

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

Generazione proiettiva della varietà minima M_{2n} che rappresenta le n -ple non ordinate di punti di un piano

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 6 (1935), p. 111-120

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__111_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GENERAZIONE PROIETTIVA DELLA VARIETÀ MINIMA M_{2n} CHE RAPPRESENTA LE n -ple NON ORDINATE DI PUNTI DI UN PIANO

di UGO MORIN a Padova

§ 1. - Richiami e considerazioni introduttive ⁽¹⁾.

1. Data nel piano proiettivo π una generica curva involuppo di classe n , di equazione

$$(1) \quad \Sigma \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_n} = 0,$$

(la sommatoria essendo estesa alle diverse combinazioni con ripetizione $(i_1 i_2 \dots i_n)$ degli indici 1, 2, 3), si assumano i coefficienti come coordinate di punto $\rho X_{i_1 i_2 \dots i_n} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ di uno spazio lineare S_N , $N = \frac{n(n+3)}{2}$.

Alle n -ple non ordinate di punti del piano π , concepite come involuppi di classe n , corrispondono allora i punti di una varietà M_{2n} , che rappresenta *senza eccezioni* quelle n -ple.

Questo modello proiettivo della varietà delle n -ple non ordinate dei punti del piano è di ordine minimo, tra tutti gli altri modelli proiettivi su cui la rappresentazione si compie senza eccezioni; ed è inoltre normale nell' S_N . Perciò va chiamato,

(1) Gli argomenti dei n. 1-5 sono tratti dalla Memoria di G. BORDIGA, *Sul modello minimo della varietà delle n -ple non ordinate dei punti di un piano* [Annali di Matematica, vol. XXVII (III), (1918), pagg. 1-40]; e perciò esposti senza dimostrazione.

a norma di un concetto posto dal SEVERI⁽²⁾, varietà *minima* che rappresenta le dette n -ple.

Si può dare della M_{2n} la seguente rappresentazione parametrica

$$(2) \quad \rho X_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Sigma x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_n}^{(n)}$$

dove $x_i^{(r)}$ ($i = 1, 2, 3$) sono le coordinate di uno dei punti della n -pla del piano π , P_r ($r = 1, 2, \dots, n$), e la sommatoria va estesa alle diverse permutazioni distinte della combinazione $(i_1 i_2 \dots i_n)$ degli indici $(1, 2, 3)$.

2. All'insieme delle n -ple di punti del piano π , definite da un gruppo di $n - 1$ punti fissi P_1, P_2, \dots, P_{n-1} e da un punto P variabile in tutto π , corrisponde dentro alla M_{2n} un piano Γ . Il gruppo degli $n - 1$ punti fissi di π diremo *gruppo base* di Γ .

Per un punto generico A della M_{2n} passano n piani Γ , quelli i cui gruppi base si ottengono sopprimendo dall' n -pla di π , di cui A è imagine, uno dei punti.

3. Ai punti di π , interpretati come n -ple di punti coincidenti, corrisponde in S_N una superficie Φ , rappresentata su π dal sistema lineare di tutte le curve di ordine n del piano. La Φ appartiene dunque all' S_N ed è di ordine n^2 .

Lo spazio d'appartenenza della varietà M_{2i} di M_{2n} , che rappresenta le n -ple costituite da un punto P come $(n - i)$ -plo e da altri i punti qualunque, è lo spazio $S_{\frac{i(i+3)}{2}}$, i -osculatore alla Φ nel punto A che rappresenta l' n -pla dei punti coincidenti in P ; e la M_{2i} è l'intersezione completa della M_{2n} con quello spazio osculatore.

