h+2\,h+1} - \rho^2_{hh+1} - \rho^2_{hh+2} = k \\[2ex] \dfrac{d\rho_{h+1\,h+2}}{d\sigma_{h+1}} = -\rho_{hh+2}\left(\rho_{h+1\,h+2} + \rho_{h+2\,h+1}\right), \text{ oppure} \end{cases}$$

$$\frac{d\rho_{h+2\,h+1}}{d\sigma_{h+2}} = \rho_{hh+1}\left(\rho_{h+2\,h+1} + \rho_{h+1\,h+2}\right).$$

Le sei equazioni di SAINT-VENANT si riducono nel caso nostro a tre soltanto, che scriveremo in questo modo:

$$(\gamma) \qquad \mu_h\left(\frac{d\rho_{h\,h+2}}{d\sigma_{h+1}}+\rho^2_{h\,h+2}\right)+\mu_{h+2}\left(\frac{d\rho_{h\,h+1}}{d\sigma_{h+2}}-\rho^2_{h\,h+1}\right)$$

$$-k'(s\theta-\theta_h)=0,$$

avendo posto

$$\theta=\theta_1+\theta_2+\theta_3\,,\qquad s=\frac{2B-A}{4B-3A},$$

essendo A e B le costanti di GREEN del corpo S ([1]), variabili, naturalmente, con la curvatura k. Poniamo

$$(3) \qquad \rho_h=-\rho_{h+1\,h+2}\,.$$

Allora il gruppo (α) diventa

$$(\alpha_1) \qquad \rho_{h+2\,h+1}=\frac{\mu_{h+2}}{\mu_h}\rho_h\,,$$

e le equazioni (β) si trasformano nelle seguenti:

$$(\beta_1) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\rho_h}{d\sigma_h}+\frac{\mu_{h+1}}{\mu_{h+2}}\frac{d\rho_{h+2}}{d\sigma_{h+2}}+\rho_h^2+\frac{\mu_h}{\mu_{h+1}}\rho^2_{h+1}+\frac{\mu^2_{h+1}}{\mu^2_{h+2}}\rho^2_{h+2}+k=0\\ &\frac{d\rho_h}{d\sigma_{h+1}}=\frac{\mu_{h+2}-\mu_h}{\mu_{h+1}}\rho_h\,\rho_{h+1}\,,\quad\text{oppure}\end{aligned}\right.$$

([1]) Le equazioni in discorso furono scritte da diversi Autori. – *a)* E. PADOVA, *Dell'uso delle coordinate curvilinee in alcuni problemi di elasticità*. [Studi offerti dall'Università di Padova alla Bolognese ecc. Vol. III. (1888)]. – *b)* G. RICCI, *Delle derivazioni covarianti e controvarianti*. (Idem)[1] – *c)* A. PALATINI, *Sulle quadriche di deformazione per gli spazi S_3*. [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Tomo LXXXI, Parte seconda 1916-17]. – *d)* W. SLEBODZINSKI, *Sur les déformations dans une variété à courbure constante*. [Rend. della R. Acc. dei Lincei, Vol. VIII, Serie VI. (1928)].

$$\frac{d\rho_h}{d\sigma_{h+2}} = \frac{\mu_h - \mu_{h+2}}{\mu_{h+2}} \rho_h \rho_{h+2} .$$

È superfluo, come si vedrà in seguito, trasformare le equazioni (γ).

Prendiamo in esame le equazioni

$$(4) \qquad \frac{d\rho_h}{d\sigma_{h+1}} = \frac{\mu_{h+2} - \mu_h}{\mu_{h+1}} \rho_h \rho_{h+1} , \quad \frac{d\rho_h}{d\sigma_{h+2}} = \frac{\mu_h - \mu_{h+2}}{\mu_{h+2}} \rho_h \rho_{h+2} ,$$

e scriviamone le condizioni d'integrabilità. A questo scopo deriviamo la prima rispetto all'arco σ_{h+2}, e la seconda rispetto all'arco σ_{h+1}, poi sottraghiamo le equazioni ottenute. Si ottiene

$$\frac{d^2 \rho_h}{d\sigma_{h+2} d\sigma_{h+1}} - \frac{d^2 \rho_h}{d\sigma_{h+1} d\sigma_{h+2}} = \frac{\mu_{h+2} - \mu_h}{\mu_{h+1}} \left\{ \rho_h \frac{d\rho_{h+1}}{d\sigma_{h+2}} + \rho_{h+1} \frac{d\rho_h}{d\sigma_{h+2}} \right\}$$

$$- \frac{\mu_h - \mu_{h+2}}{\mu_{h+2}} \left\{ \rho_h \frac{d\rho_{h+2}}{d\sigma_{h+1}} + \rho_{h+2} \frac{d\rho_h}{d\sigma_{h+1}} \right\} .$$

