ARTURO MARONI

Sulle coppie di serie lineari appartenenti ad una curva algebrica contenute parzialmente l'una nell'altra senza residuo fisso

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 2 (1931), p. 49-60

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1931__2__49_0>

SULLE COPPIE DI SERIE LINEARI APPARTENENTI AD UNA CURVA ALGEBRICA CONTENUTE PARZIALMENTE L'UNA NELL'ALTRA SENZA RESIDUO FISSO

di ARTURO MARONI, *a Firenze*

1. Il Prof. SEVERI ha rilevato [1] che una serie lineare g_n^r, di una curva algebrica, può essere contenuta parzialmente in un'altra serie lineare (incompleta), senza che tuttavia la g_n^r sia residua di un gruppo di punti fissi, rispetto all'altra serie. Egli ha convalidato ciò con un esempio; e precisamente l'esempio è quello della g_2^2 di una quartica razionale dello spazio ordinario, la quale g_2^2 è contenuta parzialmente nella g_4^3 segata sulla curva dai piani dello spazio, mentre due punti qualunque della quarquartica danno come residua, rispetto alla g_4^3, una g_2^1 e non mai la g_2^2, non avendo la quartica punti doppi. Di più, il Prof. SEVERI ha osservato che anche la g_4^2 segata sulla quartica dai piani passanti per un punto generico dello spazio, contiene parzialmente la g_2^2: si ha così l'esempio di due serie lineari della stessa dimensione, contenute parzialmente l'una nell'altra, senza che l'una sia residua, rispetto all'altra, di un gruppo di punti fissi.

La presente nota ha appunto lo scopo di esaminare in quali casi una serie lineare g_n^r, di una curva algebrica C, può essere contenuta parzialmente in un'altra serie lineare, rispetto alla quale la g_n^r non sia residua di un gruppo di punti fissi [2]. I risultati sono i seguenti:

[1] *Trattato di Geometria algebrica,* Cap. II, § 21. Oss. II.

[2] L'argomento di questa ricerca mi fu indicato dal Prof. COMESSATTI. in una conversazione che ebbi con Lui ad Arezzo.

I) *Data ad arbitrio, sopra una curva algebrica C (di genere qualunque) una serie lineare* g_n^r, *di dimensione* $r \geq 1$, *si può sempre trovare sulla curva, in infiniti modi, un'altra serie (incompleta), la quale contenga parzialmente la data* g_n^r, *senza residuo fisso.*

II) *Se una curva algebrica C possiede due serie lineari,* g_N^r *e* g_n^r, *della stessa dimensione* $r > 1$, *e tali che la prima contenga parzialmente la seconda, senza residuo fisso, sono possibili solo i seguenti casi:*

a) La g_N^r *non è composta, e allora la curva C è razionale.*

b) La g_N^r *è composta con una involuzione* γ_m^1, *con la quale non è, invece, composta la* g_n^r, *e allora la curva C è razionale od ellittica. In quest'ultimo caso anche la* γ_m^1 *è ellittica, e si ha* $N = m . n$.

c) La g_N^r *e la* g_n^r *sono entrambe composte con una medesima involuzione, e allora questa involuzione è razionale. In questo caso il genere della curva C può essere qualunque.*

2. Dimostriamo il teorema I. È evidente che si può supporre la data g_n^r priva di punti fissi, chè, altrimenti, dimostrato che la $g_{n'}^r$, ottenuta dalla g_n^r facendo astrazione dai punti fissi, è contenuta parzialmente in una serie lineare $g_{N'}^{r'}$, senza dare residuo fisso, la stessa cosa avverrà per la g_n^r rispetto alla serie ottenuta aggregando ai gruppi della $g_N^{r'}$ i punti fissi della g_n^r.