4. Presi due punti P_1 e P_2 e i punti A_1 e A_2 della Φ ad essi corrispondenti, i due spazi osculatori alla Φ in questi punti,

(2) F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazii subordinati S_k di data dimensione immersi in uno spaziao lineare S_n* [Annali di Matematica, XXIV (III), (1915), pagg. 89-121].

di dimensione massima $m = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$, $S_m^{(1)}$ ed $S_m^{(2)}$ (che in seguito chiameremo spazi osculatori massimi), hanno in comune lo spazio di dimensione $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, che contiene la varietà $M_{2(n-2)}$, immagine delle n -ple di π coi punti fissi P_1 e P_2 . Poichè $2m - \frac{(n-2)(n+1)}{2} = N - 1$, possiamo anche dire che due spazi osculatori alla Φ massimi appartengono ad un iperpiano.

Per un punto generico A della M_{2n} passano n spazi osculatori massimi S_n , cioè quelli che contengono le immagini delle n -ple che hanno in comune *uno* dei punti della n -pla, di cui A è l'immagine.

5. Consideriamo, tra gli spazi osculatori, il piano τ_1 tangente alla Φ nel punto A_1 , immagine delle n -ple dei punti del piano che hanno il punto P_1 come $(n-1)$ -plo (n. 3, 4). Questo è pure un *particolare* piano del tipo Γ (n. 2), relativamente al gruppo base dato dal punto $(n-1)$ -plo P_1 . Lo spazio osculatore massimo $S_m^{(2)}$ (n. 4) e τ_1 hanno uno ed un sol punto in comune, cioè l'immagine della n -pla formata dal punto $(n-1)$ -plo P_1 e dal punto P_2 ; a meno che P_2 non coincida con P_1 , nel qual caso τ_1 appartiene all' $S_m^{(2)}$.

Gli S_m osculatori alla Φ punteggiano dunque i suoi piani tangenti, generando tra due di questi, come è facile verificare (n. 6), una corrispondenza omografica.

Se si volesse costruire direttamente ⁽³⁾ l'insieme degli spazi S_m osculatori alla Φ , in base alla proprietà ora segnalata, non si potrebbero scegliere ad arbitrio $m+1 = N-n$ piani e stabilire ad arbitrio delle corrispondenze omografiche tra questi, ma sia tra i piani che tra le omografie dovrebbero intercedere opportune dipendenze. La natura di queste dipendenze, soprattutto per ciò che riguarda l'insieme degli $N-n$ piani, mi sembra notevolmente complessa.

⁽³⁾ Problema posto da G. BORDIGA, loco cit. ⁽⁴⁾.

Perciò ho cercato di giungere alla costruzione proiettiva dell'insieme degli spazi osculatori alla Φ , e quindi, come vedremo in seguito (n. 7), della M_{2n} stessa, modificando leggermente la precedente impostazione del problema. A tale scopo, mi giova aggiungere a questi richiami qualche osservazione.

6. Fra il piano Γ della M_{2n} relativo ad un gruppo base (P_1, \dots, P_{n-1}) , (n. 2), ed il piano π intercede una corrispondenza biunivoca senza eccezioni: ad ogni punto P di π (che costituisce assieme al gruppo base un' n -pla) corrispondendo un determinato punto di Γ , e viceversa. Questa corrispondenza tra π e Γ , manifestamente algebrica, biunivoca senza eccezioni sarà dunque un' omografia.

Variando il gruppo base, si ottiene un altro piano Γ' della M_{2n} ; e assumendo come corrispondenti due punti A e A' di Γ e Γ' che siano riferiti, nel modo predetto, allo stesso punto P di π , si ottiene una corrispondenza omografica tra i due piani. Due punti corrispondenti in questa omografia, in quanto rappresentano due n -ple di π che hanno in comune un punto P , appartengono allo stesso spazio osculatore massimo alla Φ , S_m , relativo al punto P (n. 3). Dunque:

Gli S_m osculatori alla Φ punteggiano collinearmente i piani Γ della M_{2n} (in particolare i piani tangenti τ alla Φ (n. 5)).

7. Poichè il piano π è omografico ad un piano Γ , possiamo addirittura identificarlo con uno di questi piani.

Presi allora in π ($\equiv \Gamma$) n punti generici, P_1, P_2, \dots, P_n , possiamo considerare gli spazi osculatori massimi $S_m^{(r)}$ ($r=1, 2, \dots, n$), non appartenenti a Γ (n. 4), ai quali quei punti rispettivamente appartengono. Questi spazi avranno in comune un punto (ed uno solo (n. 3)), cioè l'immagine della n -pla di π considerata.

