RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

Generazione proiettiva della varietà minima M_{2n} che rappresenta le n-ple non ordinate di punti di un piano

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 6 (1935), p. 111-120

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__111_0>

GENERAZIONE PROIETTIVA DELLA VARIETÀ MINIMA M_{2n} CHE RAPPRESENTA LE n-ple NON ORDINATE DI PUNTI DI UN PIANO

di UGO MORIN *a Padova*

§ 1. - Richiami e considerazioni introduttive (¹).

1. Data nel piano proiettivo π una generica curva inviluppo di classe n, di equazione

$$\Sigma \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \xi_{i_n} = 0 , \tag{1}$$

(la sommatoria essendo estesa alle diverse combinazioni con ripetizione $(i_1 i_2 \dots i_n)$ degli indici 1, 2, 3), si assumano i coefficienti come coordinate di punto $\rho X_{i_1 i_2 \dots i_n} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ di uno spazio lineare S_N, $N = \dfrac{n(n+3)}{2}$.

Alle n-ple non ordinate di punti del piano π, concepite come inviluppi di classe n, corrispondono allora i punti di una varietà M_{2n}, che rappresenta *senza eccezioni* quelle n-ple.

Questo modello proiettivo della varietà delle n-ple non ordinate dei punti del piano è di ordine minimo, tra tutti gli altri modelli proiettivi su cui la rappresentazione si compie senza eccezioni; ed è inoltre normale nell' S_N. Perciò va chiamato,

(¹) Gli argomenti dei n. 1-5 sono tratti dalla Memoria di G. BORDIGA, *Sul modello minimo della varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un piano* [Annali di Matematica, vol. XXVII (III), (1918), pagg. 1–40]; e perciò esposti senza dimostrazione.

a norma di un concetto posto dal SEVERI [2], varietà *minima* che rappresenta le dette n-ple.

Si può dare della M_{2n} la seguente rappresentazione parametrica

$$(2) \qquad \rho X_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Sigma x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_n}^{(n)}$$

dove $x_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, 3)$ sono le coordinate di uno dei punti della n-pla del piano π, P_r $(r = 1, 2, \dots n)$, e la sommatoria va estesa alle diverse permutazioni distinte della combinazione $(i_1 i_2 \dots i_n)$ degli indici (1, 2, 3).

2. All' insieme delle n-ple di punti del piano π, definite da un gruppo di $n-1$ punti fissi P_1, $P_2, \dots$ P_{n-1} e da un punto P variabile in tutto π, corrisponde dentro alla M_{2n} un piano Γ. Il gruppo degli $n-1$ punti fissi di π diremo *gruppo base* di Γ.

Per un punto generico A della M_{2n} passano n piani Γ, quelli i cui gruppi base si ottengono sopprimendo dall' n-pla di π, di cui A è imagine, uno dei punti.

3. Ai punti di π, interpretati come n-ple di punti coincidenti, corrisponde in S_N una superficie Φ, rappresentata su π dal sistema lineare di tutte le curve di ordine n del piano. La Φ appartiene dunque all' S_N ad è di ordine n^2.

Lo spazio d' appartenenza della varietà M_{2i} di M_{2n}, che rappresenta le n-ple costituite da un punto P come $(n-i)$-plo e da altri i punti qualunque, è lo spazio $S_{\frac{i(i+3)}{2}}$, i-osculatore alla Φ nel punto A che rappresenta l' n-pla dei punti coincidenti in P; e la M_{2i} è l' intersezione completa della M_{2n} con quello spazio osculatore.

4. Presi due punti P_1 e P_2 e i punti A_1 e A_2 della Φ ad essi corrispondenti, i due spazi osculatori alla Φ in questi punti,

[2] F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati S_k di data dimensione immersi in uno spazio lineare S_n* [Annali di Matematica, XXIV (III), (1915), pagg. 89-121].

di dimensione massima $m = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$, $S_m^{(1)}$ ed $S_m^{(2)}$ (che in seguito chiameremo spazi osculatori massimi), hanno in comune lo spazio di dimensione $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, che contiene la varietà $M_{2(n-2)}$, imagine delle n-ple di π coi punti fissi P_1 e P_2. Poichè $2m - \frac{(n-2)(n+1)}{2} = N - 1$, possiamo anche dire che due spazi osculatori alla Φ massimi appartengono ad un iperpiano.

Per un punto generico A della M_{2n} passano n spazi osculatori massimi S_n, cioè quelli che contengono le imagini delle n-ple che hanno in comune *uno* dei punti della n-pla, di cui A è l'imagine.

