Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Piero Buzano

# Interpretazione geometrica dell'arco proiettivo di una curva sghemba

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 4 (1933), p. 38-51

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1933__4__38_0>

# INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'ARCO PROIETTIVO DI UNA CURVA SGHEMBA

*di* PIERO BUZANO *a Torino*

**Sunto.** - In questo lavoro, estendendo allo spazio le ricerche analoghe fatte dal prof. TERRACINI per le curve piane, dò una semplice interpretazione geometrica dell'arco proiettivo elementare $AB$ di una curva sghemba, valendomi di invarianti connessi ai punti $A$ e $B$ ed ai loro intorni di certi ordini.

Il prof. A. TERRACINI in due suoi lavori, di cui uno "*La lunghezza proiettiva di un arco di curva piana*„ già uscito sul PERIODICO DI MATEMATICHE (serie IV - vol. VIII - n. 2, pag. 99) e l'altro "*Su gli elementi lineari proiettivi*„ di prossima pubblicazione negli ANNALI DELLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA, ritorna sull'opportunità, già altre volte e da diverse parti segnalata, di dare interpretazioni geometriche a gli enti fondamentali della geometria proiettiva differenziale e affronta fra l'altro per l'arco proiettivo di una curva piana, già definito come parametro normale, il problema della definizione diretta, analogo a quello da lui risolto per l'elemento lineare di una superficie. Egli mette in relazione l'arco proiettivo elementare con il valore dell'invariante formato da due elementi del 2° ordine relativi ai punti $A$ e $B$ della curva, quando sulla curva $B$ tende ad $A$. Questo invariante si identifica con il birapporto formato dalle due coniche aventi con la curva, l'una contatto tripunto in $A$ e bipunto in $B$, l'altra contatto bipunto in $A$ e tripunto in $B$, e dalle due coniche degeneri del loro fascio-schiera: ne deriva quindi una semplice interpretazione geometrica dell'arco proiettivo elementare di una curva piana.

Seguendo il medesimo ordine di idee io dò in questo lavoro l'interpretazione geometrica dell'arco proiettivo di una curva sghemba

Come vedremo, per una curva sghemba con un elemento del 3° e uno del 2° ordine si può formare un unico invariante e poichè, detti $A$ e $B$ i punti in cui si prendono i due elementi, ci occorrerà poi far tendere $B$ ad $A$ lungo la curva, si dovranno distinguere due casi secondo che l'elemento relativo al punto $B$, cioè quello mobile, è del 2° oppure del 3° ordine. Detti, nei due casi, $H_1$ e $H_2$ gli invarianti, dimostrerò che *entrambi* si possono mettere in semplice relazione con l'arco proiettivo elementare: tuttavia farò vedere che, per l'interpretazione desiderata, più che ad $H_1$ o ad $H_2$ conviene ricorrere al loro rapporto, che è come questi invariante legato all'arco elementare, ma offre il vantaggio di dipendere da intorni di $A$ e $B$ degli stessi ordini e di essere più semplice anche per quel che riguarda il significato geometrico, che darò in ultimo a completamento della ricerca.

* * *

Consideriamo pertanto una curva sghemba avente, in un dato sistema di coordinate proiettive omogenee $x$, $y$, $z$, $t$, le seguenti equazioni parametriche:

$$(1) \qquad x = x(u) \ , \quad y = y(u) \ , \quad z = z(u) \ , \quad t = t(u) \ .$$

Supporremo per brevità che essa sia analitica e che nel tratto che dobbiamo considerare non vi sia alcun punto con piano osculatore stazionario, cioè sia sempre diverso da zero il determinante [1]: $(x\, x'\, x''\, x''')$.

Fissati sulla curva due punti $A$ e $B$, per lo scopo che ci

[1] Indicherò con la prima riga posta fra parentesi tonde quei determinanti in cui le altre righe si ottengono dalla 1ª mutando $x$ rispettivamente $y$, $z$, $t$. Le derivate ove non vi siano altre indicazioni si intendono fatte rispetto ad $u$.

proponiamo converrà anzitutto riferirla a un nuovo sistema di coordinate assumendo i seguenti punti fondamentali:

$A_1 \equiv A$ , $A_4 \equiv B$ ,
$A_2 \equiv$ intersezione della tangente in $A$ col piano osculatore in $B$,
$A_3 \equiv$ » » » » $B$ » » » » $A$,

e prendendo ad arbitrio il punto unità. Si vede allora immediatamente che, dette $X$, $Y$, $Z$, $T$ le nuove coordinate omogenee, la curva (1) si può rappresentare in prossimità dei punti $A$ e $B$ rispettivamente con i seguenti sviluppi:

$$(2)\ \begin{cases} \dfrac{Z}{X} = a_2\left(\dfrac{Y}{X}\right)^2 + a_3\left(\dfrac{Y}{X}\right)^3 + \dots \\[2ex] \dfrac{T}{X} = \qquad\quad b_3\left(\dfrac{Y}{X}\right)^3 + \dots \end{cases} ;\ (3)\ \begin{cases} \dfrac{Y}{T} = c_2\left(\dfrac{Z}{T}\right)^2 + c_3\left(\dfrac{Z}{T}\right)^3 + \dots \\[2ex] \dfrac{X}{T} = \qquad\quad d_3\left(\dfrac{Z}{T}\right)^3 + \dots \end{cases}$$

dove i coefficienti si possono calcolare ricorrendo alle formule che danno le nuove coordinate in funzione delle vecchie, il che si farà più innanzi. Ora osserviamo che il nostro sistema di riferimento non è del tutto determinato poichè possiamo ancora far variare il punto unità, il che equivale a porre:

$$X = \alpha X', \quad Y = \beta Y', \quad Z = \gamma Z', \quad T = \delta T',$$

dove $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ possono dipendere dai valori del parametro relativi ai punti $A$ e $B$. Allora gli sviluppi (2) e (3) si trasformano in nuovi sviluppi, relativi alle nuove coordinate, i cui coefficienti $a'_2$, $a'_3$ ecc., sono legati ai coefficienti omologhi $a_2$, $a_3$ ecc. dalle seguenti relazioni:

$$a'_2 = \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} a^2 ; \qquad a'_3 = \frac{\beta^3}{\alpha^2\gamma} a_3 ; \qquad b'_3 = \frac{\beta^3}{\alpha^2\delta} b_3 ;$$

$$c'_2 = \frac{\gamma^2}{\beta\delta} c_2 ; \qquad c'_3 = \frac{\gamma^3}{\beta\delta^2} c_3 ; \qquad d'_3 = \frac{\gamma^3}{\alpha\delta^2} d_3 .$$

Ne deriva che con l'elemento del 3° ordine relativo al punto $A$

e l'elemento del 2° ordine relativo al punto $B$, cioè con le quantità $a_2$, $a_3$, $b_3$, $c_2$ da cui essi dipendono, si può formare uno ed uno solo invariante e precisamente:

$$H_1 = \frac{b_3}{a_2^2\, c_2} .$$

Un secondo invariante si trova scambiando fra di loro i punti $A$ e $B$, cioè prendendo l'elemento del 2° ordine relativo al punto $A$ e l'elemento del 3° ordine relativo al punto $B$, esso è:

$$H_2 = \frac{d_3}{a_2\, c_2^2} .$$

Si vede facilmente che con elementi di ordini più bassi non si forma alcun invariante, mentre che con quelli di ordini più elevati non se ne formerebbe più uno solo. Pertanto gli invarianti $H_1$ e $H_2$ si presentano nel modo più naturale e ora vedremo la semplice relazione che intercede fra essi e l'arco proiettivo.

Detti $u_1$ e $u_2$ i valori del parametro corrispondenti ai punti $A$ e $B$ ci converrà anzitutto ricavare $H_1$ e $H_2$ in funzione di $u_1$ e $u_2$, per il che bisogna calcolare i coefficienti $a_2$, $b_3$, $c_2$, $d_3$ degli sviluppi (2) e (3). A tale scopo partiamo dalle formule che legano le coordinate nel sistema fisso alle coordinate nel sistema mobile: esse, ove si indichino con sopralineature le coordinate correnti, e si ponga per brevità $x(u_1) = x_1$, $x(u_2) = x_2$ ecc., si scrivono nel seguente modo:

$$\left\{\begin{aligned} \overline{X} &= (\overline{x}\ x_2\ x_2'\ x_2'')\, p \\ \overline{Y} &= (\overline{x}\ x_1\ x_2\ x_2')\, q \\ \overline{Z} &= (\overline{x}\ x_2\ x_1\ x_1')\, r \\ \overline{T} &= (\overline{x}\ x_1\ x_1'\ x_1'')\, s \end{aligned}\right.$$

dove $p$, $q$, $r$, $s$ sono funzioni di $u_1$ e $u_2$ dipendenti dall'arbitrarietà del punto unità. Ponendo in luogo delle $\overline{x}$ le coordinate

