

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO TONOLO

Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 4 (1933), p. 52-66

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1933__4__52_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLE ONDE SFERICHE SMORZATE E FORZATE

di ANGELO TONOLO

L'espressione analitica dell'integrale dell'equazione delle onde sferiche smorzate

$$(1) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U - k U = 0 \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

si può presentare sotto forme diverse ⁽¹⁾. In particolare siano qui menzionate la formula di WEBER, e la formula di BRILLOUIN, le quali danno rispettivamente l'espressione analitica in discorso, o sotto una forma analoga a quella assegnata da POISSON, oppure a quella data da KIRCHHOFF all'integrale dell'equazione delle onde sferiche

(1) 1 - CARVALLO, *Principe d'Huygens dans les corps isotropes*. [Comptes Rendus, Ac. Sc. T. CXX, (1895)].

2 - BIRKELAND, *Solution générale des équations de Maxwell pour un milieu absorbant homogène et isotrope*. [Ibidem, oppure; Archive de Genève, T. 34, (1895)].

3 - WEBER, *Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik*. [Edizione 1901, T. II].

4 - BRILLOUIN, *Propagation dans les milieux conducteurs*. [Comptes Rendus, Ac. Sc. T. XXXVI, (1903)].

5 - HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. [Paris, Hermann et C^{ie}. (1932)]. Nel « Livre IV, Chap. premier, § 154 » di quest'Opera, sono date due formule che si identificano con quelle di WEBER e di BRILLOUIN.

$$(2) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Delta U = 0.$$

Particolarizzando in modo conveniente una formula generale data dal TEDONE ⁽²⁾ per l'integrazione della (1), se ne ricaverebbe un'altra da considerarsi pure un'estensione di quella classica di KIRCHHOFF, e diversa dalla formula di BRILLOUIN. La formula in parola è contenuta, come caso particolare, in una più generale che io ottengo in questa Nota, cercando per l'integrale dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate

$$(3) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U - k U = X,$$

una formula di rappresentazione che sia un'estensione di quella data da BELTRAMI per l'integrale dell'equazione

$$(4) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = X.$$

Il ben noto metodo d'integrazione di VOLTERRA-TEDONE mi ha condotto dapprima a scrivere nel cronotopo una opportuna espressione analitica dell'integrale della (3). Ho poi liberato questo primo risultato dalla forma iperspaziale, mettendo in evidenza nella formula finale lo spazio fisico e il tempo.

Se σ è una superficie chiusa che limita una porzione S dello spazio ordinario, e se U è una soluzione regolare della (3), la formula in discorso assegna i valori di U nei punti interni di S e per qualsiasi valore del tempo in funzione dei valori che U e la sua derivata rispetto al tempo assumono nell'istante iniziale nello spazio S , e dei valori che U e la sua derivata normale prendono in ogni istante di tempo nei punti della superficie σ .

⁽²⁾ TEDONE, *Sull'integrazione delle equazioni a derivate parziali lineari ed a coefficienti, costanti del second'ordine*. [Rend. della R. Acc. del Lincei, serie 5^a, Vol. XXIII, (1914)].

**§ 1. Espressione analitica dell'integrale
dell'equazione (3) nel cronotopo.**

Una regione finita S dello spazio ordinario sia limitata da una superficie chiusa σ . Sia (x_1, y_1, z_1) un punto interno ad S . All'istante t_0 lo spazio S può immaginarsi come una porzione dell'iperpiano $t = t_0$ del cronotopo (x, y, z, t) . Consideriamo la varietà cilindrica a tre dimensioni che ha per direttrice la superficie σ e per generatrici le parallele all'asse t condotte dai punti σ , e la varietà conica Γ di equazione

$$t_1 - t = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = r$$

il cui vertice $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ abbia la coordinata t_1 così grande che le generatrici di Γ incontrino l'iperpiano $t = t_0$ in punti che siano tutti esterni al campo S . Indichiamo allora con Λ quella parte della varietà cilindrica che è limitata dalla sua intersezione con Γ e da σ . Per fissare le idee, si supponga che nella regione S_4 del cronotopo limitata da Γ , Λ , S sia sempre $t_1 \geq t \geq t_0$, $t_1 - t \geq r$. Da S_4 togliamo la regione racchiusa dall'ipercilindro λ di equazione

$$r = \varepsilon,$$

ove ε denota una costante che poi faremo tendere a zero, e diciamo S' e Γ' ciò che resta di S e di Γ quando venga tolta quella parte che vi stacca la varietà λ . Sia infine S'_4 quella porzione di S_4 limitata da Γ' , Λ , S' , λ , il cui complesso indichiamo con Σ .

