

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

SILVIO CINQUINI

## **Sopra i polinomi trigonometrici di Fejér**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 4 (1933), p. 155-175

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1933\\_\\_4\\_\\_155\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1933__4__155_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## SOPRA I POLINOMI TRIGONOMETRICI DI FEJÉR (\*)

di SILVIO CINQUINI a Pisa.

**Sunto.** — Sotto la sola ipotesi che la funzione  $f(x)$  sia integrabile (nel senso del LEBESGUE) e periodica, di periodo  $2\pi$ , si dimostra nel § I: 1°) che l'integrale, esteso ad un insieme  $E$  misurabile, del suo polinomio trigonometrico di FEJÉR, tende sempre all'integrale, esteso ad  $E$ , della funzione  $f(x)$ ; 2°) che gli integrali dei polinomi trigonometrici di FEJÉR sono funzioni equiasolutamente continue.

Queste proprietà vengono estese, nel § II, alle funzioni di due variabili, integrabili (nel senso del LEBESGUE) e doppiamente periodiche, di periodo  $2\pi$ .

È noto che integrando termine a termine, su un qualunque intervallo, la serie di FOURIER di una funzione  $f(x)$ , integrabile nel senso del LEBESGUE e periodica, di periodo  $2\pi$ , si ottiene l'integrale della  $f(x)$  sull'intervallo considerato. Inoltre, se esiste un numero  $\alpha > 0$ , e del resto comunque piccolo, in modo che anche la funzione  $|f(x)|^{1+\alpha}$  sia integrabile, il teorema ora ricordato è valevole anche quando, più generalmente, l'integrazione sia estesa ad un qualunque insieme di punti misurabile (1).

È pure noto che per le serie doppie di FOURIER valgono proprietà analoghe a quelle ora citate (2).

Nel presente lavoro mi propongo di vedere sotto quali ipotesi i teoremi ora richiamati sono valevoli per i polinomi trigo-

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) L. TONELLI — *Serie trigonometriche* (N. Zanichelli, Bologna 1928) Cap. VI; § 2, nn. 128 e 130 a).

(2) L. TONELLI, *ibidem*, Cap. IX, § 4, n. 194; si richiama l'attenzione del lettore sulle ultime due righe del n.º citato.

nometrici di FEJÉR in una e in due variabili, e di dare qualche altra proprietà di questi polinomi.

Nel § I, che è dedicato ai polinomi in una variabile, dimostro dapprima, direttamente, che sotto la sola ipotesi che la funzione  $f(x)$  sia integrabile (nel senso del LEBESGUE) e periodica di periodo  $2\pi$ , l'integrale del suo polinomio trigonometrico di FEJÉR tende sempre all'integrale della funzione  $f(x)$ , l'integrazione essendo estesa ad un qualsiasi insieme di punti misurabile. Provo poi che, sotto l'ipotesi ora ricordata, gli integrali dei polinomi trigonometrici di FEJÉR godono della equiassoluta continuità; da questa proprietà e da un noto teorema di LEBESGUE si deduce nuovamente il precedente teorema.

Nel § II, estendendo opportunamente il procedimento del § I, dimostro analoghe proprietà per i polinomi trigonometrici di FEJÉR in due variabili. Fra queste proprietà è da mettere in rilievo quella che, sotto la sola ipotesi che la funzione  $f(x, y)$  sia integrabile nel senso del LEBESGUE, e doppiamente periodica, l'integrale del suo polinomio trigonometrico di FEJÉR, esteso ad un qualunque insieme di punti superficialmente misurabile, tende sempre all'integrale della  $f(x, y)$ , esteso allo stesso insieme.

Questa proprietà viene anche qui provata direttamente e, a differenza dal caso dei polinomi in una sola variabile, non si potrebbe dedurre dalla equidoppia assoluta continuità degli integrali doppi dei polinomi trigonometrici di FEJÉR in due variabili, se non sotto le ulteriori ipotesi nelle quali è valida l'estensione del teorema di LEBESGUE ai polinomi di FEJÉR in due variabili <sup>(3)</sup>.

