

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO CACCIOPPOLI

Sulle famiglie normali di funzioni analitiche di due variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 4 (1933), p. 111-121

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1933__4__111_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLE FAMIGLIE NORMALI DI FUNZIONI ANALITICHE DI DUE VARIABILI

di RENATO CACCIOPPOLI

Recenti studi sulle famiglie normali ⁽¹⁾ hanno rivelato come a talune proprietà delle funzioni analitiche di più variabili corrispondano proprietà perfettamente analoghe delle famiglie normali di tali funzioni. Mi propongo qui di completare il quadro di queste analogie, estendendo alle famiglie normali di funzioni olomorfe e meromorfe di due variabili i risultati più generali sulla distribuzione delle singolarità, nonchè il teorema fondamentale di HARTOGS sul carattere analitico di una funzione analitica in ogni variabile separatamente.

1. - Consideriamo una famiglia F di funzioni analitiche delle due variabili x, y : come è noto, F dicesi *normale* in un campo se da ogni insieme infinito di essa si può estrarre una successione convergente uniformemente, in tale campo, verso un limite finito (che risulta allora una funzione olomorfa), oppure verso l'infinito ⁽²⁾. Un punto nel cui intorno F non sia normale si può dire *singolare* per F (o *irregolare*).

Vogliamo dimostrare ora che queste singolarità godono di una proprietà affatto analoga a quella sancita dal cosiddetto «teorema di continuità» per le singolarità delle funzioni olo-

⁽¹⁾ JULIA, Acta Mathematica, t. 47 (1925). - SAXER, Comptes Rendus, t. 193 (1931).

⁽²⁾ Ricordiamo qui, poichè ce ne serviremo in seguito, la definizione di convergenza uniforme in un campo *aperto*: Se in ogni porzione chiusa dell'insieme aperto I si ha convergenza uniforme, si chiama ancora uniforme la convergenza in tutto I .

morfe di due variabili: che cioè se un piano caratteristico, p. es. $x = c$, contiene un continuo isolato di singolarità S , ogni piano $x = c'$ sufficientemente prossimo al primo contiene punti singolari arbitrariamente prossimi ad S .

Basterà all'uopo provare il teorema seguente:

Se la famiglia F è normale per $x = 0$ ed y sul contorno C di un campo D , nonchè per y in D e per valori ξ di x arbitrariamente piccoli, essa è normale anche per $x = 0$ e y in D .

Difatti F è per ipotesi normale al variare di x, y rispettivamente in un intorno I dello zero ed in un intorno K di C , ciò che mostra innanzi tutto che C si può sempre, occorrendo previa piccola deformazione, supporre regolare. Inoltre F risulterà normale anche al variare di x in un intorno I' , contenuto in I , di un punto ξ , e di y in D . Indichiamo con $T_1 \equiv (I, K)$ e $T_2 \equiv (I', D)$ questi due campi di normalità.

Da un dato insieme infinito di F si estragga una successione

$$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots \dots f_n(x, y), \dots \dots$$

convergente in T_1 e T_2 . Se il limite di questa è finito, dalla formola di CAUCHY

$$f_n(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_n(x, \eta)}{\eta - y} d\eta,$$

che definisce f_n per x in I e y in D , (1) segue subito che si ha convergenza uniforme in tutto questo campo verso una funzione olomorfa. Supponiamo invece che il limite della successione, in T_1 e T_2 , sia la costante ∞ . Allora le funzioni.

$$\frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_2}, \dots \dots \frac{1}{f_n}, \dots \dots$$

saranno da un certo n in poi regolari in T_1 e T_2 , e tenderanno a zero. Ma questa loro regolarità avrà per conseguenza, come esigono i surricordati teoremi intorno alle singolarità delle fun-

(1) Si noti che le funzioni f_n , olomorfe (almeno da un certo punto in poi) in T_1 e T_2 , risultano olomorfe anche per x in I e y in D .

zioni di due variabili, la regolarità in tutto il campo (I, D) , sicchè siamo ricondotti al caso precedente, con convergenza uniforme a zero.

La successione considerata presenta dunque sempre convergenze, con limite finito o non, nel campo (I, D) . F è pertanto, come asserivamo, normale anche per $x = 0$ e y in D .

2. - Possiamo ora all'estensione del citato teorema di HARROGS ⁽¹⁾, a dimostrare cioè che è normale una famiglia di funzioni di x e y , se normale separatamente rispetto ad x e ad y .