Sia $g_N^{r_1}$ $(r_1 \geq r)$ la serie completa contenente totalmente la g_n^r. Si consideri, sulla nostra curva C, una serie lineare completa g_ν^ρ priva di punti fissi, tale che sia:

$$1 \leq \rho \leq r \,;$$

e sia g_N^R $(N = n + \nu)$ la serie lineare completa somma delle serie $g_n^{r_1}$ e g_ν^ρ. Sulla curva C_N di S_R immagine della g_N^R (3) i gruppi della $g_n^{r_1}$, e quindi anche quelli della g_n^r, appartengono a spazi

(3) Si può fare sempre in modo che la g_N^R non risulti composta con una involuzione; basta infatti, se $\rho > 1$, prendere non composta la g_ν^ρ; e se $\rho = 1$ assumere la g_ν^1 in modo che con essa non sia composta la g_n^r.

di dimensione $R-\rho-1$; e i gruppi della g_ν^ρ appartengono a spazi di dimensione $R-r_1-1$. Per ognuno di questi ∞^ρ S_{R-r_1-1} passa un S_{R-r-1}, sostegno di una stella di iperpiani segante sulla curva la g_n^r. Questi ∞^ρ S_{R-r-1} riempiono una varietà V, la cui dimensione è inferiore a quella dello spazio ambiente S_R, essendo:

$$R-r-1+\rho \leq R-1\,, \quad \text{ossia} \quad \rho \leq r\,.$$

Prendiamo, nell' S_R, un $S_{\delta-1}$ generico ($\delta \geq 1$), e consideriamo la serie completa $g_N^{R-\delta}$ segata sulla curva C_N dagli iperpiani passanti per questo $S_{\delta-1}$. Questa serie contiene parzialmente la data g_n^r se è:

$$R-\rho-1+\delta-1+1 \leq R-1$$

cioè:

$$\delta \leq \rho\,,$$

perchè in tal caso per lo spazio $S_{R-\rho-1}$ contenente un qualsiasi gruppo della g_n^r, e per l' $S_{\delta-1}$, passa almeno un iperpiano, e quindi esiste almeno un gruppo della $g_N^{R-\delta}$ contenente il gruppo considerato della g_n^r.

Ma, d'altra parte, la g_n^r non risulta residua di un gruppo di punti fissi rispetto alla $g_N^{R-\delta}$, qualora si abbia cura di prendere lo spazio $S_{\delta-1}$ in modo che non sia contenuto entro la suddetta varietà V (4). Infatti in tal caso l' $S_{\delta-1}$ non è contenuto in alcuno degli S_{R-r-1} generatori della varietà V, e allora gli iperpiani passanti per l' $S_{\delta-1}$ e per uno qualsiasi di questi S_{R-r-1} segano sulla C_N una serie lineare (avente come fisso un gruppo della g_ν^ρ) di dimensione minore di r. Così il teorema I risulta dimostrato.

(4) Ciò è sempre possibile in infiniti modi, perchè (come si è osservato) essendo $\rho < r$ la varietà V non riempie tutto lo spazio S_R, e allora si può determinare l' $S_{\delta-1}$ mediante δ punti indipendenti di S_R, dei quali almeno uno sia preso fuori di V.

3. *Esempio.* Sopra una curva ellittica sia data una g_3^2 ($n=3$, $r=2$). Si consideri sulla curva una g_2^1 ($\nu=2$, $\rho=1$), e la serie g_5^4 ($N=5$, $R=4$) somma della g_3^2 con la g_2^1. L'immagine della g_5^4 è, in un S_4, una curva ellittica del 5° ordine, C_5. Lo spazio $S_{\delta-1}$ è in questo caso un punto O dell'S_4, il quale punto va preso fuori della rigata (V_2^3 di S_4) riempita dalle rette che uniscono le coppie di punti della C_5 formanti i gruppi della g_2^1 considerata. Proiettando da O la C_5 in un S_3 si ha, in questo spazio, una curva ellittica C_5', sulla quale i piani segano una g_5^3 contenente parzialmente la data g_3^2 (tre punti essendo sempre in un piano); ma questa g_3^2 non è residua di due punti fissi rispetto alla g_5^3, perchè se anche la C_5' avesse un punto doppio P, i piani per P segherebbero sulla C_5' una g_3^2 diversa dalla data, altrimenti O apparterrebbe alla suddetta V_2^3. Del resto, si può anche evitare che la C_5' abbia punti doppi prendendo O addirittura fuori della varietà a tre dimensioni riempita dalle corde della C_5.