$x(u_1+h)$ di un punto della curva prossimo ad $A$ e sviluppando in serie di potenze di $h$ si ottiene:

$$\left\{\begin{aligned} X &= (x_1\ x_2\ x_2'\ x_2'')\ p + \ldots \\ Y &= (x_1'\ x_1\ x_2\ x_2')\ qh + \ldots \\ Z &= (x_1''\ x_2\ x_1\ x_1')\ r\frac{h^2}{2} + \ldots \\ T &= (x_1'''x_1\ x_1'\ x_1'')\ s\frac{h^3}{6} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Di qui si ricavano subito gli sviluppi di $\frac{Y}{X}$, $\frac{Z}{X}$, $\frac{T}{X}$ in funzione di $h$, da cui si perviene facilmente a gli sviluppi (2) con i seguenti valori per i coefficienti:

$$a_2 = \frac{1}{2}\frac{pr}{q^2}\frac{(x_1''\,x_2\,x_1\,x_1')\,(x_1\,x_2\,x_2'\,x_2'')}{(x_1'\,x_1\,x_2\,x_2')^2},$$

$$b_3 = \frac{1}{6}\frac{p^2 s}{q^3}\frac{(x_1'''\,x_1\,x_1'\,x_1'')\,(x_1\,x_2\,x_2'\,x_2'')^2}{(x_1'\,x_1\,x_2\,x_2')^3}.$$

I coefficienti $c_2$ e $d_3$ degli sviluppi (3) si ottengono da questi, senza ulteriori calcoli, scambiando $u_1$ con $u_2$ e $p$, $q$, $r$, $s$ rispettivamente con $s$, $r$, $q$, $p$. Tenendo presenti questi risultati si ottiene:

$$H_1 = \frac{b_3}{a_2^2\,c_2} = \frac{4}{3}\frac{(x_1'\,x_1\,x_2\,x_2')^3\,(x_1\,x_1'\,x_1''\,x_1''')}{(x_2\,x_1\,x_1'\,x_1'')^3\,(x_1\,x_2\,x_2'\,x_2'')},$$

$$H_2 = \frac{d_3}{a_2\,c_2^2} = \frac{4}{3}\frac{(x_2'\,x_2\,x_1\,x_1')^3\,(x_2\,x_2'\,x_2''\,x_2''')}{(x_1\,x_2\,x_2'\,x_2'')^3\,(x_2\,x_1\,x_1'\,x_1'')}.$$

Ora per trovare la relazione fra $H_1$ o $H_2$ e l'arco proiettivo supponiamo che la curva considerata non appartenga ad un complesso lineare e assumiamo nelle equazioni (1) come parametro $u$ proprio il *parametro normale o arco proiettivo* e come coordinate omogenee $x$, $y$, $z$, $t$ le *coordinate normali* (cfr. Fubini

ET ČECH – *Introduction à la géométrie projective differentielle des surfaces* Chap. III, n. 9) cosicchè si abbia identicamente:

$$(4) \qquad (x\, x'\, x''\, x''') = 1\,,$$

e le funzioni $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$, $t(u)$ soddisfino un'equazione differenziale omogenea del seguente tipo:

$$(5) \qquad x^{\mathrm{IV}} + a x'' + (a' + 1) x' + c x = 0\,,$$

dove $a$ e $c$ sono due funzioni di $u$ che determinano la curva, cioè le curvature proiettive. In seguito a tale ipotesi le espressioni di $H_1$ e $H_2$ si semplificano e si ottiene:

$$(6) \qquad H_1 = \frac{4}{3}\,\frac{\Delta^3}{\Delta_1^3\,\Delta_2}\,, \qquad H_2 = \frac{4}{3}\,\frac{\Delta^3}{\Delta_1\,\Delta_2^3}\,,$$

avendo posto:

$$\Delta = (x_1'\, x_1\, x_2\, x_2')\,, \qquad \Delta_1 = (x_2\, x_1\, x_1'\, x_1'')\,, \qquad \Delta_2 = (x_1\, x_2\, x_2'\, x_2'')\,.$$

Ora, siccome vorremo poi far tendere il punto $B$ al punto $A$, fissato $u_1$, converrà pensare $H_1$ e $H_2$ come funzioni di $u_2$ e svilupparle in serie di potenze di $u_2 - u_1$. A tale scopo cominceremo a procurarci gli sviluppi di $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$: ne calcoleremo pertanto le derivate rispetto a $u_2$ [2], facendovi poi $u_2 = u_1$.