Otteniamo così una costruzione proiettiva della M_{2n} mediante un suo piano Γ e l'insieme degli spazi osculatori massimi alla Φ .

8. Prendiamo in π $n+1$ punti generici P_0, P_1, \dots, P_n e consideriamo gli $n+1$ punti della M_{2n} , B_r ($r=0, 1, \dots, n$),

immagini delle n -ple che si ottengono sopprimendo, da quel gruppo di $n + 1$ punti, un punto P_r ($r = 0, 1, \dots, n$). Dico che *questi $n + 1$ punti B_r dell' S_N sono linearmente indipendenti.*

Infatti, uno qualunque di essi, ad esempio B_n , non può dipendere linearmente dai rimanenti B_0, B_1, \dots, B_{n-1} . Invero, i punti B_0, B_1, \dots, B_{n-1} , che sono immagini di n -ple che hanno in comune il punto P_n , appartengono allo spazio S_m (n. 4), osculatore alla Φ nel punto A_n , immagine di P_n interpretato come n -pla di punti coincidenti. E poichè l'intersezione *completa* di questo spazio S_m con la M_{2n} è la $M_{2(n-1)}$ che rappresenta le n -ple col punto comune P_n (n. 3), questo spazio non può contenere il punto B_n .

Prendiamo ora in π $n + 2$ punti generici $P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1}$ e consideriamo gli $\binom{n+2}{2} = N + 1$ punti dell' S_N immagini delle n -ple che si ottengono sopprimendo da quel gruppo di $n + 2$ punti, due qualunque. Dico che *questi $N + 1$ punti sono linearmente indipendenti.*

Di questa proprietà daremo una dimostrazione ricorrente. Intanto essa è vera per $n = 1$, perchè in tal caso l' S_N ($N = 2$), si può far coincidere col piano π stesso.

Verifichiamo dunque che, ove la proprietà sia valida fino ad un valore $n - 1$, è di conseguenza valida per il valore n .

Infatti, consideriamo dapprima tra le n -ple che si possono formare, nel modo predetto, coi punti $P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1}$, quelle che hanno in comune il punto P_{n+1} . Le loro immagini sono punti della $M_{2(n-1)}$, intersezione completa della M_{2n} con lo spazio osculatore S_m alla Φ nel punto A_{n+1} (n. 3); e questi punti della $M_{2(n-1)}$, in quanto immagini dei gruppi di $n - 1$ punti che si ottengono sopprimendo da P_0, P_1, \dots, P_n due punti qualunque, sono, in base all'ipotesi, linearmente indipendenti.

Rimangono da considerare le n -ple che *non* contengono il punto P_{n+1} , le cui immagini, come abbiamo precedentemente dimostrato, sono $n + 1$ punti linearmente indipendenti, che individuano dunque uno spazio lineare S_n .

Infine dobbiamo verificare, per poter concludere che tutti i punti dell' S_N così ottenuti sono nel loro insieme linearmente

indipendenti, che gli spazi S_m ed S_n ora considerati, non hanno alcun punto in comune.

Infatti, se esistesse un tale punto A , questi sarebbe l'immagine di una curva involuppo di classe n del piano π (n. 1), appartenente simultaneamente ai sistemi lineari di curve involuppo di classe n , di cui gli spazi S_m ed S_n sono immagini. Ora ciò non è possibile.

Invero, di ogni curva involuppo del sistema lineare di immagine S_m , poichè questi è individuato da $m + 1$ curve involuppo (degeneri) che hanno in comune il fascio di raggi di centro P_{n+1} , fa parte questo fascio di raggi. Per una curva generica del sistema lineare di curve involuppo di immagine S_n , si può invece osservare che ad essa appartengono tutte le rette che congiungono a due a due i punti P_0, P_1, \dots, P_n ; perchè queste rette appartengono a ciascuna delle $n + 1$ curve involuppo (degeneri) che individuano il sistema lineare.