Altro esempio. Sopra una curva di genere 4, non iperellittica, si prenda come data una delle due g_3^1 che la curva possiede ($n=3$, $r=1$). Si consideri l'altra g_3^1 ($\nu=3$, $\rho=1$), e la serie somma delle due g_3^1, che è la serie canonica g_6^3 della curva. Nello spazio S_3 contenente la curva canonica C_6, si prenda un punto O ($\delta=1$), non appartenente a nessuna delle rette che segano sulla C_6 i gruppi delle g_3^1, cioè fuori della quadrica Q cui la C_6 appartiene. I piani della stella di centro O segano sulla curva una g_6^2, la quale contiene parzialmente l'una e l'altra g_3^1 (perchè per O e per una qualsiasi generatrice o direttrice della quadrica Q passa sempre un piano); ma il gruppo residuo, rispetto alla g_6^2, di un gruppo G_3 di una delle due g_3^1 è un gruppo G_3' dell'altra g_3^1, anch'esso variabile insieme col G_3.

Proiettando da O la C_6 su di un piano π si ottiene, su π, una C_6' di genere 4, immagine della g_6^2, sulla quale C_6' i gruppi delle due g_3^1 sono segati dalle tangenti alla conica di diramazione del piano doppio ottenuto proiettando da O, su π, la quadrica Q.

4. Passiamo alla dimostrazione del teorema II *a*). Sulla curva algebrica C esistano due serie lineari g_N^r e g_n^r, della stessa dimensione $r>1$, la prima delle quali contenga parzialmente la seconda, senza residuo fisso. Per una considerazione analoga a quella fatta al principio del numero 2, possiamo limitarci a supporre che le due serie non abbiano punti fissi. Supponiamo, inoltre, che esse non siano composte (5).

Consideriamo, entro la g_N^r, una g_N^{r-1} generica, priva di punti fissi. Sia γ_n^{r-1} la serie algebrica, di ordine n e dimensione $r-1$, formata dai gruppi della g_n^r che sono contenuti in gruppi della g_N^{r-1}. Valutiamo l'indice della γ_n^{r-1}. I gruppi della γ_n^{r-1} passanti per $r-1$ punti generici della curva: $A_1, A_2, \ldots A_{r-1}$, sono i gruppi della g_n^r che passano per i punti medesimi e che sono contenuti nell'unico gruppo G_N, della g_N^{r-1}, determinato dagli stessi punti $A_1, A_2 \ldots A_{r-1}$. Per un altro punto A_r del gruppo G_N, e per i punti $A_1, A_2 \ldots A_{r-1}$ passa un gruppo della g_n^r, il quale è contenuto in un gruppo almeno della g_N^r, e quindi appartiene al G_N suddetto, che è l'unico gruppo della g_N^r passante pei punti $A_1, A_2, \ldots A_{r-1}, A_r$ (6). Ognuno degli $N-r+1$ punti del G_N, che rimangono togliendo da esso i punti $A_1, A_2, \ldots A_{r-1}$, determina dunque un gruppo della γ_n^{r-1} passante per $A_1, A_2, \ldots A_{r-1}$. D'altra parte, mentre l'erresimo punto A_r viene a coincidere successivamente con ciascuno degli $n-r+1$ punti, i quali insieme con $A_1, A_2, \ldots A_{r-1}$ formano un medesimo gruppo della γ_n^{r-1}, si ottiene evidentemente sempre lo stesso gruppo della γ_n^{r-1}. Si conclude che l'indice di questa serie è:

$$\frac{N-r+1}{n-r+1}.$$

Poichè i gruppi della γ_n^{r-1} sono equivalenti (appartengono totalmente alla g_n^r), ne segue che il numero dei punti r-upli della γ_n^{r-1} è espresso dalla formula (7)

(5) Basta perciò supporre che non sia composta la g_N^r, perchè è subito visto che se la g_n^r è composta con una involozione, per le ipotesi fatte anche la g_N^r è composta con la medesima involuzione.