Le derivate di $\Delta$ sono le seguenti:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u_2} = (x_1'\, x_1\, x_2\, x_2'')\,,$$

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial u_2^2} = (x_1'\, x_1\, x_2'\, x_2'') + (x_1'\, x_1\, x_2\, x_2''')\,,$$

$$\frac{\partial^3 \Delta}{\partial u_2^3} = 2\,(x_1'\, x_1\, x_2'\, x_2''') + (x_1'\, x_1\, x_2\, x_2^{\mathrm{IV}})\,,$$

(2) Per le ragioni che risulteranno dal calcolo stesso dovremo giungere per $\Delta$ fino alle derivate settime e per $\Delta_1$ e $\Delta_2$ fino alle derivate seste.

$$\frac{\partial^4 \Delta}{\partial u_2^4} = 2\,(x_1'\,x_1\,x_2''\,x_2''') + 3\,(x_1'\,x_1\,x_2'\,x_2^{\mathrm{IV}}) + (x_1'\,x_1\,x_2\,x_2^{\mathrm{V}})\,,$$

$$\frac{\partial^5 \Delta}{\partial u_2^5} = 5\,(x_1'\,x_1\,x_2''\,x_2^{\mathrm{IV}}) + 4\,(x_1'\,x_1\,x_2'\,x_2^{\mathrm{V}}) + (x_1'\,x_1\,x_2\,x_2^{\mathrm{VI}})\,,$$

$$\frac{\partial^6 \Delta}{\partial u_2^6} = 5\,(x_1'x_1x_2'''x_2^{\mathrm{IV}}) + 9\,(x_1'x_1x_2''x_2^{\mathrm{V}}) + 5\,(x_1'x_1x_2'x_2^{\mathrm{VI}}) + (x_1'x_1x_2x_2^{\mathrm{VII}}),$$

$$\frac{\partial^7 \Delta}{\partial u_2^7} = 14\,(x_1'\,x_1\,x_2'''\,x_2^{\mathrm{V}}) + 14\,(x_1'\,x_1\,x_2''\,x_2^{\mathrm{VI}}) + 6\,(x_1'\,x_1\,x_2'\,x_2^{\mathrm{VII}}) +$$
$$+ (x_1'\,x_1\,x_2\,x_2^{\mathrm{VIII}})\,.$$

Le derivate di $\Delta_1$ sono le seguenti:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial u_2} = (x_2'\,x_1\,x_1'\,x_1'')\quad ; \qquad \frac{\partial^4 \Delta_1}{\partial u_2^4} = (x_2^{\mathrm{IV}}\,x_1\,x_1'\,x_1'')$$

$$\frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial u_2^2} = (x_2''\,x_1\,x_1'\,x_1'')\ ; \qquad \frac{\partial^5 \Delta_1}{\partial u_2^5} = (x_2^{\mathrm{V}}\,x_1\,x_1'\,x_1'')$$

$$\frac{\partial^3 \Delta_1}{\partial u_2^3} = (x_2'''\,x_1\,x_1'\,x_1'')\ ; \qquad \frac{\partial^6 \Delta_1}{\partial u_2^6} = (x_2^{\mathrm{VI}}\,x_1\,x_1'\,x_1'')\,.$$

Le derivate di $\Delta_2$ sono le seguenti:

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial u_2} = (x_1\,x_2\,x_2'\,x_2''')\,,$$

$$\frac{\partial^2 \Delta_2}{\partial u_2^2} = (x_1\,x_2\,x_2''\,x_2''') + (x_1\,x_2\,x_2'\,x_2^{\mathrm{IV}})\,,$$

$$\frac{\partial^3 \Delta_2}{\partial u_2^3} = (x_1\,x_2'\,x_2''\,x_2''') + 2\,(x_1\,x_2\,x_2''\,x_2^{\mathrm{IV}}) + (x_1\,x_2\,x_2'\,x_2^{\mathrm{V}})\,,$$

$$\frac{\partial^4 \Delta_2}{\partial u_2^4} = 3\,(x_1\,x_2'x_2''\,x_2^{\mathrm{IV}}) + 2\,(x_1x_2x_2'''x_2^{\mathrm{IV}}) + 3\,(x_1x_2x_2''x_2^{\mathrm{V}}) + (x_1x_2x_2'x_2^{\mathrm{VI}}),$$