Le proprietà dimostrate nel presente lavoro per i polinomi di FEJÉR sono analoghe a quelle che il TONELLI ha stabilito per i polinomi di STIELTJES in una variabile <sup>(4)</sup> e che ho recentemente esteso ai polinomi di STIELTJES in due variabili <sup>(5)</sup>.

<sup>(3)</sup> L. TONELLI, *ibidem* Cap. IX, § 4, n. 187.

<sup>(4)</sup> L. TONELLI, *Sopra alcuni polinomi approssimativi*. (Annali di Matematica pura e applicata, s. III, T. XXV (1916), pagg. 275 e segg.) ; § I.

<sup>(5)</sup> S. CINQUINI, *Su una proprietà dei polinomi di Stieltjes*. (In corso di stampa nei Rend. del Circolo Matematico di Palermo, (1934)).

Si può aggiungere che il procedimento del presente lavoro permette pure di dimostrare proprietà analoghe anche per i polinomi trigonometrici di DE LA VALLÉE POUSSIN in una o due variabili.

## § 1.

### 1. - Teorema I.

Sia  $f(x)$  una funzione integrabile (nel senso del LEBESGUE) nell'intervallo  $(0, 2\pi)$ . Considerata la sua serie di FOURIER

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

si ponga

$$s_{\mu}(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=0}^{\mu} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$\sigma_{\mu}(x) = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\mu-1} s_n(x), \quad (\mu=1, 2, \dots)$$

Allora, se  $E$  è un insieme di punti di  $(0, 2\pi)$  misurabile, è

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_E \sigma_{\mu}(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

a) Si definisca la funzione  $f(x)$  in tutto  $(-\infty, +\infty)$  mediante la periodicità, di periodo  $2\pi$ , e sostituendo  $f(2\pi)$  con  $f(0)$ . Si ricordi che  $\sigma_{\mu}(x)$  può mettersi sotto forma di integrale <sup>(6)</sup>

$$(1) \quad \sigma_{\mu}(x) = \frac{1}{\pi\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u) \left( \frac{\sin \mu u}{\sin u} \right)^2 du,$$

<sup>(6)</sup> L. TONELLI, Opera citata in (1), Cap. III, § 3, n. 58, pag. 170.

ove si è posto

$$(2) \quad F(x+2u) = f(x+2u) + f(x-2u).$$

Ciò premesso si osservi che, per un risultato stabilito dal TONELLI (7), la funzione  $f(x+t)$ , considerata come funzione delle due variabili  $x$  e  $t$ , è superficialmente integrabile nel campo definito dalle disuguaglianze

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad -x \leq t \leq 2\pi - x,$$

e quindi, essendo periodica, di periodo  $2\pi$ , anche nel campo

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

perciò  $f(x+2u)$  è superficialmente integrabile nel campo definito da

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq u \leq \pi.$$

Tenendo ora presente che  $f(x+2u)$  è, come funzione della  $u$ , periodica, di periodo  $\pi$ , dalla (2) si deduce che  $F(x+2u)$  è superficialmente integrabile nel campo  $A$ , definito dalle disuguaglianze

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

Essendo poi, per ogni  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ , e  $\mu \geq 1$ ,

$$(3) \quad \left| \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right| \leq \mu,$$

ne segue

$$|F(x+2u)| \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 \leq \mu^2 |F(x+2u)|;$$

(7) L. TONELLI, luogo cit. in (4), § I, n. 2.

e perciò il prodotto  $F(x + 2u) \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2$  è superficialmente integrabile in tutto il campo  $A$ .

b) Sia  $E$  un insieme misurabile di punti di  $(0, 2\pi)$ , e si consideri la differenza  $\int_E \sigma_\mu(x) dx - \int_E f(x) dx$ .