(6) Per la genericità dei punti $A_1, A_2, \ldots A_{r-1}$, e perchè la g_N^r non è composta, si può supporre che i gruppi della g_N^r passanti per $A_1, A_2, \ldots A_{r-1}$ non passino in conseguenza per nessun altro punto.

(7) Vedi R. Torelli. *Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino. Vol. XLII, 1907.

$$(1) \qquad r\,\frac{N-r+1}{n-r+1}\,[n-r+1+(r-1)p]$$

ove p indica il genere della curva C.

Inoltre, il numero dei punti r–upli della g_N^{r-1} e dato da:

$$(2) \qquad r\,[N-r+1+(r-1)p]\,.$$

Osserviamo ora che se un punto è r–uplo per un gruppo Γ_n della γ_n^{r-1}, esso è r–uplo anche per il gruppo della g_N^{r-1} che contiene il Γ_n. Viceversa, sia P un punto della curva r–uplo per un gruppo G_N della g_N^{r-1}; per P contato r volte passa un gruppo della g_n^r (8), il quale è contenuto nell' unico gruppo G_N della g_N^r avente P per r–uplo (9): questo gruppo della g_n^r che ha P per punto r–uplo è dunque un gruppo della γ_n^{r-1}.

Si conclude che i punti r–upli delle due serie g_N^{r-1} e γ_n^{r-1} coincidono; perciò i numeri espressi dalle formule (1) e (2) debbono essere uguali, cioè deve essere:

$$r\,\frac{N-r+1}{n-r+1}\,[n-r+1+(r-1)p]=r\,[N-r+1+(r-1)p]\,.$$

Semplificando, si ottiene:

$$r(r-1)\,(N-n)\,p=0\,.$$

Da qui, essendo per ipotesi $r>1$ ed $N>n$, risulta che deve essere $p=0$, cioè che la curva C deve essere razionale.

5. Viceversa, è facile vedere che sopra una curva razionale esistono sempre serie lineari, di ordini arbitrari N, n, nelle condizioni indicate dall' enunciato del nostro teorema. Si consideri, infatti, la curva razionale normale C_N di S_N. Preso in S_N un S_{N-n-1} che non incontri la curva, gli iperpiani per questo spazio segheranno sulla C_N una serie g_N^n, la quale conterrà parzialmente la g_n^n della curva stessa, perchè per l' S_{N-n-1} e per n

(8) Ed uno solo, se la g_N^{r-1} è stata presa in modo che nessuno dei suoi punti r–upli coincida con un punto $(r+1)$plo della g_n^r.

(9) Unico, se la g_N^{r-1} è stata presa in modo che nessuno dei suoi punti r–upli coincida con un punto $(r+1)$–uplo della g_N^r.

punti arbitrari passa sempre un iperpiano di S_N; d' altra parte la g_n^r non dà, rispetto alla g_N^r residuo fisso, perchè lo spazio S_{N-n-1} non ha punti comuni con la curva.

6. Dimostriamo la proposizione II *b*).

Supponiamo che la g_N^r sia composta con una involuzione γ_m^1, il cui genere diremo π, e che la g_n^r non sia invece composta con questa stessa involuzione.