Più precisamente, siano A e B due campi (aperti) dei piani x e y , T il loro prodotto (A, B) nello spazio xy , F una famiglia di funzioni analitiche in T . Supponiamo che F sia normale in A per ogni valore fisso di y in B , ed in B per ogni valore fisso di x in A .

Prendiamo internamente ad A e B due campi chiusi arbitrari A' e B' . Da un dato insieme infinito di F potremo estrarre una successione f_1, f_2, \dots convergente uniformemente in B' , per un fissato valore x_0 di x in A' . Supponiamo dapprima che il limite sia finito, cioè che sia una funzione di y olomorfa in B' ; allora per ogni valore y_0 di y si potrà estrarre da quella successione un'altra, convergente uniformemente verso una funzione di x olomorfa in A' .

Ciò implica che in ogni porzione di B' si possa trovare un punto y_0 tale che nell'intorno di (x_0, y_0) le funzioni f_n siano, da un certo n in poi, uniformemente limitate. Infatti sia H_m l'insieme dei punti \bar{y} per cui è in A'

$$|f_n(x, \bar{y})| \leq m, \quad m \leq n;$$

H_m è chiuso, contenuto in H_{m+1} , e tendente a B' al diverger di m : pertanto in ogni parte di B' debbono cadere regioni di densità per qualche insieme H , cioè a questo interamente appartenenti ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Math. Annalen, Bd. 62 (1905).

⁽²⁾ V. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie* II 1 (2^a Aufl.) Kap. III, § 18.

La limitazione così conseguita permette di affermare, come è noto, la normalità della successione f_1, f_2, \dots in un intorno di (x_0, y_0) ; si può anzi già dire di più, tale limitazione estendendosi a ogni x di A' . Ma se potremo dimostrare direttamente la possibilità di ampliare così il campo di variabilità della x , avremo provato che la successione è normale ovunque in T , poichè scambiando in un secondo tempo x e y fra loro passeremo dall'intorno di y_0 a tutto il campo B' . Ovviamente, basterà prendere per A' e B' due cerchi con centri nelle affisse di un punto di normalità.

Ci riduciamo in tal modo, in completa analogia con la dimostrazione del teorema di HARTOGS ⁽¹⁾, a provare quanto segue:

Se la successione

$$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y), \dots$$

è normale nel campo

$$T_1: |x| \leq \rho, |y| \leq r,$$

e vi ammette limite finito, e se inoltre è normale in y soltanto, per ogni valore particolare di x , nel campo

$$T_2: |x| \leq \rho, |y| \leq R \quad (R > r)$$

essa è normale complessivamente in x, y per

$$|x| < \rho, |y| < R.$$

Consideriamo gli sviluppi in serie di potenze di y delle funzioni date, supposte tutte olomorfe in T_2 :

$$(1) \quad f_n(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{n,m}(x) y^m$$

Dalla prima ipotesi segue che le funzioni f_n sono equilimitate in tutto un campo più ampio di T_1 , sicchè le serie (1) conver-

(1) V. OSGOOD, loc. cit., §§ 17-20.

gono in T_1 , uniformemente rispetto ad n e ad x variabile nel cerchio (ρ) : $|x| \leq \rho$, e si ha

$$|f_{n m}(x)| < \frac{1}{\rho^m}, (m \geq \mu)$$

con μ costante ⁽¹⁾.

Daltra parte, per la supposta normalità in T_2 rispetto alla sola y , deve anche essere

$$|f_{n m}(x)| < \frac{1}{R^m}, (m > \nu(x))$$

dove qui ν varia al variare di x nel cerchio (ρ) , ma resta indipendente da n .

A questo punto il ragionamento sbocca nell'analogo già menzionato: si considera la funzione, armonica nel cerchio (ρ) ,

$$\frac{1}{m} \log |f_{n m}| + \log R$$

e si osserva che essa, superiormente limitata, presenta in ogni punto della circonferenza di (ρ) massimo limite negativo al divergere di m , uniformemente rispetto ad n ; se ne deduce che lo stesso fenomeno deve aver luogo, ed uniformemente anche rispetto ad x , in ogni campo tutto interno al cerchio (ρ) . Quindi comunque si prescrivano i numeri $\rho' < \rho$, $R' < R$, si può trovare un indice ν indipendente da n e da x e tale che

$$|f_{n m}(x)| < \frac{1}{R'^m},$$

per $|x| \leq \rho'$ e $m \geq \nu$.