Per la (1) si ha

$$\int_E \sigma_\mu(x) dx = \frac{1}{\pi \mu} \int_E dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x + 2u) \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du;$$

e per quanto si è provato alla fine dell'a) è applicabile il teorema del FUBINI (\*) sugli integrali multipli ed è

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi \mu} \int_E dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x + 2u) \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du = \\ & = \frac{1}{\mu \pi} \int_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x + 2u) \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 dx du = \\ & = \frac{1}{\pi \mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du \int_E F(x + 2u) dx. \end{aligned}$$

Indicato con  $\delta$  un numero positivo e minore di  $\frac{\pi}{2}$ , e del resto per ora qualunque, e posto

(\*) G. FUBINI, *Sugli integrali multipli*. Rend. R. Accademia dei Lincei, Serie V, vol. XVI (1907), pagg. 608-14.

$$I_1 = \frac{1}{\pi \mu} \int_0^{\delta} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du \int_E F(x+2u) dx - \int_E f(x) dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi \mu} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du \int_E F(x+2u) dx,$$

si ha

$$(4) \quad \int_E \sigma_{\mu}(x) dx - \int_E f(x) dx = I_1 + I_2.$$

Preso un  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, per un lemma stabilito dal TONELLI<sup>(9)</sup>, è possibile determinare un  $\delta' > 0$  abbastanza piccolo, in modo che, tenuta presente la (2), risulti per ogni  $|u| \leq \frac{\delta'}{2}$ ,

$$\int_E F(x+2u) dx = 2 \int_E f(x) dx + \eta(u),$$

con

$$(5) \quad |\eta(u)| < \varepsilon.$$

Si fissi ora  $\delta \leq \frac{\delta'}{2}$ ; è allora

$$I_1 = \left[ \frac{2}{\pi \mu} \int_0^{\delta} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du - 1 \right] \int_E f(x) dx + \frac{1}{\pi \mu} \int_0^{\delta} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 \eta(u) du.$$

Siccome è

$$(6) \quad 0 < \frac{2}{\pi \mu} \int_0^{\delta} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du < 1,$$

(9) L. TONELLI, luogo cit. in (4), § I, n. 6.

e, fissato  $\delta$ , per  $\mu \rightarrow \infty$ , è

$$(7) \quad \frac{2}{\pi \mu} \int_0^{\delta} \left( \frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 du \rightarrow 1,$$

è possibile determinare un intero  $N_1 > 0$ , tale che, per ogni  $\mu > N_1$ , risulti, tenendo conto anche della (5),

$$(8) \quad |I_1| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Dall'altra parte, prendendo il modulo di  $I_2$ , tenuta presente la (2), per la periodicità della  $f$ , risulta

$$|I_2| \leq \frac{2}{\pi \mu} \frac{\frac{\pi}{2} - \delta}{\operatorname{sen}^2 \delta} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx,$$

e pertanto è possibile determinare un intero  $N_2 > 0$ , in modo che, per ogni  $\mu > N_2$ , sia

$$(9) \quad |I_2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Prendendo il modulo della (4) e tenendo presenti le (8) e (9) risulta, per ogni  $\mu$  maggiore del più grande dei due numeri  $N_1$  e  $N_2$ ,

$$\left| \int_E \sigma_\mu(x) dx - \int_E f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

e con ciò il teorema è dimostrato.

**Osservazione.** — *Il teorema del presente n.º è ancora valido anche se l'insieme  $E$  non è contenuto in  $(0, 2\pi)$ , purchè*



sia contenuto in un intervallo di lunghezza finita e la funzione  $f(x)$  sia integrabile (nel senso del LEBESGUE) in  $(0, 2\pi)$  e sia periodica di periodo  $2\pi$  <sup>(10)</sup>.

## 2. - Teorema II.

Sotto le ipotesi dell'enunciato del n.º precedente gli integrali  $\int \sigma_{\mu}(x) dx$ , ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) sono funzioni equiassolutamente continue nell'intervallo  $(0, 2\pi)$ .

Si ripetano innanzi tutto le considerazioni fatte nell'a) nel n.º precedente. Per quanto si è allora detto, la funzione  $f(x)$  è integrabile in tutto l'intervallo  $(-\pi, 3\pi)$  e perciò, preso un  $\epsilon > 0$  ad arbitrio, è possibile determinare un  $\theta > 0$ , tale che, per un qualsiasi gruppo di intervalli  $(\alpha'_i, \beta'_i)$ , ( $i=1, 2, \dots, s'$ ), appartenenti all'intervallo  $(-\pi, 3\pi)$ , non sovrappontendosi, in numero qualunque (finito) e soddi-