La differenza delle derivate seconde, per nota formula, (nel caso nostro $\rho_{hh} = 0$), è eguale a

$$\rho_{hh+1} \frac{d\rho_h}{d\sigma_{h+1}} + \rho_{hh+2} \frac{d\rho_h}{d\sigma_{h+2}} ,$$

cioè, per le (3) e le (α_1), eguale a

$$\frac{\mu_h}{\mu_{h+1}} \rho_{h+1} \frac{d\rho_h}{d\sigma_{h+2}} - \rho_{h+2} \frac{d\rho_h}{d\sigma_{h+1}} .$$

Eliminando allora, a mezzo delle (4), le derivate prime che figurano in questa espressione, e quelle che figurano nel secondo membro della equazione precedente, si perviene agevolmente all'equazione

$$(2\,\theta_h - \theta_{h+1} - \theta_{h+2})\,(\theta_{h+2} - \theta_{h+1})\,\rho_h \rho_{h+1} \rho_{h+2} = 0.$$

Le quantità $2\,\theta_h - \theta_{h+1} - \theta_{h+2}$, $\theta_{h+2} - \theta_{h+1}$ non possono essere nulle per $h = 1, 2, 3$, avendo supposto diversi fra loro i tre sforzi θ_h. Concludiamo che una, almeno, delle ρ_h deve essere nulla. Per fissare le idee, sia

$$\rho_1 = 0 .$$

Le prime tre equazioni del gruppo (β_1) diventano allora

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\mu_2}{\mu_3}\frac{d\rho_3}{d\sigma_3} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\rho_2^2 + \frac{\mu_2^2}{\mu_3^2}\rho_3^2 + k = 0 \\ &\frac{d\rho_2}{d\sigma_2} + \rho_2^2 + \frac{\mu_2}{\mu_3}\rho_3^2 + k = 0 \\ &\frac{d\rho_3}{d\sigma_3} + \frac{\mu_1}{\mu_2} . \frac{d\rho_2}{d\sigma_2} + \rho_3^2 + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\rho_2^2 + k = 0. \end{aligned} \right.$$

Eliminando le derivate, si ricava l'equazione

$$(6) \qquad \mu_1^2\rho_2^2 + \mu_2^2\rho_3^2 + \mu_2^2 k = 0,$$

la quale non può sussistere se $k > 0$. Quindi:

Negli spazî a curvatura costante positiva non esistono mezzi elastici isotropi in equilibrio in assenza di forze di massa, che ammettono sistemi isostatici le superficie dei quali siano sottoposte a sforzi costanti, e diversi fra loro.

Limitiamo pertanto il nostro studio agli spazî a curvatura costante negativa. Si supponga adunque $k < 0$. Deriviamo la equazione (6) una volta rispetto all' arco σ_2, una seconda volta rispetto all' arco σ_3. Si trae

$$\mu_1^2\rho_2\frac{d\rho_2}{d\sigma_2} + \mu_2^2\rho_3\frac{d\rho_3}{d\sigma_2} = 0$$

$$\mu_1^2\rho_2\frac{d\rho_2}{d\sigma_3} + \mu_2^2\rho_3\frac{d\rho_3}{d\sigma_3} = 0.$$

Surrogando le derivate con le espressioni che si ricavano dalle (5), si ottiene, usufruendo della (6),

$$(7)\quad \begin{cases} \rho_2\left[k(\mu_1^2-\mu_2^2)\mu_3+\rho_3^2(\mu_1^2-\mu_3^2)\mu_2\right]=0 \\ \rho_3\left[k(\mu_2^2-\mu_3^2)\mu_2+\rho_2^2(\mu_1^2-\mu_3^2)\mu_1\right]=0\,. \end{cases}$$

Sia dapprima $\rho_2 \neq 0$, $\rho_3 \neq 0$. Allora dev'essere

$$(8)\quad \begin{cases} k(\mu_1^2-\mu_2^2)\mu_3+\rho_3^2(\mu_1^2-\mu_3^2)\mu_2=0 \\ k(\mu_2^2-\mu_3^2)\mu_2+\rho_2^2(\mu_1^2-\mu_3^2)\mu_1=0. \end{cases}$$

Se $\mu_1 \neq \mu_3$, queste equazioni ci dicono che ρ_2 e ρ_3 sono costanti, e quindi nulle in forza delle equazioni (β_1), contro l'ipotesi. Sia allora $\mu_1=\mu_3$, sempre supposto $\rho_2 \neq 0$, $\rho_3 \neq 0$. Le (8) ci dicono che dev'essere

$$\mu_1=\mu_2,\quad \mu_2=\mu_3,$$

perchè μ_2 e μ_3 non possono annullarsi.