$$\frac{\partial^5 \Delta_2}{\partial u_2^5} = 5\,(x_1\,x_2'\,x_2'''\,x_2^{\mathrm{IV}}) + 6\,(x_1\,x_2'\,x_2''\,x_2^{\mathrm{V}}) + 5\,(x_1\,x_2\,x_2'''\,x_2^{\mathrm{V}}) +$$
$$+ 4\,(x_1\,x_2\,x_2''\,x_2^{\mathrm{VI}}) + (x_1\,x_2\,x_2'\,x_2^{\mathrm{VII}})\,,$$

$$\frac{\partial^6 \Delta_2}{\partial u_2^6} = 5\,(x_1\, x_2''\, x_2'''\, x_2^{\mathrm{IV}}) + 16\,(x_1\, x_2'\, x_2'''\, x_2^{\mathrm{V}}) + 10\,(x_1\, x_2'\, x_2''\, x_2^{\mathrm{VI}}) +$$

$$+ 5(x_1\, x_2 x_2^{\mathrm{IV}}\, x_2^{\mathrm{V}}) + 9(x_1\, x_2 x_2'''\, x_2^{\mathrm{VI}}) + 5(x_1\, x_2 x_2''\, x_2^{\mathrm{VII}}) + (x_1\, x_2 x_2'\, x_2^{\mathrm{VIII}}).$$

Se in queste derivate si pone $u_2 = u_1$ e si tengono presenti le equazioni (4) e (5) e quelle che si ricavano da esse per derivazione, si possono effettuare parecchie semplificazioni e si ottiene:

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial u_2}\right)_{u_2=u_1} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial u_2^2}\right)_{u_2=u_1} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial^3 \Delta}{\partial u_2^3}\right)_{u_2=u_1} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial^4 \Delta}{\partial u_2^4}\right)_{u_2=u_1} = -2\,;$$

$$\left(\frac{\partial^5 \Delta}{\partial u_2^5}\right)_{u_2=u_1} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial^6 \Delta}{\partial u_2^6}\right)_{u_1=u_1} = 4\, a_1\,; \quad \left(\frac{\partial^7 \Delta}{\partial u_2^7}\right)_{u_2=u_1} = 14\, a_1'$$

(avendo posto $a_1 = a\,(u_1)$ dove $a$ è il coefficiente che compare nell'equazione (5));

$$\left(\frac{\partial \Delta_1}{\partial u_2}\right)_{u_2=u_1} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial u_2^2}\right)_{u_1=u_2} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial^3 \Delta_1}{\partial u_2^3}\right)_{u_1=u_2} = -1\,;$$

$$\left(\frac{\partial^4 \Delta_1}{\partial u_2^4}\right)_{u_2=u_1} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial^5 \Delta_1}{\partial u_2^5}\right)_{u_2=u_1} = a_1\,; \quad \left(\frac{\partial^6 \Delta_1}{\partial u_2^6}\right) = 1 + 3a_1'\,;$$

$$\left(\frac{\partial \Delta_2}{\partial u_2}\right)_{u_2=u_1} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial^2 \Delta_2}{\partial u_2^2}\right)_{u_2=u_1} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial^3 \Delta_2}{\partial u_2^3}\right)_{u_2=u_1} = 1\,;$$

$$\left(\frac{\partial^4 \Delta_2}{\partial u_2^4}\right)_{u_2=u_1} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial^5 \Delta_2}{\partial u_2^5}\right)_{u_2=u_1} = -\,a_1\,; \quad \left(\frac{\partial^6 \Delta_2}{\partial u_2^6}\right)_{u_2=u_1} = 1 - 3a_1'\,;$$

Tenendo presenti tali risultati si ricavano immediatamente gli sviluppi di $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$:

$$\Delta = -\frac{1}{12}(u_2 - u_1)^4 + \frac{a_1}{180}(u_2 - u_1)^5 + \frac{a_1'}{360}(u_2 - u_1)^7 + \ldots,$$

$$\Delta_1 = -\frac{1}{6}(u_2 - u_1)^3 + \frac{a_1}{120}(u_2 - u_1)^5 + \frac{1 + 3a_1'}{720}(u_2 - u_1)^6 + \ldots,$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{6}(u_2 - u_1)^3 - \frac{a_1}{120}(u_2 - u_1)^5 + \frac{1 - 3a_1'}{720}(u_2 - u_1)^6 + \ldots,$$