<sup>(10)</sup> L'ipotesi che  $E$  sia contenuto in un intervallo di lunghezza finita, è indispensabile, perchè la funzione  $f(x)$ , supposta integrabile in  $(0, 2\pi)$  e periodica di periodo  $2\pi$ , può non essere integrabile su un insieme di punti non contenuto in un intervallo finito, come risulta dal seguente esempio:

Sia  $f(x) \equiv \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , per ogni  $0 < x \leq 2\pi$ , e per ogni altro valore di  $x$

si definisca  $f(x)$  mediante la periodicità, di periodo  $2\pi$ ;  $f(x)$  è integrabile in  $(0, 2\pi)$ .

Si consideri l'insieme  $I$  costituito dai punti appartenenti agli intervalli della successione  $\left[2(r-1)\pi, 2(r-1)\pi + \frac{1}{r^2}\right]$ , ( $r=1, 2, \dots$ ).  $I$  è misurabile ed è  $m(I) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Ma si ha, per la periodicità della  $f(x)$ :

bile ed è  $m(I) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Ma si ha, per la periodicità della  $f(x)$ :

$$\int_{2(r-1)\pi}^{2(r-1)\pi + \frac{1}{r^2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{r^2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{r}, \quad (r=1, 2, \dots),$$

e quindi la funzione  $f(x)$  non è integrabile sull'insieme  $I$ .

sfacenti alla disuguaglianza  $\sum_{i=1}^{s'} (\beta'_i - \alpha'_i) < \theta$ , sia

$$\left| \sum_{i=1}^{s'} \int_{\alpha'_i}^{\beta'_i} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Considerato allora un qualsiasi gruppo di intervalli  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, s)$  di  $(0, 2\pi)$ , non sovrappontensi, in numero qualunque (finito) e tali che sia

$$(10) \quad \sum_{i=1}^s (\beta_i - \alpha_i) < \theta,$$

si osservi che da quest'ultima disuguaglianza segue, per qualunque  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ , la

$$\sum_{i=1}^s [(\beta_i \pm 2u) - (\alpha_i \pm 2u)] < \theta,$$

ove si intenda di prendere contemporaneamente i due segni superiori o i due inferiori. Pertanto, per qualunque  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ , risulta

$$\left| \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i \pm 2u}^{\beta_i \pm 2u} f(x) dx \right| < \epsilon,$$

ossia

$$(11) \quad \left| \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x \pm 2u) dx \right| < \epsilon.$$

Considerata ora la somma  $\sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \sigma_{\mu}(x) dx$ , procedendo in modo analogo al n.<sup>o</sup> precedente, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \sigma_{\mu}(x) dx &= \frac{1}{\pi \mu} \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i}^{\beta_i} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u) \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du = \\ &= \frac{1}{\pi \mu} \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u) \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 dx du = \\ &= \frac{1}{\mu \pi} \sum_{i=1}^s \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du \int_{\alpha_i}^{\beta_i} F(x+2u) du = \\ &= \frac{1}{\pi \mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \{ f(x+2u) + f(x-2u) \} dx . \end{aligned}$$

Prendendo i moduli e tenendo poi conto della (11) risulta

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \sigma_{\mu}(x) dx \right| &\leq \frac{1}{\pi \mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du \left\{ \left| \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x+2u) dx \right| + \right. \\ &\left. + \left| \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x-2u) dx \right| \right\} < \frac{2\varepsilon}{\pi \mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 du , \end{aligned}$$

e siccome

$$(12) \quad \frac{2}{\pi \mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 du = 1,$$

si deduce

$$\left| \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \sigma_{\mu}(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Questa disuguaglianza, che è valida per qualunque  $\mu$ , e per un qualsiasi gruppo di intervalli  $(\alpha_i, \beta_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), soddisfacenti alla (10), e che si trovino nelle condizioni allora indicate, prova che gli integrali  $\int \sigma_{\mu}(x) dx$ , ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) sono in  $(0, 2\pi)$  funzioni equiassolutamente continue.