In questo spazio S'_4 una soluzione regolare dell'equazione aggiunta della (3)

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi - k \varphi = 0$$

è

$$\varphi_1 = \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \frac{I_1(\rho)}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{k} \sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2},$$

dove $I_1(\rho)$ è la funzione di BESSEL non oscillante di primo ordine dell'argomento ρ . Indichiamo con U un integrale regolare in S_4 dell'equazione

$$(6) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U - k U = X.$$

Si ha, con ovvia applicazione del lemma di GREEN,

$$(7) \quad \int_{\Sigma} \left[\varphi_1 \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U - k U \right\} - U \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t^2} - \Delta_2 \varphi_1 - k \varphi_1 \right\} \right] dS'_4 =$$

$$= \int_{\Sigma} \left[U \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \cos nt - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos nz \right) \right\} - \right.$$

$$\left. - \varphi_1 \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \cos nt - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial U}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial U}{\partial z} \cos nz \right) \right\} \right] d\Sigma,$$

nella quale n indica la direzione della normale al contorno Σ di S'_4 volta verso l'interno di S'_4 . Sulle varietà cilindriche Λ e λ , si ha

$$\cos nt = 0,$$

mentre sull'iperpiano $t = t_0$, e quindi in particolare nello spazio S' , è

$$\cos nt = 1, \quad \cos nx = \cos ny = \cos nz = 0.$$

Sull'ipercono Γ valgono le identità

$$\varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \cos nt - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos nz \right) = 0;$$

sulla varietà λ risulta

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos nz =$$

$$= -\frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{t_1 - t}{\varepsilon^2} - k \frac{I_2(\rho)}{\rho^2} \left(\frac{t_1 - t}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon,$$

dove $I_2(\rho)$ è la funzione di BESSEL non oscillante di second' ordine dell'argomento ρ . Su Λ si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial}{\partial z} \cos nz = \frac{d}{dn}.$$

Tenendo conto di queste circostanze, la formula (7) diventa la seguente:

$$\begin{aligned} (8) \quad & \int_{S'} \left(U \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \varphi_1 \frac{\partial U}{\partial t} \right)_{t_0} dS + \int_{\Lambda} \left(\varphi_1 \frac{dU}{dn} - U \frac{d\varphi_1}{dn} \right) d\Lambda + \\ & + \int_{\lambda} \left[\varphi_1 \frac{dU}{dr} + U \left\{ \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{t_1 - t}{\varepsilon^2} + k \frac{I_2(\rho)}{\rho^2} \left(\frac{t_1 - t}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon \right\} \right] d\lambda = \\ & = \int_{S'_4} \varphi_1 X dS_4. \end{aligned}$$

Se ora indichiamo con $d\omega$ l'elemento d'ipersuperficie sferica di raggio unitario col centro nel punto P_1 , $\varepsilon^2 d\omega dt$ sarà l'elemento di varietà cilindrica λ , e pertanto passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ nella precedente (8), si trae

$$(9) \quad \frac{4\pi}{\sqrt{k}} \int_{t_0}^{t_1} U(x_1, y_1, z_1, t) I_1[\sqrt{k}(t_1 - t)] dt = \Phi_1,$$

avendo posto

$$\begin{aligned} (10) \quad \Phi_1 = & \int_S \left(\varphi_1 \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)_{t_0} dS + \int_{\Lambda} \left(U \frac{d\varphi_1}{dn} - \varphi_1 \frac{dU}{dn} \right) d\Lambda + \\ & + \int_{S_4} \varphi_1 X dS_4 \end{aligned}$$

Un procedimento eguale al precedente, assumendo come soluzione elementare della equazione (5) la funzione

$$\varphi_2 = r \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right)^2 \frac{I_2(\rho)}{\rho^2},$$

conduce alla formula

$$(11) \quad \frac{4\pi}{k} \int_{t_0}^{t_1} U(x_1, y_1, z_1, t) I_2[\sqrt{k}(t_1 - t)] dt = \Phi_2,$$

essendo

$$(12) \quad \Phi_2 = \int_S \left(\varphi_2 \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right)_{t_0} dS + \int_{\Lambda} \left(U \frac{d\varphi_2}{dn} - \varphi_2 \frac{dU}{dn} \right) d\Lambda + \\ + \int_{S_4} \varphi_2 X dS_4.$$