Dunque della curva involuppo di classe n , che ha per immagine il punto A (cioè comune ai due sistemi lineari), dovrebbero far parte non solo le n rette che congiungono il punto P_0 coi punti P_1, \dots, P_n , ma anche la retta $P_0 P_{n+1}$, in quanto raggio del fascio di centro P_{n+1} . Ma allora tutte le rette per P_0 dovrebbero far parte della curva involuppo di classe n , che si scinderebbe (ragionando analogamente per gli altri punti P_r) in $n + 1$ fasci di raggi, ciò che è assurdo.

§ 2. - Costruzione proiettiva diretta della M_{2n} .

9. Per costruire direttamente una varietà M_{2n} procederemo nel seguente modo. Introduciamo in uno spazio lineare S_N , e in modo opportuno (n. 10), $N - n = m + 1$ piani; e stabiliremo, pure in modo opportuno (n. 11), delle omografie tra questi. I gruppi di $m + 1$ punti, corrispondenti in queste omografie, individuano un insieme di ∞^2 spazi lineari S_m immersi nell' S_N . Infine faremo vedere che questi spazi S_m sono spazi osculatori di una superficie Φ di una M_{2n} , e che i piani da cui siamo partiti ne sono piani del tipo Γ (n. 12). Dunque con la costru-

zione che veniamo ad esporre, e secondo la conclusione del n. 7, daremo una generazione proiettiva della M_{2n} .

Nella esposizione, unicamente allo scopo di semplificare il linguaggio, riferiremo i vari elementi che si introducono direttamente alla M_{2n} che andiamo a costruire, come se questa astrattamente già esistesse.

10. Prendiamo un gruppo G di $n + 1$ punti generici del piano π , P_0, P_1, \dots, P_n . Se escludiamo uno di essi, P_j , otteniamo un' n -pla, cui facciamo corrispondere il vertice A_j ($j = 0, 1, \dots, n$) di una piramide fondamentale di uno spazio lineare S_N ($N = \frac{n(n+3)}{2}$).

Il vertice A_j , in quanto potrà essere considerato appartenente allo spazio osculatore $S_m^{(k)}$, relativo ad un punto P_k della n -pla di imagine A_j (n. 3), verrà indicato con $A_{j,k}$. In questa scrittura, l'indice k può dunque assumere tutti gli n valori da 0 ad n distinti da j , con che non cambia il punto dell' S_N da essa rappresentato, ma unicamente lo spazio osculatore alla Φ , $S_m^{(k)}$, cui lo immaginiamo riferito.

Se escludiamo da G due punti (P_j, P_k), otteniamo un gruppo di $n - 1$ punti cui, pensato come gruppo base (n. 2) delle n -ple che hanno quegli $n - 1$ punti fissi, facciamo corrispondere la faccia piana Γ_{jk}^* della piramide fondamentale dell' S_N , determinata dai vertici A_j, A_k e da un vertice prescelto A_r ($r > n$). Poichè i piani Γ_{jk} sono in numero di $\binom{n+1}{2}$ ed è $\binom{n+1}{2} = N - n$, si potrà far sì che ogni vertice A_r ($r > n$) appartenga ad una faccia Γ_{jk} , e ad una soltanto.

Il punto dell' S_N che faremo corrispondere alla n -pla col punto doppio P_i , che si ottiene escludendo da G i vertici P_j e P_k , verrà indicato con $A_{jk,i}$. Questo punto dovrà appartenere al piano Γ_{jk} e allo spazio osculatore (da determinarsi) $S_m^{(i)}$ ($i \neq j, k$). La posizione dei diversi punti $A_{jk,i}$ verrà precisata successivamente.