da cui segue, in virtù delle (6):

$$H_1 = \frac{4}{3}\frac{\Delta^3}{\Delta_1^3 \Delta_2} = \frac{1 - \frac{a_1}{5}(u_2 - u_1)^2 - \frac{a_1'}{10}(u_2 - u_1)^3 + \ldots}{1 - \frac{a_1}{5}(u_2 - u_1)^2 - \frac{1 + 6a_1'}{60}(u_2 - u_1)^3 + \ldots} =$$

$$= 1 + \frac{1}{60}(u_2 - u_1)^3 + \ldots$$

$$H_2 = \frac{4}{3}\frac{\Delta^3}{\Delta_1 \Delta_2^3} = \frac{1 - \frac{a_1}{5}(u_2 - u_1)^2 - \frac{a_1'}{10}(u_2 - u_1)^3 + \ldots}{1 - \frac{a_1}{5}(u_2 - u_1)^2 + \frac{1 - 6a_1'}{60}(u_2 - u_1)^3 + \ldots} =$$

$$= 1 - \frac{1}{60}(u_2 - u_1)^3 + \ldots$$

Ora poichè la differenza $u_2 - u_1$ non è altro che l'arco proiettivo $A\,B$, questi sviluppi ci fanno vedere la semplice relazione che intercede fra gli invarianti $H_1$, $H_2$ e l'arco proiettivo: infatti da essi passando al limite per $B$ tendente ad $A$ si ottiene:

$$\lim_{u_2 = u_1} \frac{60\,(H_1 - 1)}{(u_2 - u_1)^3} = 1\,; \qquad \lim_{u_2 = u_1} \frac{-60\,(H_2 - 1)}{(u_2 - u_1)^3} = 1\,;$$

risultato che si può enunciare sotto forma abbreviata infinitesimale, dicendo che *l'arco proiettivo elementare du è legato ad* $H_1$ *e* $H_2$, *quando B è infinitamente vicino ad A, dalla seguente relazione:*

$$du^3 = 60\,(H_1 - 1) = -60\,(H_2 - 1)\,. \tag{7}$$

Ora si può vedere che anche il rapporto dei due invarianti $H_1$ e $H_2$ è legato all'arco elementare da una relazione analoga; infatti si ha:

$$J = \frac{H_1}{H_2} = \frac{c_2 b_3}{a_2 d_3} = \frac{1 + \frac{1}{60}(u_2 - u_1)^3 + \ldots}{1 - \frac{1}{60}(u_2 - u_1)^3 + \ldots} = 1 + \frac{1}{30}(u_2 - u_1)^3 + \ldots$$

vale a dire:

$$du^3 = 30(J - 1)\,. \tag{8}$$

Si può dunque fare uso dell'invariante $J$ anzichè di $H_1$ o di $H_2$; e con vantaggio, poichè $J$ dipende da elementi degli stessi ordini relativi ai punti $A$ e $B$ [3] e come vedremo ha un significato geometrico più semplice.

Ora cerchiamo appunto i significati geometrici degli invarianti $H_1$, $H_2$, $J$ per giungere poi attraverso le relazioni (7) e (8) all'interpretazione dell'arco proiettivo elementare. Collegando il fatto che l'invariante utilizzato per le curve piane è un birapporto di certe coniche, all'altro, che le curve piane eccezionali nei riguardi dell'arco proiettivo sono appunto le coniche (per

[3] E precisamente $J$ dipende da due elementi del 3° ordine: ma la proprietà per cui esso viene qui utilizzato non è dovuta a ciò, poichè con due elementi del 3° ordine si può formare anche quest' altro invariante:

$$K = \frac{a_3 c_3}{a_2^2 c_2^2}$$

con cui *non* si giunge all' arco proiettivo. Infatti (con calcoli complicati) si può vedere che esso ha la seguente espressione in funzione di $u_1$ e di $u_2$:

$$K = \frac{4}{\Delta_1^3 \Delta_2^3} \left\{ -\frac{1}{3} \Delta\Delta_2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_1} - \Delta\Delta_1 \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_1} + \Delta_1 \Delta_2 \frac{\partial \Delta}{\partial u_1} \right\} \times$$
$$\times \left\{ -\frac{1}{3} \Delta\Delta_1 \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_2} - \Delta\Delta_2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_2} + \Delta_1 \Delta_2 \frac{\partial \Delta}{\partial u_2} \right\},$$

da cui si ricava il seguente sviluppo:

$$K = -\frac{1 + 18\, a_1'}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2} (u_2 - u_1)^6 + \ldots$$

dove il primo termine non dipende solo dall' arco proiettivo ma anche da una derivata della curvatura $a$ rispetto all' arco. (L' invariante $K$ potrebbe quindi condurre all' interpretazione geometrica di tale derivata).