**Osservazione.** *Quanto si è osservato alla fine del n.º precedente può ripetersi per il teorema del presente n.º*

### 3. - Corollari del teorema II.

$\alpha$ ) Siccome per un noto teorema di LEBESGUE in quasi tutto  $(0, 2\pi)$ , per  $\mu \rightarrow \infty$ , è  $\sigma_{\mu}(x) \rightarrow f(x)$ , dal teorema del n.º precedente, in virtù del noto teorema d'integrazione per serie di VITALI, si deduce nuovamente il teorema del n.º 1.

$\beta$ ) Dal teorema del n.º 2. risulta che anche gli integrali  $\int |\sigma_{\mu}(x)| dx$ , ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) sono, in  $(0, 2\pi)$ , funzioni equiassolutamente continue, e perciò, tenendo presente un noto teorema di LEBESGUE, in virtù del teorema di VITALI, citato nell' $\alpha$ ) del presente n.º, si ottiene immediatamente la seguente proposizione, per la quale è pure valida l'osservazione fatta alla fine del n.º 1:

*Sotto le ipotesi dell'enunciato del n.º 1, se  $E$  è un insieme misurabile di punti di  $(0, 2\pi)$  è*

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_E |\sigma_{\mu}(x)| dx = \int_E |f(x)| dx.$$

## § II.

## 4. - Teorema III.

Sia  $f(x, y)$  una funzione superficialmente integrabile (nel senso del LEBESGUE) nel quadrato fondamentale  $Q \equiv [0 \leq x \leq 2\pi; 0 \leq y \leq 2\pi]$ . Considerata la sua serie doppia di FOURIER

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} [a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \sin mx \cos ny + \\ + c_{m,n} \cos mx \sin ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny],$$

dove è

$$\lambda_{m,n} = \frac{1}{4}, \text{ se è } m = n = 0; \\ = \frac{1}{2}, \text{ se è } m = 0, n > 0, \text{ oppure } m > 0, n = 0; \\ = 1, \text{ se è } m > 0, n > 0,$$

si ponga

$$s_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} \lambda_{m,n} [a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \sin mx \cos ny + \\ + c_{m,n} \cos mx \sin ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny],$$

$$\sigma_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{\mu\nu} \sum_{m=0}^{\mu-1} \sum_{n=0}^{\nu-1} s_{m,n}(x, y), \quad (\mu = 1, 2, \dots; \nu = 1, 2, \dots).$$

Allora, se  $E$  è un insieme (superficiale) misurabile di punti di  $Q$ , è

$$\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \iint_E \sigma_{\mu,\nu}(x, y) dx dy = \iint_E f(x, y) dx dy.$$

a) Si sostituiscano i valori della  $f(x, y)$  corrispondenti ai punti  $(x, y)$ , tali che  $x = 2\pi, 0 \leq y < 2\pi$ , con quelli relativi ai punti  $(0, y)$ , ed i valori corrispondenti ai punti  $(x, y)$  tali che  $0 \leq x < 2\pi, y = 2\pi$ , con quelli relativi ai punti  $(x, 0)$ ;

si sostituisca poi  $f(2\pi, 2\pi)$  con il valore  $f(0, 0)$ , e si definisca la funzione  $f(x, y)$  in tutto il piano  $(x, y)$ , considerandola come funzione periodica, di periodo  $2\pi$ , sia rispetto ad  $x$  che rispetto ad  $y$ .

Si ricordi che  $\sigma_{\mu, \nu}(x, y)$  può mettersi sotto forma di integrale doppio <sup>(11)</sup>

$$(13) \quad \sigma_{\mu, \nu}(x, y) = \\ = \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x + 2u, y + 2v) \left( \frac{\sin \mu u}{\sin u} \right)^2 \left( \frac{\sin \nu v}{\sin v} \right)^2 du dv,$$

ove si è posto

$$(14) \quad F(x + 2u, y + 2v) = f(x + 2u, y + 2v) + \\ + f(x + 2u, y - 2v) + f(x - 2u, y + 2v) + f(x - 2u, y - 2v).$$

Ciò premesso, si osservi che per un lemma, che ho dimostrato in altro mio lavoro <sup>(12)</sup>, la funzione  $f(x + t, y + \tau)$ , considerata come funzione delle quattro variabili  $x, y, t, \tau$ , è integrabile nel campo definito dalle disuguaglianze