Derivando la (9) rispetto a t_1 , e ricordando che

$$2 \frac{dI_1(\rho)}{d\rho} = I_0(\rho) + I_2(\rho),$$

si trae

$$4\pi \int_{t_0}^{t_1} U(x_1, y_1, z_1, t) I_0[\sqrt{k}(t_1 - t)] dt = 2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} - k \Phi_2.$$

Derivando ancora rapporto a t_1 , e tenendo presente che $I_0(0) = 1$

e $\frac{dI_0(\rho)}{d\rho} = I_1$, si ricava

$$4\pi U(x_1, y_1, z_1, t_1) = -k\Phi_1 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t_1^2} - k \frac{\partial \Phi_2}{\partial t_1}.$$

Infine, se sostituiamo al posto di Φ_1 e Φ_2 le loro espressioni (10), (12), si perviene alla formula finale

$$\begin{aligned}
(13) \quad 4\pi U(x_1, y_1, z_1, t_1) = & -k \int_S \left(\varphi_1 \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)_{t_0} dS - \\
& - k \int_{\Lambda} \left(U \frac{d\varphi_1}{dn} - \varphi_1 \frac{dU}{dn} \right) d\Lambda - k \int_{S_4} \varphi_1 X dS_4 + \\
& + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_S \left(\varphi_1 \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)_{t_0} dS + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Lambda} \left(U \frac{d\varphi_1}{dn} - \varphi_1 \frac{dU}{dn} \right) d\Lambda + \\
& + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{S_4} \varphi_1 X dS - \\
& - k \frac{\partial}{\partial t_1} \int_S \left(\varphi_2 \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right)_{t_0} dS - k \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Lambda} \left(U \frac{d\varphi_2}{dn} - \varphi_2 \frac{dU}{dn} \right) d\Lambda - \\
& - k \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{S_4} \varphi_2 X dS_4.
\end{aligned}$$

§ 2. Espressione analitica dell'integrale dell'equazione (3) nello spazio ordinario.

In questo paragrafo, trasformeremo la formula (13) in modo da mettere in evidenza nel secondo membro lo spazio fisico e il tempo. A questo scopo osserviamo dapprima che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_0(\rho)}{\partial t_1} &= \frac{dI_0(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t_1} = k \frac{t_1 - t}{\rho} \frac{dI_0(\rho)}{d\rho} \\
\frac{\partial I_0(\rho)}{\partial r} &= \frac{dI_0(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = - \frac{kr}{\rho} \frac{dI_0(\rho)}{d\rho} \\
\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2} &= \frac{d^2 I_0(\rho)}{d\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_1} \right)^2 + \frac{dI_0(\rho)}{d\rho} \left[\frac{k}{\rho} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_1} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r^2} = \frac{d^2 I_0(\rho)}{d\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 - \frac{dI_0(\rho)}{d\rho} \left[\frac{k}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r \partial t_1} = \frac{d^2 I_0(\rho)}{d\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t_1} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{dI_0(\rho)}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t_1} \frac{\partial \rho}{\partial r}.$$

Quindi

$$(14) \quad \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1 \partial r} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{d^2 I_0(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dI_0(\rho)}{d\rho} \right).$$

Ne segue che possiamo scrivere

$$(15) \quad \varphi_1 = \frac{1}{kr} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r} \right) I_0(\rho)$$

$$(16) \quad \varphi_2 = \frac{1}{k^2 r} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 I_0(\rho),$$

perchè, avendosi

$$\varphi_2 = \frac{1}{k^2 r} \left(k \frac{t_1 - t}{\rho} - k \frac{r}{\rho} \right)^2 I_2(\rho),$$

$$\frac{2}{\rho} I_2(\rho) = \frac{d}{d\rho} \left[\frac{2}{\rho} I_1 \right] = 2 \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{dI_0(\rho)}{d\rho} \right],$$

risulta

$$\varphi_2 = \frac{1}{k^2 r} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{d^2 I_0(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dI_0(\rho)}{d\rho} \right),$$

e quindi la (16) in forza della (14).

Infine, ricordiamo che sussiste l'identità

$$(17) \quad \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2} + k I_0(\rho) \equiv 0.$$

Poniamo :

$$A = \int_S \left\{ -k \left(\varphi_1 \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \left(\varphi_1 \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) - \right. \\ \left. - k \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\varphi_2 \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) \right\}_{t_0} dS,$$

e osserviamo che $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}$ ($i = 1, 2$).