5. Consideriamo, tra gli spazi osculatori, il piano τ_1 tangente alla Φ nel punto A_1, imagine delle n-ple dei punti del piano che hanno il punto P_1 come $(n-1)$-plo (n. 3, 4). Questi è pure un *particolare* piano del tipo Γ (n. 2), relativamente al gruppo base dato dal punto $(n-1)$-plo P_1. Lo spazio osculatore massimo $S_m^{(2)}$ (n. 4) e τ_1 hanno uno ed un sol punto in comune, cioè l'imagine della n-pla formata dal punto $(n-1)$-plo P_1 e dal punto P_2; a meno che P_2 non coincida con P_1, nel qual caso τ_1 appartiene all' $S_m^{(2)}$.

Gli S_m osculatori alla Φ punteggiano dunque i suoi piani tangenti, generando tra due di questi, come è facile verificare (n. 6), una corrispondenza omografica.

Se si volesse costruire direttamente (3) l'insieme degli spazi S_m osculatori alla Φ, in base alla proprietà ora segnalata, non si potrebbero scegliere ad arbitrio $m+1 = N-n$ piani e stabilire ad arbitrio delle corrisdondenze omografiche tra questi, ma sia tra i piani che tra le omografie dovrebbero intercedere opportune dipendenze. La natura di queste didendenze, soprattutto per ciò che riguarda l'insieme degli $N-n$ piani, mi sembra notevolmente complessa.

(3) Problema posto da G. Bordiga, loco cit. (1).

Perciò ho cercato di giungere alla costruzione proiettiva dell' insieme degli spazi osculatori alla Φ, e quindi, come vedremo in seguito (n. 7), della M_{2n} stessa, modificando leggermente la precedente impostazione del problema. A tale scopo, mi giova aggiungere a questi richiami qualche osservazione.

6. Fra il piano Γ della M_{2n} relativo ad un gruppo base $(P_1, \ldots P_{n-1})$, (n. 2), ed il piano π intercede una corrispondenza biunivoca senza eccezioni: ad ogni punto P di π (che costituisce assieme al gruppo base un' n-pla) corrispondendo un determinato punto di Γ, e viceversa. Questa corrispondenza tra π e Γ, manifestamente algebrica, biunivoca senza eccezioni sarà dunque un' omografia.

Variando il gruppo base, si ottiene un altro piano Γ' della M_{2n}; e assumendo come corrispondenti due punti A e A' di Γ e Γ' che siano riferiti, nel modo predetto, allo stesso punto P di π, si ottiene una corrispondenza omografica tra i due piani. Due punti corrispondenti in questa omografia, in quanto rappresentano due n-ple di π che hanno in comune un punto P, appartengono allo stesso spazio osculatore massimo alla Φ, S_m, relativo al punto P (n. 3). Dunque:

Gli S_m osculatori alla Φ punteggiano collinearmente i piani Γ della M_{2n} (in particolare i piani tangenti τ alla Φ (n. 5)).

7. Poichè il piano π è omografico ad un piano Γ, possiamo addirittura identificarlo con uno di questi piani.

Presi allora in π $(\equiv \Gamma)$ n punti generici, $P_1, P_2, \ldots P_n$, possiamo considerare gli spazi osculatori massimi $S_m^{(r)}$ $(r=1, 2, \ldots n)$, *non appartenenti a Γ* (n. 4), ai quali quei punti rispettivamente appartengono. Questi spazi avranno in comune un punto (ed uno solo (n. 3)), cioè l' immagine della n-pla di π considerata.

Otteniamo così *una costruzione proiettiva della M_{2n} mediante un suo piano Γ e l' insieme degli spazi osculatori massimi alla Φ.*

8. Prendiamo in π $n+1$ punti generici $P_0, P_1, \ldots P_n$ e consideriamo gli $n+1$ punti della M_{2n}, B_r $(r=0, 1, \ldots n)$, imagini delle n–ple che si ottengono sopprimendo, da quel gruppo di $n+1$ punti, un punto $P_r\,(r=0,\ 1,\dots\ n)$. Dico che *questi* $n+1$ *punti* B_r *dell'* S_N *sono linearmente indipendenti.*

Infatti, uno qualunque di essi, ad esempio B_n, non può dipendere linearmente dai rimanenti $B_0,\ B_1,\dots\ B_{n-1}$. Invero, i punti $B_0,\ B_1,\dots\ B_{n-1}$, che sono imagini di n-ple che hanno in comune il punto P_n, appartengono allo spazio S_m (n. 4), osculatore alla Φ nel punto A_n, imagine di P_n interpretato come n–pla di punti coincidenti. E poichè l'intersezione *completa* di questo spazio S_m con la M_{2n} è la $M_{2(n-1)}$ che rappresenta le n–ple col punto comune P_n (n. 3), questo spazio non può contenere il punto B_n.