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq x \leq 2\pi, & 0 \leq y \leq 2\pi, \\ -x \leq t \leq 2\pi - x, & -y \leq \tau \leq 2\pi - y, \end{array} \right.$$

e quindi, per la doppia periodicità di periodo  $2\pi$ , è integrabile anche nel campo definito dalle prime due delle (15) e dalle

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi;$$

perciò  $f(x + 2u, y + 2v)$  è integrabile nel campo definito dalle prime due delle (15) e dalle:

<sup>(11)</sup> Vedi L. TONELLI, Opera cit. in <sup>(1)</sup>, Cap. IX, § 4, n. 184.

<sup>(12)</sup> Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in <sup>(5)</sup>, n. 2.

$$0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq \pi.$$

Osservando che  $f(x + 2u, y + 2v)$  è, come funzione delle  $u$  e  $v$ , doppiamente periodica di periodo  $\pi$ , tenuta presente la (14), risulta che  $F(x + 2u, y + 2v)$ , considerata come funzione delle quattro variabili  $x, y, u, v$ , è integrabile nel campo  $B$  definito dalle disuguaglianze

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi, \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Per la (3) del n.º 1 anche il prodotto

$$F(x + 2u, y + 2v) \left( \frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2,$$

risulta integrabile nel campo  $B$ .

b) Sia  $E$  un insieme (superficiale) misurabile di punti di  $Q$  e si consideri la differenza

$$\iint_E \sigma_{\mu, \nu}(x, y) dx dy - \iint_E f(x, y) dx dy.$$

Per la (13) è

$$\begin{aligned} & \iint_E \sigma_{\mu, \nu}(x, y) dx dy = \\ & = \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \iint_E dx dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x + 2u, y + 2v) \left( \frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2 du dv, \end{aligned}$$

e siccome per quanto si è provato alla fine dell' *a*) è applicabile il teorema di FUBINI sugli integrali multipli, risulta (analogamente al n.º 1)

$$\iint_E \sigma_{\mu, \nu}(x, y) dx dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2 du dv \iint_E F(x+2u, y+2v) dx dy.$$

Indicato con  $\delta$  un numero positivo e minore di  $\frac{\pi}{2}$ , e del resto per ora qualunque, e posto

$$I_1 = \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \int_0^{\delta} \int_0^{\delta} \left( \frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2 du dv \iint_E F(x+2u, y+2v) dx dy - \iint_E f(x, y) dx dy,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2 du dv \iint_E F(x+2u, y+2v) dx dy,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \int_0^{\delta} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2 du dv \iint_E F(x+2u, y+2v) dx dy,$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\delta} \left( \frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2 du dv \iint_E F(x+2u, y+2v) dx dy,$$

si ha

$$(16) \quad \iint_E \sigma_{\mu, \nu}(x, y) dx dy - \iint_E f(x, y) dx dy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Per un lemma che ho altrove dimostrato <sup>(13)</sup>, preso un  $\epsilon > 0$  ad arbitrio, è possibile determinare un  $\delta' > 0$  abbastanza piccolo, in modo che, tenuta presente la (14), risulti, per ogni cop-

(13) Vedi S. CINQUINI, *ibidem*, n. 4.



pia  $(u, v)$  tale che  $\sqrt{u^2 + v^2} \leq \frac{\delta'}{2}$ ,

$$\iint_E F(x + 2u, y + 2v) dx dy = 4 \iint_E f(x, y) dx dy + \eta(u, v),$$

con

$$(17) \quad |\eta(u, v)| < \varepsilon.$$

Si fissi ora  $\delta \leq \frac{\delta'}{2\sqrt{2}}$ ; è allora

$$I_1 = \left[ \frac{4}{\pi^2 \mu \nu} \int_0^\delta \int_0^\delta \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 \left( \frac{\text{sen } \nu v}{\text{sen } v} \right)^2 du dv - 1 \right] \iint_E f(x, y) dx dy + \\ + \frac{1}{\pi^2 \nu \mu} \int_0^\delta \int_0^\delta \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 \left( \frac{\text{sen } \nu v}{\text{sen } v} \right)^2 \eta(u, v) du dv.$$