Sia in $A_{j,i}$, che in $A_{jk,i}$, l'indice dopo la virgola è stato

scelto in modo che punti con lo stesso indice appartengano allo stesso spazio osculatore $S_m^{(6)}$; e quindi si corrispondano nelle omografie da determinarsi tra i piani Γ_{jk} .

11. Fissiamo nell' S_N un iperpiano generico, S_{N-1} . Questi taglierà i nostri piani Γ_{jk} rispettivamente in $\binom{n+1}{2}$ rette r_{jk} (ciascuna indipendente dai punti A_j e A_k già fissati entro al rispettivo piano). Due tali rette si assumeranno in ogni caso come corrispondenti nelle omografie che ora veniamo a determinare entro ai rispettivi piani Γ_{jk} .

Ordiniamo i piani Γ_{jk} in un modo qualunque e sia, ad es., Γ_{01} il primo di essi. Poniamo un' omografia non degenera tra i piani π e Γ_{01} , in cui ai punti P_0, P_1, \dots, P_n corrispondano ordinatamente i punti

$$(3) \quad A_{1,0}, A_{0,1}, A_{01,2}, \dots, A_{01,n},$$

di modo che i punti $A_{01,2}, \dots, A_{01,n}$ vengono determinati da questa omografia. Ai punti A_0, A_1 , già fissati su Γ_{01} (n. 10), è stato attribuito il secondo indice secondo il criterio con cui chiude il n. 10.

Per l' omografia da stabilirsi tra Γ_{01} ed il piano successivo, sia Γ_{jk} , sono già determinati in Γ_{jk} tre elementi, corrispondenti di elementi di Γ_{01} : cioè la retta r_{jk} ed i punti $A_{k,j}$ e $A_{j,k}$ (n. 10). Orbene, fissiamo in Γ_{jk} genericamente un punto $A_{jk,t}$, da scegliersi come omologo di $A_{01,t}$. Così è determinata l' omografia tra i piani Γ_{01} e Γ_{jk} , ed essa determina in Γ_{jk} tutti i punti omologhi dei punti (3),

$$(4) \quad A_{jk,0}, A_{jk,1}, \dots, A_{k,j}, \dots, A_{j,k}, \dots, A_{jk,n}.$$

Per stabilire l' omografia tra Γ_{jk} ed il piano successivo, ci si trova nella identica situazione che si aveva da Γ_{01} a Γ_{jk} . Si proceda dunque in modo analogo, fino ad aver determinata l' omografia tra gli ultimi due piani.

Congiungendo con spazi S_m i gruppi di $\binom{n+1}{2} = m+1$

punti corrispondenti nelle omografie ora stabilite tra i piani Γ_{jk} , si ottiene un sistema di ∞^2 spazi S_m . Può questi considerarsi come generatore (n. 7) di una M_{2n} ?

12. Per rispondere in senso affermativo alla domanda ora posta, consideriamo in uno spazio lineare S'_N la varietà M'_{2n} (n. 1), e gli elementi Γ'_{jk} , A'_j , $A'_{jk,i}$ corrispondenti, nel riferimento a π , degli elementi Γ_{jk} , A_j , $A_{jk,i}$ dell' S_N .

Gli $\binom{n+1}{2}$ piani Γ'_{ik} appartengono allo spazio S'_N e non ad uno spazio di dimensione minore. Infatti, ove si aggiunga a G (n. 10) un punto generico P_{n+1} di π , alle n -ple che si possono estrarre dal gruppo di $n+2$ punti così ottenuti, corrispondono $N+1$ punti linearmente indipendenti dell' S'_N (n. 8); e ciascuno di questi punti appartiene ad almeno un piano Γ'_{jk} .

Da ciò segue che gli $n+1$ punti A'_j ($j=0, 1, \dots, n$) e per ciascun piano Γ'_{jk} il punto $A'_{jk,i}$ associato a quel punto $A_{jk,i}$ di Γ_{jk} che si è fissato per determinare l'omografia rispetto al piano precedente (n. 8) (tranne nel piano Γ'_{01} ove si prenderà ad es. il punto $A'_{01,2}$), costituiscono in tutto $N+1$ punti linearmente indipendenti dell' S'_N .