Quindi $\theta_1=\theta_2=\theta_3$, contro l'ipotesi che gli sforzi θ_h siano diversi. Non si può quindi supporre che ρ_2 e ρ_3 siano entrambi differenti dallo zero. Una di queste rotazioni deve annullarsi, ed una sola, perchè se fosse $\rho_2=\rho_3=0$, dalla (6) si ricaverebbe $k=0$. Si supponga, ed esempio, $\rho_2=0$, $\rho_3 \neq 0$. La prima delle equazioni (7) è soddisfatta, mentre dalla seconda si ricava

$$\mu_2^2-\mu_3^2=0,$$

cioè

$$(\theta_2-\theta_1)(\theta_1+\theta_2-2\theta_3)=0.$$

Ma $\theta_1 \neq \theta_2$, perciò

$$(9)\qquad \theta_3=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\,.$$

Essendo $\rho_2=0$, e non potendo annullarsi μ_2, l'equazione (6) ci dice che dev'essere

$$\rho_3^2=-k.$$

Adunque le rotazioni ρ_1, ρ_2, ρ_3 hanno i valori seguenti:

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = \pm\sqrt{-k} \; (k < 0).$$

Quindi, per le (3), (9) e (α_1),

$$(10) \quad \begin{cases} \rho_{23} = 0 & \rho_{32} = 0 \\ \rho_{31} = 0 & \rho_{13} = 0 \\ \rho_{12} = \mp\sqrt{-k} & \rho_{21} = \pm\sqrt{-k}. \end{cases}$$

Nelle equazioni (γ) poniamo $h = 3$, e teniamo conto dei valori (10). Si ricava

$$s\theta = \theta_3,$$

cioè, per la (9),

$$\theta_3(3s - 1) = 0.$$

Ma $3s - 1 = \dfrac{2B}{4B - 3A} \neq 0$, perciò

$$\theta_3 = 0,$$

e quindi

$$(11) \qquad \theta_1 + \theta_2 = 0.$$

Per $h = 1$, $h = 2$, le equazioni (γ) di Saint-Venant, in forza dei risultati ottenuti, si riducono a due identità. Gli sforzi sono quindi sottoposti alle condizioni seguenti:

$$\theta_1 = -\theta_2, \qquad \theta_3 = 0.$$

Vediamo ora quale forma assume il ds^2 dello spazio occupato dal corpo, quando si assumano a superficie coordinate quelle del sistema isostatico. Con referenza a tali superficie, sia

$$(12) \qquad ds^2 = H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 + H_3^2 dx_3^2,$$

la forma quadratica che dà il quadrato dell'elemento lineare dello spazio occupato dal corpo. Abbiamo

$$\rho_{h,h+1} = -\frac{1}{H_{h+1}\,H_{h+2}}\,\frac{\partial H_{h+1}}{\partial x_{h+2}} \tag{13}$$

$$\rho_{h,h+2} = \frac{1}{H_{h+1}\,H_{h+2}}\,\frac{\partial H_{h+2}}{\partial x_{h+1}}\,. \tag{14}$$

Per essere

$$\rho_{23} = 0, \quad \rho_{32} = 0, \quad \rho_{13} = 0, \quad \rho_{31} = 0,$$

si ha

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = 0. \tag{15}$$

Per la prima e la terza delle equazioni (15) si conclude che H_3 è funzione della sola variabile x_3. Cambiando allora questo parametro, senza cambiare superficie coordinata, e continuando ad indicarlo con x_3, possiamo supporre

$$H_3 = 1. \tag{16}$$

Si trae allora

$$\rho_{12} = -\frac{1}{H_2}\,\frac{\partial H_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial \log H_2}{\partial x_3} = \mp\sqrt{-k}\,.$$

Per fissare le idee, scegliamo il segno negativo. Dalle equazioni

$$\frac{\partial \log H_2}{\partial x_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial \log H_2}{\partial x_3} = \sqrt{-k}\,,$$

si ricava

$$H_2 = e^{x_3\sqrt{-k}}\,h_2(x_2)\,, \tag{17}$$

indicando con $h_2(x_2)$ una funzione arbitraria della sola variabile x_2.

Analogamente dalle equazioni

$$\frac{\partial \log H_1}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial \log H_1}{\partial x_3} = \rho_{21} = -\rho_{12} = \sqrt{-k}\,,$$

si ricava

$$H_1 = e^{x_3\sqrt{-k}}\, h_1(x_1), \tag{18}$$

con $h_1(x_1)$ arbitraria funzione della sola variabile x_1.