Quindi

$$A = \int_S \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \left(-k \varphi_1 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} - k \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \right) + \right. \\ \left. + U \frac{\partial}{\partial t_1} \left(-k \varphi_1 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} - k \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \right) \right\}_{t_0} dS.$$

Abbiamo successivamente :

$$\begin{aligned} -k \varphi_1 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} - k \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} &= \frac{1}{r} \left\{ - \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r} \right) I_0(\rho) + \right. \\ &+ \frac{2}{k} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2} - \frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial I_0(\rho)}{\partial t_1} \left. \right\} = \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(-I_0(\rho) + \frac{1}{k} \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r \partial t_1} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{rk} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r \partial t_1} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{rk} \left(\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r \partial t_1^2} \right). \end{aligned}$$

E infine si trae la relazione

$$-k\varphi_1 + 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t_1^2} - k\varphi_2 = -\frac{1}{r}\frac{\partial I_0(\rho)}{\partial r},$$

oppure la seguente

$$(18) \quad -k\varphi_1 + 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t_1^2} - k\varphi_2 = k\frac{I_1(\rho)}{\rho},$$

perchè

$$(19) \quad \frac{\partial I_0(\rho)}{\partial r} = -\frac{dI_0(\rho)}{d\rho}k\frac{r}{\rho} = -kr\frac{I_1(\rho)}{\rho}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$(a) \quad A = k \int_S \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \frac{I_1(\rho)}{\rho} + U \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{I_1(\rho)}{\rho} \right) \right\}_{t_0} dS.$$

Poniamo

$$B = k \int_{\Lambda} \left(\varphi_1 \frac{dU}{dn} - U \frac{d\varphi_1}{dn} \right) d\Lambda - 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Lambda} \left(\varphi_1 \frac{dU}{dn} - U \frac{d\varphi_1}{dn} \right) d\Lambda +$$

$$+ k \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Lambda} \left(\varphi_2 \frac{dU}{dn} - U \frac{d\varphi_2}{dn} \right) d\Lambda.$$

Se si osserva che sull'intersezione di Γ con Λ si ha $\frac{t_1-t}{r}-1=0$,
 donde $t = t_1 - r$, si può scrivere

$$B = k \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \left(\varphi_1 \frac{dU}{dn} - U \frac{d\varphi_1}{dn} \right) dt - 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \left(\varphi_1 \frac{dU}{dn} - U \frac{d\varphi_1}{dn} \right) dt +$$

$$+ k \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \left(\varphi_2 \frac{dU}{dn} - U \frac{d\varphi_2}{dn} \right) dt.$$

Tenendo presente che $\left[\varphi_i \right]_{t_1-r} = 0$, si ha, eseguendo una prima derivazione,

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \varphi_i \frac{dU}{dn} dt = \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \frac{dU}{dn} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1} dt. \quad (i = 1, 2)$$

Se poi osserviamo che, avendosi

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} = \frac{1}{r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} + k(t_1 - t) \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \frac{I_2(\rho)}{\rho^2},$$

risulta

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \right]_{t_1-r} = \frac{1}{2r},$$

perchè

$$\left[\frac{I_1(\rho)}{\rho} \right]_{\rho=0} = \frac{1}{2}, \quad \left[\frac{I_2(\rho)}{\rho^2} \right]_{\rho=0} = \frac{1}{8},$$

si ha, con una seconda derivazione,

$$(21) \quad \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \varphi_1 \frac{dU}{dn} dt = \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \frac{dU}{dn} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{\sigma} \left[\frac{dU}{dn} \right]_{t_1-r} \frac{d\sigma}{r}.$$

Tenendo conto che

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right]_{t_1-r} = -\frac{1}{2r}, \quad \frac{d\varphi_i}{dn} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dn}, \quad (i = 1, 2)$$

si ottiene

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} d\sigma \frac{dr}{dn} \int_{t_0}^{t_1-r} U \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} dt = \int_{\sigma} d\sigma \frac{dr}{dn} \int_{t_0}^{t_1-r} U \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1 \partial r} dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{\sigma} U(t_1-r) \frac{dr}{dn} \frac{d\sigma}{r},$$