Come al n. 4, consideriamo entro la g_N^r una generica g_N^{r-1} priva di punti fissi, (la quale sarà pure composta con la γ_m^1), e indichiamo con γ_n^{r-1} la serie algebrica formata dai gruppi della g_n^r contenuti entro i gruppi della g_N^{r-1}. Cerchiamo l' indice della γ_n^{r-1}. Presi $r-1$ punti generici della curva A_1, $A_2, \dots A_{r-1}$, si osserverà, come precedentemente, che i gruppi della γ_n^{r-1} passanti per questi punti coincidono con i gruppi della g_n^r passanti per i punti stessi e contenuti entro l' unico gruppo G_N della g_N^{r-1}, determinato dai medesimi punti. Questo gruppo G_N contiene gli $r-1$ gruppi della γ_m^1 determinati dai punti A_1, $A_2, \dots A_{r-1}$. Preso un punto A_r del G_N, che non coincida con nessuno degli $m(r-1)$ punti di tali gruppi della γ_m^1, si vedrà come prima che esso determina un gruppo della γ_n^{r-1} passante per A_1, $A_2, \dots A_{r-1}$; ma se invece il punto A_r è preso entro il gruppo della γ_m^1 determinato da uno dei punti A_i ($i=1, 2, \dots r-1$), il gruppo della g_n^r passante per A_1, $A_2, \dots A_{r-1}$, A_r non sarà (per la genericità della g_N^{r-1}) un gruppo della γ_n^{r-1}. Infatti, in questo caso per i punti A_1, $A_2, \dots A_{r-1}$, A_r passano ∞^1 gruppi della g_N^r, e possiamo supporre di avere scelto la g_N^{r-1} in modo che il gruppo di essa passante per A_1, $A_2, \dots A_{r-1}$ A_r sia uno degli ∞^1 gruppi suddetti della g_N^r non contenente il gruppo della g_n^r passante per A_1, $A_2, \dots A_{r-1}$, A_r. Ne segue che l'indice della γ_n^{r-1} è ora espresso da: $\dfrac{N-m(r-1)}{n-r+1}$; e quindi il numero dei punti r-upli di questa serie algebrica vale:

$$(3) \qquad r\,\frac{N-m(r-1)}{n-r+1}[n-r+1+(r-1)p]\,;$$

mentre il numero dei punti r-upli della g_N^{r-1} è sempre dato dalla (2).

Si può ora ripetere l'osservazione che ogni punto r-uplo della γ_n^{r-1} è anche r-uplo per la g_N^{r-1}; ma viceversa, un punto P r-uplo per un gruppo G_N della g_N^{r-1} è punto r-uplo anche per un gruppo della γ_n^{r-1}, solo se P non è uno dei punti doppi della γ_m^1. Infatti, se P è doppio per un gruppo della γ_m^1, esso è almeno r-uplo per tutti gli ∞^1 gruppi della g_N^r che sono obbligati a contenerlo $r-1$ volte, e quindi non avverrà che il gruppo della g_n^r contenente P contato r volte appartenga al considerato G_N della g_N^{r-1}, se questa è stata scelta in modo che il gruppo di essa coincidente con uno degli ∞^1 gruppi della g_N^r ora nominati non sia quello che contiene il gruppo della g_n^r avente P come punto r-uplo.

D'altra parte, ognuno dei $2(m+p-1)-2m\pi$ punti doppi della γ_m^1 va contato per $\frac{r(r-1)}{2}$ unità nel numero dei punti r-upli della g_N^{r-1} [10]; perciò si avrà l'uguaglianza:

$$r\frac{N-m(r-1)}{n-r+1}[n-r+1+(r-1)p]=$$

$$=r[N-r+1+(r-1)p]-r(r-1)(m+p-1)+r(r-1)m\pi\,;$$

la quale, semplificando e tenendo conto che $r>1$, si riduce alla seguente:

$$\left(\frac{N}{m}-r+1\right)p=(n-r+1)\pi\,. \tag{4}$$

7. Consideriamo ora la curva Γ, di genere π, i cui punti rappresentano, birazionalmente, i gruppi della γ_m^1. Su di essa la g_N^r, che sulla C è composta con l'involuzione, dà luogo ad una

([10]) Un punto doppio P della γ_m^1 è doppio per gli ∞^{r-2} gruppi della g_N^{r-1} che sono obbligati a contenerlo semplicemente; quadruplo per gli ∞^{r-3} gruppi della g_N^{r-1} che sono obbligati a contenerlo due volte; ... $2(r-1)$-uplo per il gruppo che lo deve contenere $r-1$ volte; sicchè [V. Severi, *Trattato di geometria algebrica* § 37] P conta, nel numero dei punti r-upli della g_N^{r-1} per: $2+4+6+\ldots+2(r-1)-\frac{r(r-1)}{2}=\frac{r(r-1)}{2}$ unità.