In forza delle (16), (17), (18) si ottiene

$$ds^2 = e^{2x_3\sqrt{-k}}\, h_1^2(x_1)\, dx_1^2 + e^{x_3\sqrt{-k}}\, h_2^2(x_2)\, dx_2^2 + dx_3^2 .$$

Infine, cambiando i parametri x_1 e x_2, senza mutare le superficie coordinate, e continuando a indicare i nuovi parametri ancora con x_1 e x_2, si trae l'espressione definitiva

$$ds^2 = e^{2x_3\sqrt{-k}}\,(dx_1^2 + dx_2^2) + dx_3^2 . \tag{19}$$

I ragionamenti fatti conducono pertanto alla conclusione seguente: *Negli spazi a curvatura costante negativa possono esistere mezzi elastici isotropi in equilibrio in assenza di forze di massa dotati di sistemi isostatici con sforzi costanti e fra loro diversi. Uno di questi sforzi è allora nullo, e gli altri due sono eguali ed opposti. Con riferimento al sistema isostatico, il ds^2 dello spazio è dato dalla* (19).

2. – *Due sforzi θ_h sono fra loro eguali e distinti dal terzo.* Per fissare le idee si supponga $\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$. Le equazioni ($\alpha$) danno subito

$$\rho_{23} = 0 , \qquad \rho_{13} = 0 , \qquad \rho_{12} = \rho_{21} .$$

Dalle equazioni (β) per $h = 1$ e per $h = 2$, si ricava

$$\frac{d\rho_{12}}{d\sigma_3} - \rho_{12}^2 = k$$

$$-\frac{d\rho_{12}}{d\sigma_3} - \rho_{21}^2 = k .$$

Quindi

$$\frac{d\rho_{12}}{d\sigma_3} = 0,$$

e pertanto

$$\rho_{12}^2 = -k.$$

Adunque: *l'ipotesi della curvatura costante positiva è incompatibile con la esistenza nel mezzo di sistemi isostatici con sforzi costanti, dei quali due eguali fra loro, e distinti dal terzo.*

Supponiamo adunque $k < 0$. Poichè dalle equazioni (β) si ottiene

$$\rho_{32} = 0\,, \qquad \rho_{31} = 0\,,$$

si hanno per le rotazioni ρ_{hk} $(h \neq k)$ i valori seguenti:

$$(20)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \rho_{23} = 0 & \rho_{32} = 0 \\ \rho_{13} = 0 & \rho_{31} = 0 \\ \rho_{12} = \pm\sqrt{-k} & \rho_{21} = \pm\sqrt{-k}\,. \end{array} \right.$$

Nelle equazioni (γ) di Saint-Venant facciamo $h = 1, 2$; si trae $(\theta_1 = \theta_2)$

$$\mu_3 = s\theta - \theta_1\,, \qquad -\mu_2 = s\theta - \theta_1\,,$$

d'onde

$$(21)\qquad s\theta = \theta_3\,.$$

Per $h = 3$ nelle (γ) si ricavano ancora le (21). In definitiva le tre equazioni (γ) di Saint-Venant dànno l'unica condizione (21), cioè

$$(22)\qquad \theta_1 = \frac{B - A}{2B - A}\,\theta_3\,.$$

Vediamo ora quale forma assuma il ds^2 dello spazio occupato dal corpo, con referenza alle superficie del sistema isostatico. Dal confronto delle equazioni (20) con le (10), si deduce che valgono quegli stessi calcoli sviluppati al numero 1, per l'analoga indagine, con l'unica differenza che nel caso attuale $\rho_{12}=\rho_{21}$. Tenendo conto di ciò, e scegliendo $\rho_{12}=\sqrt{-k}$, si perviene alla formula

$$(23) \qquad ds^2 = e^{2x_3\sqrt{-k}}\, dx_1^2 + e^{-2x_3\sqrt{-k}}\, dx_2^2 + dx_3^2 .$$

I ragionamenti fatti conducono quindi al risultato seguente: *Negli spazi a curvatura costante negativa possono esistere mezzi elastici isotropi in equilibrio in assenza di forze di massa dotati di sistemi isostatici con sforzi costanti, dei quali due sono eguali fra loro, e distinti dal terzo. Il rapporto di questi sforzi, è determinato dalla* (22), *e il* ds^2 *dello spazio è dato dalla* (23), *con riferimento al sistema isostatico.*

3 - *I tre sforzi* θ_h *sono eguali fra loro.* Diciamo P il valore comune dei tre sforzi θ_h. Le equazioni (α) sono soddisfatte qualunque sia il sistema isostatico, e quelle (γ) di SAINT-VENANT danno

$$3sP = P.$$

Ma P e $3s-1$ non sono nulli, quindi non può aver luogo l'equazione precedente.

In questa deduzione non è entrato in giuoco il segno della curvatura; pertanto: *Negli spazî a curvatura costante non vi possono essere mezzi elastici in equilibrio in assenza di forze di massa, dotati di sistemi isostatici con sforzi costanti ed eguali fra loro.*