Prendendo il modulo e tenendo presenti le (6) e (7) del n.º 1, è possibile determinare un intero  $N_1 > 0$ , tale che per ogni coppia di interi  $\mu, \nu$  entrambi maggiori di  $N_1$ , risulti tenendo conto anche della (17),

$$(18) \quad |I_1| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte, prendendo il modulo di  $I_2$  e tenendo presente la (14) per la doppia periodicità di  $f$ , si ha

$$|I_2| \leq \frac{4}{\pi^2 \mu \nu} \frac{\left( \frac{\pi}{2} - \delta \right)^2}{\text{sen}^4 \delta} \iint_Q |f(x, y)| dx dy,$$

e quindi è possibile determinare un intero  $N_2 > 0$ , tale che, per ogni coppia di interi  $\mu, \nu$ , entrambi maggiori di  $N_2$ , si abbia

$$(19) \quad |I_2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Inoltre, prendendo il modulo di  $I_3$ , per la (14) e per la doppia periodicità di  $f$  risulta

$$|I_3| \leq \frac{4}{\pi^2 \mu \nu} \int_0^\delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2 du dv \iint_Q |f(x, y)| dx dy,$$

e tenendo conto della (6) del n.º 1 si ha

$$|I_3| \leq \frac{2}{\pi \nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2 dv \left( \iint_Q |f(x, y)| dx dy \right)$$

ed anche

$$|I_3| \leq \frac{2 \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right)}{\pi \nu \operatorname{sen}^2 \delta} \iint_Q |f(x, y)| dx dy,$$

e si può quindi determinare un intero  $N_3 > 0$ , in modo che, per ogni  $\nu > N_3$ , si abbia

$$(20) \quad |I_3| \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

In modo analogo si può determinare un intero  $N_4 > 0$ , in modo che, per ogni  $\mu > N_4$ , sia

$$(21) \quad |I_4| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Dalla (16), prendendo i moduli e tenendo presenti le (18), (19), (20) e (21) si deduce che per ogni coppia di numeri  $\mu, \nu$ , entrambi maggiori del più grande dei numeri  $N_1, N_2, N_3, N_4$ , è

$$\left| \iint_E \sigma_{\mu, \nu}(x, y) dx dy - \iint_E f(x, y) dx dy \right| < \epsilon,$$

e con ciò il teorema enunciato è provato.

**Osservazione.** - Il teorema del presente n.º è ancora valido anche se l'insieme  $E$  non è tutto costituito di punti di  $Q$ , purchè sia contenuto in un campo finito e la funzione  $f(x, y)$  sia in questo campo doppiamente periodica di periodo  $2\pi$ , e sia in  $Q$  integrabile nel senso del Lebesgue.

### 5. - Teorema IV

Sotto le ipotesi dell'enunciato del n.º precedente gli integrali  $\iint \sigma_{\mu, \nu}(x, y) dx dy$ , ( $\mu = 1, 2, \dots$ ;  $\nu = 1, 2, \dots$ ) sono, nel quadrato fondamentale  $Q$ , funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

Si ripetano innanzi tutto le considerazioni fatte nell'a) del n.º precedente. Per quanto si è allora detto la funzione  $f(x, y)$  risulta integrabile nel quadrato  $Q' \equiv [-\pi \leq x \leq 3\pi$ ;  $-\pi \leq y \leq 3\pi]$ , e perciò, preso un  $\epsilon > 0$  ad arbitrio, è possibile determinare un  $\theta > 0$ , in modo che, per ogni gruppo di rettangoli  $R'_i \equiv [\alpha'_i \leq x \leq \beta'_i$ ;  $\gamma'_i \leq y \leq \delta'_i]$ , ( $i = 1, 2, \dots, s'$ ), contenuti nel quadrato  $Q'$ , in numero qualunque (finito), a lati paralleli agli assi coordinati, senza punti interni a comune, e tali che sia