serie lineare $g^r_{\frac{N}{m}}$; la g^r_n verrà invece trasformata sulla Γ in una serie algebrica, γ^r_n, formata da gruppi equivalenti, che sarà contenuta (parzialmente o totalmente) nella $g^r_{\frac{N}{m}}$. Si prenda una $g^{r-1}_{\frac{N}{m}}$ generica, senza punti fissi, contenuta entro la $g^r_{\frac{N}{m}}$, e si indichi con γ^{r-1}_n la serie algebrica formata dai gruppi della γ^r_n contenuti nella $g^{r-1}_{\frac{N}{m}}$. Con considerazioni analoghe alle precedenti si vede che, se ν è l'indice della serie γ^r_n, l'indice della γ^{r-1}_n è:

$$\frac{\nu\left(\frac{N}{m} - r + 1\right)}{n - r + 1};$$

e quindi il numero dei punti r-upli della γ^{r-1}_n medesima è dato da:

$$r\,\frac{\nu\left(\frac{N}{m} - r + 1\right)}{n - r + 1}\,[n - r + 1 + (r-1)\pi];$$

mentre il numero dei punti r-upli della $g^{r-1}_{\frac{N}{m}}$ è:

$$r\left[\frac{N}{m} - r + 1 + (r-1)\pi\right].$$

D' altronde, un punto r-uplo per un gruppo Γ_n della γ^{r-1}_n è anche r-uplo per il gruppo della $g^{r-1}_{\frac{N}{m}}$ che contiene il Γ_n; mentre è facile vedere, con considerazioni analoghe a quelle fatte al n. 4, che un punto r-uplo per un gruppo della $g^{r-1}_{\frac{N}{m}}$ è r-uplo per ν gruppi della γ^{r-1}_n; perciò deve aversi:

$$r\,.\,\frac{\nu\left(\frac{N}{m} - r + 1\right)}{n - r + 1}\,[n - r + 1 + (r-1)\pi] =$$

$$= \nu\,.\,r\left[\frac{N}{m} - r + 1 + (r-1)\pi\right].$$

Questa uguaglianza semplificata diviene:

$$(5) \qquad \left(\frac{N}{m} - n\right)\pi = 0\,.$$

Allora: o è $\pi = 0$, e dalla (4) si deduce che è anche $p = 0$, cioè che la curva C è razionale; oppure è

$$(6) \qquad N = m\,.\,n$$

e la (4) diviene:

$$(7) \qquad p = \pi\,.$$

Ma una curva algebrica non può contenere una involuzione dello stesso genere della curva, se non nel caso che essa sia razionale od ellittica. Si conclude che la curva C o è razionale o è ellittica. Nel caso che sia ellittica, anche l'involuzione γ^1_m è ellittica ($p = \pi = 1$), e vale la (6). Così resta dimostrata la proposizione II *b*).

8. Che il caso ellittico possa effettivamente presentarsi, risulta dal seguente esempio.

Sopra una curva C di genere 1 si consideri una γ^1_2 ellittica. Si prenda, inoltre, sulla curva, una g^2_3, e sia g'^2_3 la trasformata della g^2_3 mediante la corrispondenza birazionale involutoria determinata dalla γ^1_2. La somma delle due serie g^2_3 e g'^2_3 è una g^5_6, la quale ha per immagine una curva C_6 di S_5. Le rette che uniscono le coppie di punti della C_6 formanti i gruppi della γ^1_2 generano una rigata ellittica dell'ordine 6, F^6_2 ([11]). Un gruppo M di tre generatrici della F^6_2, uscenti dai punti di un gruppo G_3 della g^2_3 considerata sulla C_6, incontra ulteriormente la C_6 stessa nel gruppo G'_3, della g'^2_3, corrispondente al G_3 nella corrispondenza individuata dalla γ^1_2; e poichè il gruppo $G_3 + G'_3$ è un gruppo della g^5_6 segata sulla C_6 dagli iperpiani dell'S_5, segue che il gruppo M è contenuto in un S_4. Questo S_4 sega ulterior-