Allora le serie (1) convergono uniformemente nel loro complesso, e le funzioni f_n sono equilimitate in ogni campo tutto

⁽¹⁾ La successione è supposta dunque normale in (cioè nell'intorno di) tutti i punti di T_1 . Se si avesse soltanto convergenza uniforme in T_1 basterebbe ridurre di una quantità arbitrariamente piccola ρ ed r .

interno a T_2 ; la successione f_1, f_2, \dots è pertanto normale quando

$$|x| < \rho, |y| < R.$$

Alla dimostrazione precedente si può opporre che essa è fondata sulla supposizione gratuita che le funzioni f_n siano olomorfe in T_2 (tranne al più, ciò che è lo stesso, alcune in numero finito). A quest'obiezione risponderemo ora trattando il caso, sin qui escluso, che la successione considerata in principio abbia limite infinito.

3. - Supponiamo dunque che la successione estratta dal dato insieme infinito di F abbia il limite ∞ per $x = x_0$. Allora, per la supposta normalità in x , ogni successione estratta tendendo all'infinito per il valore x_0 di x , si avrà in tutto il campo T

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = \infty.$$

Vogliamo provare che questa relazione di limite è uniforme internamente a T , dimostrando che la successione

$$\frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_2}, \dots, \frac{1}{f_n}, \dots$$

tende a zero uniformemente in ogni campo tutto interno a T . Dopo i risultati ottenuti, basterà mostrare che dal fatto che le singolarità di $\frac{1}{f_n}$ in T non ammettono, quando considerate solo su un piano $x = \text{cost.}$ o $y = \text{cost.}$, alcun punto limite in T , segue che esse sono definitivamente tutte esterne ad ogni campo T' interno a T . Sarà così anche legittimata l'ipotesi fatta nel corso della dimostrazione precedente: le funzioni f_n ivi considerate dovendo allora risultare tutte olomorfe (da un certo punto in poi) in ogni campo interno a T_2 .

Potremo naturalmente limitarci a considerare in luogo di T un campo del tipo

$$|x| \leq \rho, |y| \leq r.$$

Siano a un punto del cerchio ρ e $R_x^{(n)}$ il minimo fra i moduli delle affisse y dei punti singolari di $\frac{1}{f_n}$ sul piano $x = a$. $R_x^{(n)}$, che è una funzione R_x di HARTOGS, relativa a $\frac{1}{f_n}$, è positiva nel cerchio (ρ) per n sufficientemente grande: $\log R_x^{(n)}$ è pertanto funzione *superarmonica* ⁽¹⁾ conformemente alla proprietà fondamentale delle funzioni R_x ⁽²⁾. Ora in ogni punto della circonferenza di (ρ) $R_x^{(n)}$ presenta minimo limite $\geq r$ per $n \rightarrow \infty$; dovrà quindi essere

$$R_x^{(n)} > r - \varepsilon$$

in ogni campo tutto interno al cerchio (ρ) e per un qualunque valore positivo di ε , purchè n sia abbastanza grande. Ciò dimostra appunto che le singolarità di $\frac{1}{f_n}$ risultano definitivamente esterne ad ogni campo interno a T .

Abbiamo così completamente dimostrato che ogni insieme infinito di F contiene una successione normale in T . Riassumendo, daremo al nostro teorema la forma seguente:

A e B essendo due campi aperti dei piani x e y , una famiglia F di funzioni analitiche è normale in $T \equiv (A, B)$ se ivi normale rispetto ad x e ad y separatamente.

4. - Procediamo ora allo studio delle famiglie normali nel caso *meromorfo*. Attribuiremo ad una funzione il valore ∞ in ogni *polo* (punto singolare non essenziale di prima specie), e definiremo come al solito la convergenza sulla sfera complessa. Diremo poi *normale* in un campo una famiglia di funzioni analitiche di cui ogni insieme infinito contenga una successione convergente, o verso una funzione meromorfa in tale campo, la convergenza essendo allora uniforme ovunque fuorchè nell'intorno

(¹) Ricordiamo che una funzione f si chiama *superarmonica* se, essendo u una funzione armonica, la disuguaglianza $f \geq u$ sussiste in ogni campo di cui sia verificata sulla frontiera.