$$\sum_{i=1}^{s'} (\beta'_i - \alpha'_i) (\delta'_i - \gamma'_i) < \theta,$$

risulti

$$\left| \sum_{i=1}^{s'} \iint_{R'_i} f(x, y) dx dy \right| < \epsilon.$$

Considerato allora un qualsiasi gruppo di rettangoli  $R \equiv [\alpha_i \leq x \leq \beta_i$ ;  $\gamma_i \leq y \leq \delta_i]$ , ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), in numero qualunque (finito), contenuti nel quadrato fondamentale  $Q$ , a lati paralleli agli assi coordinati, senza punti interni a comune e tali che sia

$$(22) \quad \sum_{i=1}^s (\beta_i - \alpha_i) (\delta_i - \gamma_i) < \theta,$$

si osservi che da quest'ultima disuguaglianza, segue, per qualunque coppia  $u, v$ , con  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  la seguente

$$\sum_{i=1}^s [(\beta_i \pm 2u) - (\alpha_i \pm 2u)] [(\delta_i \pm 2v) - (\gamma_i \pm 2v)] < \theta,$$

ove si intenda che i segni che precedono la  $u$  siano sempre concordi e così pure quelli che precedono la  $v$ . Pertanto risulta

$$\left| \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i \pm 2u}^{\beta_i \pm 2u} \int_{\gamma_i \pm 2v}^{\delta_i \pm 2v} f(x, y) dx dy \right| < \epsilon$$

ossia

$$(23) \quad \left| \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} f(x \pm 2u, y \pm 2v) dx dy \right| < \epsilon.$$

Considerata la somma  $\sum_{i=1}^s \iint_{R_i} \sigma_{\mu, \nu}(x, y) dx dy$ , procedendo in modo

analogo al n.º precedente, si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} \sigma_{\mu, \nu}(x, y) dx dy = \\ & = \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} dx dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 \left( \frac{\text{sen } \nu v}{\text{sen } v} \right)^2 du dv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_{\gamma_i}^{\delta_i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2u, y+2v) \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 \left( \frac{\text{sen } \nu v}{\text{sen } v} \right)^2 dx dy du dv = \\
&= \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \sum_{i=1}^s \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 \left( \frac{\text{sen } \nu v}{\text{sen } v} \right)^2 du dv \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_{\gamma_i}^{\delta_i} F(x+2u, y+2v) dx dy = \\
&= \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 \left( \frac{\text{sen } \nu v}{\text{sen } v} \right)^2 du dv \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} F(x+2u, y+2v) dx dy.
\end{aligned}$$

Prendendo i moduli e tenendo presente la (14) in virtù della (23) risulta

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} \sigma_{\mu, \nu}(x, y) dx dy \right| \leq \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 \left( \frac{\text{sen } \nu v}{\text{sen } v} \right)^2 du dv \times \\
&\times \left\{ \left| \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} f(x+2u, y+2v) dx dy \right| + \left| \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} f(x+2u, y-2v) dx dy \right| + \right. \\
&+ \left. \left| \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} f(x-2u, y+2v) dx dy \right| + \left| \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} f(x-2u, y-2v) dx dy \right| \right\} < \\
&< \frac{4 \varepsilon}{\pi^2 \mu \nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\text{sen } \mu u}{\text{sen } u} \right)^2 \left( \frac{\text{sen } \nu v}{\text{sen } v} \right)^2 du dv,
\end{aligned}$$

e quindi per la (12)

$$\left| \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} \sigma_{\mu, \nu}(x, y) dx dy \right| < \varepsilon.$$

Questa disuguaglianza che è valida per qualunque coppia di numeri interi  $\mu, \nu$ , e per un qualsiasi gruppo di rettangoli  $R_i, (1, 2, \dots, s)$  soddisfacenti alla (22) e che si trovino nelle condizioni allora indicate, prova che gli integrali  $\iint \sigma_{\mu, \nu}(x, y) dx dy$  sono, nel quadrato fondamentale  $Q$ , funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

**Osservazione I.** - *Quanto si è osservato alla fine del n.<sup>o</sup> precedente, può ripetersi per il teorema del presente n.<sup>o</sup>.*

**Osservazione II.** - A differenza dal § I, dal teorema del presente n.<sup>o</sup> non può dedursi il teorema del n.<sup>o</sup> precedente, se non con l'aggiunta di ulteriori ipotesi relative alla funzione  $f$ .

---