cui quell'invariante vale sempre *uno*), si può presumere che, sapendosi già che nello spazio le curve eccezionali sono quelle appartenenti a un complesso lineare, gli invarianti utilizzati si possano interpretare come birapporti di certi complessi lineari opportunamente scelti. Consideriamo pertanto i complessi lineari che contengono le rette osculanti nei punti $A$ e $B$: vi sono infiniti complessi lineari che soddisfano a questa condizione e formano un fascio che nel sistema locale si rappresenta analiticamente così:

$$\text{(9)} \qquad \lambda p_{14} + p_{23} = 0 \,, \qquad (p_{ik} \text{ coordinate radiali di retta}).$$

Questo fascio si può anche considerare come limite del fascio di complessi lineari contenenti le tangenti $m$ ed $n$ in $A$ e in $B$, in sieme con altre due $m'$ e $n'$ prossime a quelle, quando $m'$ ed $n'$ tendono rispettivamente ad $m$ ed $n$. Si può fissare un complesso del fascio imponendogli di contenere un' ulteriore retta. Consideriamo in particolare i due complessi $C_1$ e $C_2$ che si ottengono, nel fascio, come limiti dei complessi contenenti rispettivamente un'ulteriore tangente $m''$ o $n''$ prossima ad $m$ o ad $n$, quando $m''$ o $n''$ si fa tendere ad $m$ o, rispettivamente, ad $n$. Vale a dire, usando il linguaggio infinitesimale, consideriamo i complessi contenenti, il primo, la tangente in $A$ e altre due infinitamente vicine insieme con la tangente in $B$ e un'altra infinitamente vicina, e il secondo, la tangente in $A$ e un'altra infinitamente vicina insieme con la tangente in $B$ e altre due infinitamente vicine. Cerchiamo il valore della coordinata $\lambda$ del primo di questi due complessi. Posto negli sviluppi (2) $X=1$, la tangente $m''$ si può considerare come la retta che unisce il punto di coordinate:

$$1\,, \quad Y\,, \quad a_2 Y^2 + a_3 Y^3 + \ldots\,, \quad b Y^3 + \ldots$$

al punto (derivato) di coordinate:

$$0\,, \quad 1\,, \quad 2a_2 Y + 3a_3 Y^2 + \ldots\,, \quad 3b_3 Y^2 + \ldots\,;$$

quindi le sue coordinate $p_{14}$ e $p_{23}$ hanno i seguenti valori:

$$p_{14} = \begin{vmatrix} 1 & b_3 Y^3 + \dots \\ 0 & 3 b_3 Y^2 + \dots \end{vmatrix} = 3 b_3 Y^2 + \dots ;$$

$$p_{23} = \begin{vmatrix} Y & a_2 Y^2 + a_3 Y^3 + \dots \\ 1 & 2 a_2 Y + 3 a_3 Y^2 + \dots \end{vmatrix} = a_2 Y^2 + \dots \quad .$$

Affinchè il complesso (9) contenga questa retta si deve avere:

$$\lambda (3 b_3 Y^2 + \dots) + a_2 Y^2 + \dots = 0$$

cioè:

$$\lambda = -\frac{a_2}{3 b_3} + \dots$$

dove i termini non scritti sono almeno del 1° ordine in $Y$. Il complesso $C_1$ si ottiene facendo tendere $m''$ ad $m$, cioè $Y$ a zero, ed ha quindi la coordinata $-\frac{a_2}{3 b_3}$. Analogamente il complesso $C_2$ avrà la coordinata $-\frac{c_2}{3 d_3}$.