(²) V. HARTOGS, loc. cit.

degli eventuali punti di indeterminazione (singolarità non essenziali di seconda specie) della funzione limite ⁽¹⁾, – oppure (sempre uniformemente) verso l'infinito.

Dimostriamo che con questa estensione della prima definizione sussiste ancora il teorema del n. 1.

Considerando anche qui la successione f_1, f_2, \dots estratta da un insieme infinito di F , potremo limitarci a supporla convergente in T_1 verso una funzione $f(x, y)$ ivi olomorfa. Le eventuali singolarità non essenziali di f possono invero sempre escludersi restringendo T_1 , e moltiplicando f per una potenza di x se tutti i punti $x = 0$ sono singolari; e d'altra parte il caso del limite infinito è stato già trattato. Sceglieremo poi il punto ξ e l'intorno I' in modo da avere in T_2 convergenza uniforme verso la funzione f , ivi meromorfa e priva di punti di indeterminazione. In forza del teorema di continuità, f risulterà allora meromorfa in tutto il campo (I, D) ; e così pure f_n , almeno da un certo indice in poi.

Introduciamo ora le equazioni

$$\varphi(x, y) = y^p + a_1(x) y^{p-1} + a_2(x) y^{p-2} + \dots = 0,$$

$$\varphi_n(x, y) = y^q + a_{n1}(x) y^{q-1} + a_{n2}(x) y^{q-2} + \dots = 0,$$

delle varietà singolari di f, f_n ; i primi membri, perfettamente individuati, hanno coefficienti olomorfi in I . È inteso che con n può variare anche q ; ma dall'ipotesi che f_n tenda a f uniformemente in T_2 segue che per n sufficientemente grande $p = q$, e che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}(x) = a_m(x) \quad (m = 1, 2, \dots, p)$$

uniformemente in I' . Queste relazioni di limite si estendono a tutto l'intorno I , le funzioni a essendo ivi ovviamente limitate; e del teorema del n. 1 segue che la relazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^{-1} f_n = \varphi^{-1} f,$$

(1) In considerazione di queste eccezioni alla convergenza uniforme, si definirebbe forse meglio la famiglia come *quasi-normale*.

verificata da funzioni oloforme in T_1 e T_2 , è uniformemente valida in (I, D) . Prescindendo quindi dai punti in cui si ha contemporaneamente

$$\varphi = 0, \quad \varphi f = 0$$

cioè dai punti di indeterminazione per f , f_n converge uniformemente, come si voleva dimostrare, verso f .

5. — Vogliamo ora estendere alle famiglie normali di funzioni meromorfe il risultato del n. 3, dimostrando il seguente teorema :

La famiglia F è normale in $T \equiv (A, B)$, se ivi normale rispetto ad x per ogni valore \bar{y} di y , e rispetto ad y per ogni valore \bar{x} di x , fatta eccezione al più per taluni valori \bar{x} o \bar{y} , in numero finito in ogni campo tutto interno ad A o a B .

Si suppone dunque che i piani eccettuati, cioè i piani caratteristici coordinati su cui la famiglia non è normale, siano isolati; e tali saranno anche i punti eccettuati, cioè i punti appartenenti a due piani eccettuati.

Consideriamo una qualunque successione di funzioni di F , e proponiamoci di provarne la normalità. Potremo all'uopo limitarci a supporre che essa contenga una successione convergente, per qualche valore di x , verso una funzione meromorfa di y , perchè altrimenti dovrebbe già convergere verso l'infinito in ogni punto non eccettuato: la convergenza sarebbe uniforme, in virtù del teorema del n. 3, e si estenderebbe quindi anche ai punti eccettuati.

Sia f_1, f_2, \dots , la successione estratta, convergente per $x = x_0$. Un ragionamento analogo a quello del n. 2 mostra che in ogni porzione di B si deve trovare un punto y_0 tale che nell'intorno di (x_0, y_0) le funzioni f_n si mantengano, da un certo indice in poi, uniformemente limitate: basta definire l'insieme H_m mediante la condizione

$$|f_n(x, \bar{y})| \leq m \quad \text{per} \quad |x - x_0| \leq \frac{1}{m}, \quad m \leq n.$$

La successione delle f risulta normale intorno a (x_0, y_0) ,

nella prima e quindi pure nella seconda accezione, più generale, del termine. Tutto si riduce così a dimostrare il teorema seguente:

Se la successione f_1, f_2, \dots è normale nel campo

$$T_1: |x| \leq \rho, \quad |y| \leq r,$$

e vi ha per limite una funzione meromorfa, e se inoltre è normale rispetto ad x e ad y separatamente nel campo

$$T_2: |x| \leq \rho, \quad |y| \leq R \quad (R > r)$$

tranne al più su un numero finito di piani $y = \text{cost.}$, $x = \text{cost.}$, essa è normale in x , y complessivamente per

$$|x| < \rho, \quad |y| < R.$$

Possiamo supporre le funzioni f_n meromorfe nel campo T_2 , come dianzi olomorfe; infatti le singolarità *essenziali* di f_n sono definitivamente esterne ad ogni campo interno a T_2 , ciò che si prova ricorrendo, come precedentemente alla funzione di HARTOGS, ora alla funzione R_x di LEVI ⁽¹⁾ (definita notoriamente per le singolarità essenziali come quella di HARTOGS per le singolarità di tipo qualunque), e tenendo anche conto del fatto che i punti eccettuati sono isolati.

La successione f_1, f_2, \dots ammette per ipotesi limite nel campo T_1 , e dovrà tendere pertanto in tutto T_2 , tranne al più nei punti eccettuati, verso un limite ben determinato (finito o non) $f(x, y)$; dippiù su ogni piano $x = \text{cost.}$ o $y = \text{cost.}$, non eccettuato, $f(x, y)$ dovrà risultare meromorfa in y o in x (eventualmente riducendosi alla costante ∞).

Ogni punto, non appartenente ad alcun piano eccettuato, in cui f abbia valore infinito, deve essere limite di singolarità della funzione f_n , per $n \rightarrow \infty$; poichè altrimenti f vi risulterebbe olomorfa ⁽²⁾. Se (ξ, η) è un simile punto, due casi possono presentarsi: o (ξ, η) è limite di singolarità contenute nel piano $y = \eta$, oppure ciò non ha luogo. Nel secondo caso ogni circon-

⁽¹⁾ Annali di Matematica, t. 17 (III) (1910).

⁽²⁾ Si ricordi che l'ipotesi di un limite ovunque infinito per la nostra successione è stata già scartata.

ferenza C di centro ξ sul piano $y = \eta$, e raggio sufficientemente piccolo, dovrà contenere qualche punto limite di singolarità di f_n : perchè ove ciò non fosse la funzione $R_x^{(n)}$ di HARTOGS, relativa alla funzione f_n ed al piano $y = \eta$, dovrebbe ammettere in ogni campo interno a C , e da un certo n in poi, un limite inferiore positivo fisso, e il punto (ξ, η) non potrebbe più essere limite di singolarità. Allora $f(x, y)$ sarà infinita per $y = \eta$, in quanto tale per infiniti punti (x, η) ; circostanza questa che può presentarsi solo per un numero finito di valori di η . A conseguenze analoghe porta la considerazione del piano $x = \xi$. Ogni punto (ξ, η) sarà dunque limite di poli delle funzioni $f_n(\xi, y)$ e $f_n(x, \eta)$, prescindendo al più da un numero finito di piani coordinati; e l'insieme limite delle varietà polari di f_n sarà tagliato in insiemi finiti, fatte alcune eccezioni, da tutti i piani coordinati.

Segue da quest'analisi che la funzione $f(x, y)$, generalmente meromorfa in x ed y separatamente, ha le sue singolarità sopra un insieme chiuso I che è incontrato da un piano $x = \text{cost.}$ o $y = \text{cost.}$ generalmente in un numero finito di punti.

Quindi $f(x, y)$ è meromorfa in x, y complessivamente ⁽¹⁾, per

$$|x| < \rho, \quad |y| < R.$$

Occorrerebbe ancora la dimostrazione dell'uniformità della convergenza: ma questa è già contenuta nei risultati precedenti, poichè nell'intorno di ogni punto che non sia di indeterminazione per f , una almeno delle due funzioni

$$f(x, y), \quad \frac{1}{f(x, y)}$$

è olomorfa.

Il nostro teorema è così completamente dimostrato.

(¹) V. la mia nota *Sulle funzioni meromorfe di due variabili complesse* (Boll. dell'Un. Mat. Italiana, Dicembre 1933).