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} d\sigma \frac{dr}{dn} \int_{t_0}^{t_1-r} U \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} dt = \int_{\sigma} d\sigma \frac{dr}{dn} \int_{t_0}^{t_1-r} U \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t_1 \partial r} dt + \\ + \int_{\sigma} \left[U \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right]_{t_1-r} \frac{dr}{dn} d\sigma,$$

$$(24) \quad \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\sigma} d\sigma \frac{dr}{dn} \int_{t_0}^{t_1-r} U \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} dt = \int_{\sigma} d\sigma \frac{dr}{dn} \int_{t_0}^{t_1-r} U \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2 \partial r} dt + \\ + \int_{\sigma} \left[U \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1 \partial r} \right]_{t_1-r} \frac{dr}{dn} d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\sigma} \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_{t_1-r} \frac{dr}{dn} \frac{d\sigma}{r}.$$

In forza delle relazioni (20), (21), (22), (23), (24) si può scrivere

$$B = \int_{\sigma} d\sigma \left[\int_{t_0}^{t_1-r} \frac{dU}{dn} \left\{ k \varphi_1 - 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + k \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \right\} dt + \right. \\ \left. + \frac{dr}{dn} \int_{t_0}^{t_1-r} U \frac{\partial}{\partial r} \left\{ -k \varphi_1 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} - k \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \right\} dt \right] + \\ + \int_{\sigma} \left[-\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} + U \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} - k \varphi_2 \right\} \frac{dr}{dn} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{dr}{dn} \right]_{t_1-r} d\sigma.$$

Si noti che

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} - k \varphi_2 &= \frac{2}{kr} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial I_0(\rho)}{\partial t_1} - \\ &- \frac{1}{kr} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 I_0(\rho) = \\ &= \frac{1}{kr} \left(\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r^2} \right) = \frac{I_0(\rho)}{r}. \end{aligned}$$

E quindi

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} - k \varphi_2 \right\} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{I_0(\rho)}{\partial r} = -k \frac{I_1(\rho)}{\rho} - \frac{I_0(\rho)}{r^2}.$$

Abbiamo pertanto

$$(25) \quad \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} - k \varphi_2 \right\} \right]_{t_1-r} = - \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{r^2} \right).$$

Tenendo allora conto di questa relazione e della (18) si ottiene in definitiva

$$\begin{aligned} (b) \quad B &= k \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \left\{ U \frac{d}{dn} \left(\frac{I_1(\rho)}{\rho} \right) - \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{dU}{dn} \right\} dt - \\ &- \frac{k}{2} \int_{\sigma} U(t_1-r) \frac{dr}{dn} d\sigma - \\ &- \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \frac{\partial U}{\partial t} \right]_{t_1-r} d\sigma. \end{aligned}$$

Poniamo infine :

$$C = -k \int_{S_4} \varphi_1 X dS_4 + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{S_4} \varphi_1 X dS_4 - k \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{S_4} \varphi_2 X dS_4.$$

Si può scrivere

$$C = \int_S dS \int_{t_0}^{t_1-r} X \left\{ -k \varphi_1 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} - k \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \right\} dt + \\ + \int_S \frac{X(t_1-r)}{r} dS,$$

perchè

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_S dS \int_{t_0}^{t_1-r} X \varphi_2 dt = \int_S dS \int_{t_0}^{t_1-r} X \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} dt, \\ \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_S dS \int_{t_0}^{t_1-r} X \varphi_1 dt = \int_S dS \int_{t_0}^{t_1-r} X \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} dt + \frac{1}{2} \int_S \frac{X(t_1-r)}{r} dS.$$

In virtù della relazione (18) si ha allora

$$(c) \quad C = k \int_S dS \int_{t_0}^{t_1-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} X dt + \int_S \frac{X(t_1-r)}{r} dS.$$

Surrogando le (a), (b), (c) nella formula (13) si trae l'espressione analitica dell'integrale U sotto la forma definitiva

$$4\pi U(x_1, y_1, z_1, t_1) = k \int_S \left[U \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{I_1(\rho)}{\rho} \right) + \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{dU}{dt} \right]_{t_0} dS +$$

$$\begin{aligned}
& + k \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \left[U \frac{d}{dn} \left(\frac{I_1(\rho)}{\rho} \right) - \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{dU}{dn} \right] dt - \\
& \quad - \frac{k}{2} \int_{\sigma} U(t_1-r) \frac{dr}{dn} d\sigma - \\
& - \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \frac{\partial U}{\partial t} \right]_{t_1-r} d\sigma + \\
& + k \int_{\tilde{S}} dS \int_{t_0}^{t_1-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} X dt + \int_{\tilde{S}} \frac{X(t_1-r)}{r} dS.
\end{aligned}$$