([11]) La rigata è normale in S_5, come la C_6, e quindi, se n è il suo ordine, deve essere: $n - 2\,.\,1 + 1 = 5$, cioè $n = 6$. (V. C. Segre *Recherches générales sur les courbes et les surfaces reglées algébriques*. Math. Annalen Bd. 32).

mente la rigata in una curva del terz'ordine C_3 (unisecante le generatrici), la quale, essendo ellittica, appartiene ad un piano ω. Poichè tutti i gruppi di generatrici analoghi ad M (cioè uscenti dai gruppi della g_3^2, sulla C_6, sono equivalenti, come gruppi dell' ente ∞^1 formato dalle generatrici ([12]), ne segue che tutti gli ∞^2 S_4 passanti per essi debbono segare sulla rigata la stessa curva C_3 [residua della serie lineare di generatrici, cui appartengono quei gruppi, rispetto al sistema lineare di curve segato dagli iperpiani dell' S_5 sulla F_2^6]; e quindi tutti questi S_4 debbono contenere il piano ω.

In conseguenza, gli S_4 per ω segano sulla curva C_6 una serie lineare g_6^2, composta con la γ_2^1, la quale g_6^2 contiene parzialmente la data g_3^2; ma la g_3^2 non è residua di tre punti fissi rispetto alla g_6^2, perchè la cubica C_3 non ha punti comuni con la C_6, e quindi nemmeno il piano ω incontra la stessa C_6. Il residuo di un gruppo G_3 della g_3^2, rispetto alla g_6^2 è il gruppo G'_3 della $g_3'^2$, corrispondente del G_3, anch' esso variabile insieme col G_3.

9. Dimostriamo, infine, la proposizione II c), la quale è immediata conseguenza delle precedenti.

Suppongasi che le serie g_N^r e g_n^r della curva C siano entrambe composte con la medesima γ_m^1. Sulla curva Γ, i cui punti rappresentano i gruppi della γ_m^1, le due serie lineari sono trasformate in due serie lineari, $g_{\frac{N}{m}}^r$ e $g_{\frac{n}{m}}^r$, la seconda delle quali sarà ancora contenuta parzialmente nella prima, senza dare residuo fisso. Poichè le serie $g_{\frac{N}{m}}^r$ e $g_{\frac{n}{m}}^r$ non sono composte, per la proposizione II a) si conclude che la curva Γ deve essere razionale. L'involuzione γ_m^1 è dunque anch' essa razionale, cioè è una g_m^1.

D' altra parte, sopra una curva algebrica C, di genere qualunque p, si consideri una g_m^1. Poi su di una curva razionale Γ, riferita birazionalmente ai gruppi della g_m^1, si prendano due serie lineari $g_{N'}^r$ e g_r^r $(N' > r)$, contenute parzialmente l' una nel-

([12]) Corrispondono, infatti, a gruppi equivalenti nella corrispondenza (2, 1) che c' è fra la curva C_6, e l' ente ∞^1 formato dalle generatrici della rigata.

l'altra, senza residuo fisso, il che è possibile come si è indicato al n. 5. Alle serie $g^r_{N'}$ e g^r_{r} corrispondono rispettivamente sulla curva C due serie lineari g^r_N e g^r_n $(N = N'm\,;\ n = rm)$ composte con la g^1_m, e contenute parzialmente l'una nell'altra, senza residuo fisso. Così è provata anche la proposizione II c).

10. *Osservazione.* Per dimostrare le proposizioni II a), II b), II c), abbiamo dovuto introdurre l'ipotesi $r > 1$. Questa ipotesi è essenzialmente necessaria, in quanto su ogni curva di genere quanto si vuole elevato, esistono coppie di serie lineari g^1_N e g^1_n, contenute parzialmente l'una nell'altra, senza residuo fisso.

Infatti, si consideri, sopra una qualsiasi curva algebrica C, una g^1_n e si prenda, entro una serie g^r_{nr} $(r > 1)$ composta con la g^1_n, una g^1_{nr} priva di punti fissi. Poichè anche la g^1_{nr} è composta con la g^1_n, essa contiene parzialmente la g^1_n stessa, senza residuo fisso.

Firenze, 9 Marzo 1931 - IX