Accanto ai due complessi $C_1$ e $C_2$ ci occorre ancora considerare un terzo complesso $C$ del fascio (9): quello a cui appartiene la cubica sghemba passante per i punti $A$ e $B$ e avente ivi contatti del 2° ordine con la nostra curva. Per trovare la coordinata del complesso $C$ osservo che la cubica suddetta rientra fra quelle passanti per $A$ e $B$ ed aventi ivi in comune con la curva considerata la tangente e il piano osculatore, e perciò rappresentabili parametricamente nel seguente modo (nel sistema locale):

$$(10) \qquad X = \pi v^3, \quad Y = \rho v^2, \quad Z = \sigma v, \quad T = \tau \qquad (v \text{ parametro}),$$

ciascuna delle quali appartiene ad un complesso lineare di equazione:

$$p_{14} - 3 \frac{\pi \tau}{\rho \sigma} p_{23} = 0 .$$

Ora per quella, fra queste cubiche, che ha contatti del 2° ordine in $A$ e in $B$ con la nostra curva, si deve avere (4):

$$\frac{\rho\tau}{\sigma^2} = c_2, \qquad \frac{\pi\sigma}{\rho^2} = a_2,$$

da cui:

$$\frac{\pi\tau}{\rho\sigma} = a_2 c_2;$$

dunque il complesso lineare $C$, a cui essa appartiene, ha nel fascio (9) la coordinata:

$$-\frac{1}{3}\frac{\rho\sigma}{\pi\tau} = -\frac{1}{3a_2 c_2}.$$

Ora che abbiamo definiti i tre complessi $C_1$, $C_2$, $C$ e ne abbiamo calcolato le coordinate possiamo dare i significati degli invarianti $H_1$, $H_2$ ed $J$: *essi sono i birapporti formati rispettivamente dai complessi* $C_1$ e $C$, $C_2$ e $C$, $C_1$ e $C_2$, *con i due complessi speciali del loro fascio* (aventi le coordinate $\infty$ e 0). Infatti si ha:

$$\left[\infty, \; 0, \; -\frac{a_2}{3b_3}, \; -\frac{1}{3a_2c_2}\right] = \frac{b_3}{a_2^2 c_2} = H_1,$$

(4) Infatti dalle equazioni (10) si deducono le seguenti:

$$\frac{Y}{T} = \frac{\rho\tau}{\sigma^2}\left(\frac{Z}{T}\right)^2, \qquad \frac{X}{T} = \frac{\pi\tau^2}{\sigma^3}\left(\frac{Z}{T}\right)^3,$$

che per la cubica in esame devono coincidere con gli sviluppi (3) fino ai termini del 2° ordine; e quindi: $\frac{\rho\tau}{\sigma^2} = c_2$. Analogamente deducendo dalle (10) le seguenti altre:

$$\frac{Z}{X} = \frac{\pi\sigma}{\rho^2}\left(\frac{Y}{X}\right)^2, \qquad \frac{T}{X} = \frac{\pi^2\tau}{\rho^3}\left(\frac{Y}{X}\right),$$

e confrontando con gli sviluppi (2), si ottiene: $\frac{\pi\sigma}{\rho^2} = a_2$.

$$\left[\infty, \quad 0, \quad -\frac{c_2}{3d_3}, \quad -\frac{1}{3a_2c_2}\right] = \frac{d_3}{a_2c_2^2} = H_2,$$

$$\left[\infty, \quad o, \quad -\frac{a_2}{3b_3}, \quad -\frac{c_2}{3d_3}\right] = \frac{c_2b_3}{a_2d_3} = J.$$

In seguito a tale interpretazione si vede bene che le curve appartenenti a un complesso lineare, le quali sono eccezionali nei riguardi dell'arco proiettivo, sono pure eccezionali nei riguardi degli invarianti $H_1$, $H_2$, $J$, poichè per essi i tre complessi $C_1$, $C_2$, $C$, dianzi considerati, coincidono fra loro ed i tre invarianti sono costantemente uguali ad *uno.*

È poi da notare che l'invariante $J$, come si era detto, si presenta più semplice di $H_1$ e $H_2$, poichè dipende solo dai complessi $C_1$ e $C_2$ (più semplici del complesso $C$). Facendo pertanto uso dell'invariante $J$ e collegando la relazione (8) alla interpretazione geometrica ora trovata, enuncierò il seguente risultato conclusivo (sotto forma infinitesimale):

*Si considerino due punti A e B di una curva sghemba e i due complessi lineari contenenti, il primo, la tangente in A e altre due infinitamente vicine insieme con la tangente in B e un'altra infinitamente vicina, ed il secondo, la tangente in A e un'altra infinitamente vicina insieme con la tangente in B e altre due infinitamente vicine: il birapporto J che essi formano con i complessi speciali del loro fascio, quando i punti A e B sono infinitamente vicini, è legato all'arco proiettivo elementare du relativo a quei due punti, dalla seguente relazione:*

$$du^3 = 30\,(J - 1)\,.$$