Scegliamo inoltre nel piano Γ'_{01} una retta generica r'_{01} e consideriamo tutte le rette r'_{jk} ad essa corrispondenti nelle omografie che intercedono tra Γ'_{01} e i diversi piani Γ'_{jk} (n. 5). Queste rette appartengono ad un medesimo iperpiano S'_{N-1} , individuato da due spazi osculatori massimi S'_m e S''_m (n. 4), che passino rispettivamente per due punti della r'_{01} .

Possiamo ora determinare un'omografia Ω tra gli spazi S'_N ed S_N , facendo corrispondere agli $N+1$ punti linearmente indipendenti dell' S'_N su precisati, A'_j e $A'_{jk,i}$, i punti A_j e $A_{jk,i}$ dell' S_N , e all' iperpiano S'_{N-1} ora introdotto, l' iperpiano S_{N-1} intervenuto nella costruzione delle omografie tra i Γ_{jk} (n. 11).

Questa omografia Ω muta non solo l'insieme dei piani Γ'_{jk} della M'_{2n} nell'insieme dei piani Γ_{jk} da noi direttamente costruito, ma trasforma anche (come è facile rilevare) l'omografia fra due piani Γ'_{jk} nell'omografia da noi direttamente determinata tra i corrispondenti piani Γ_{jk} . L'insieme degli spazi S_m costruito al n. 11 è dunque effettivamente, in quanto trasformato omografico

dell'insieme degli S'_m osculatori della Φ' della M'_{2n} , costruttore (n. 7) di una varietà M_{2n} .

È noto (*) che due varietà minime, M_{2n} e M'_{2n} , sono proiettivamente equivalenti. Questo fatto è risultato qui direttamente, dall'aver costruita un'omografia Ω che trasforma la M'_{2n} nella M_{2n} .

13. Applichiamo la costruzione della M_{2n} ai casi più semplici di $n = 2$ ed $n = 3$. Per $n = 2$ si trova una costruzione proiettiva dell'insieme dei piani tangenti ad una superficie di VERONESE già segnalata (5).

Per $n = 3$, fissati in un S_9 i punti A_0, A_1, A_2, A_3 ed i piani $\Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{03}, \Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}$ secondo gli ovvi criteri del n. 10, si determinino su questi piani le rette r_{jk} , segandoli con un iperpiano generico S_8 dell' S_9 , rette che si considereranno come corrispondenti nelle omografie da determinarsi entro a questi piani (n. 11). In queste omografie si corrispondano i punti che figurano in una medesima colonna della seguente tabella

Γ_{01}	$A_{1,0}$	$A_{0,1}$	$A_{01,2}$	$A_{01,3}$
Γ_{02}	$A_{2,0}$	$A_{02,1}$	$A_{0,2}$	$A_{02,3}$
Γ_{03}	$A_{3,0}$	$A_{03,1}$	$A_{03,2}$	$A_{0,3}$
Γ_{12}	$A_{12,0}$	$A_{2,1}$	$A_{1,2}$	$A_{12,3}$
Γ_{13}	$A_{13,0}$	$A_{3,1}$	$A_{13,2}$	$A_{1,3}$
Γ_{23}	$A_{23,0}$	$A_{23,1}$	$A_{3,2}$	$A_{2,3}$

e tenuto conto che mentre i punti a due indici sono già conosciuti (poichè trascurato il secondo indice si tratta dei punti A_0, A_1, A_2, A_3 (n. 10)), dei punti a tre indici di ciascuna riga si scelga, entro al rispettivo piano, genericamente uno, gli altri risultando individuati dall'omografia così determinata rispetto al piano precedente; tranne per il piano Γ_{01} i cui punti, essendo quattro soltanto, potranno essere presi genericamente.

(*) G. BORDIGA, loco cil. (1).

(5) U. MORIN, *Sui sistemi di piani a due a due incidenti* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Atti, t. 89 (1929-30). pag. 907-26].