Prendiamo ora in π $n+2$ punti generici $P_0,\ P_1,\dots\ P_n,\ P_{n+1}$ e consideriamo gli $\binom{n+2}{2}=N+1$ punti dell'S_N imagini delle n–ple che si ottengono sopprimendo da quel gruppo di $n+2$ punti, due qualunque. Dico che *questi* $N+1$ *punti sono linearmente indipendenti.*

Di questa proprietà daremo una dimostrazione ricorrente. Intanto essa è vera per $n=1$, perchè in tal caso l'S_N $(N=2)$, si può far coincidere col piano π stesso.

Verifichiamo dunque che, ove la proprietà sia valida fino ad un valore $n-1$, è di conseguenza valida per il valore n.

Infatti, consideriamo dapprima tra le n–ple che si possono formare, nel modo predetto, coi punti $P_0,\ P_1,\dots\ P_n,\ P_{n+1}$, quelle che hanno in comune il punto P_{n+1}. Le loro imagini sono punti della $M_{2(n-1)}$, intersezione completa della M_{2n} con lo spazio osculatore S_m alla Φ nel punto A_{n+1} (n. 3); e questi punti della $M_{2(n-1)}$, in quanto imagini dei gruppi di $n-1$ punti che si ottengono sopprimendo da $P_0,\ P_1,\dots\ P_n$ due punti qualunque, sono, in base all'ipotesi, linearmente indipendenti.

Rimangono da considerare le n-ple che *non* contengono il punto P_{n+1}, le cui imagini, come abbiamo precedentemente dimostrato, sono $n+1$ punti linearmente indipendenti, che individuano dunque uno spazio lineare S_n.

Infine dobbiamo verificare, per poter concludere che tutti i punti dell' S_N così ottenuti sono nel loro insieme linearmente indipendenti, che gli spazi S_m ed S_n ora considerati, non hanno alcun punto in comune.

Infatti, se esistesse un tale punto A, questi sarebbe l'imagine di una curva inviluppo di classe n del piano π (n. 1), appartenente simultaneamente ai sistemi lineari di curve inviluppo di classe n, di cui gli spazi S_m ed S_n sono imagini. Ora ciò non è possibile.

Invero, di ogni curva inviluppo del sistema lineare di imagine S_m, poichè questi è individuato da $m+1$ curve inviluppo (degeneri) che hanno in comune il fascio di raggi di centro P_{n+1}, fa parte questo fascio di raggi. Per una curva generica del sistema lineare di curve inviluppo di imagine S_n, si può invece osservare che ad essa appartengono tutte le rette che congiungono a due a due i punti P_0, $P_1, \ldots P_n$; perchè queste rette appartengono a ciascuna delle $n+1$ curve inviluppo (degeneri) che individuano il sistema lineare.

Dunque della curva inviluppo di classe n, che ha per imagine il punto A (cioè comune ai due sistemi lineari), dovrebbero far parte non solo le n rette che congiungono il punto P_0 coi punti $P_1, \ldots P_n$, ma anche la retta $P_0 P_{n+1}$, in quanto raggio del fascio di centro P_{n+1}. Ma allora tutte le rette per P_0 dovrebbero far parte della curva inviluppo di classe n, che si scinderebbe (ragionando analogamente per gli altri punti P_r) in $n+1$ fasci di raggi, ciò che è assurdo.

§ 2. - Costruzione proiettiva diretta della M_{2n}.

9. Per costruire direttamente una varietà M_{2n} procederemo nel seguente modo. Introduremo in uno spazio lineare S_N, e in modo opportuno (n. 10), $N-n=m+1$ piani; e stabiliremo, pure in modo opportuno (n. 11), delle omografie tra questi. I gruppi di $m+1$ punti, corrispondenti in queste omografie, individuano un insieme di ∞^2 spazi lineari S_m immersi nell' S_N. Infine faremo vedere che questi spazi S_m sono spazi osculatori di una superficie Φ di una M_{2n}, e che i piani da cui siamo partiti ne sono piani del tipo Γ (n. 12). Dunque con la costruzione che veniamo ad esporre, e secondo la conclusione del n. 7, daremo una generazione proiettiva della M_{2n}.

Nella esposizione, unicamente allo scopo di semplificare il linguaggio, riferiremo i vari elementi che si introducono direttamente alla M_{2n} che andiamo a costruire, come se questa astrattamente già esistesse.

10. Prendiamo un gruppo G di $n+1$ punti generici del piano π, $P_0, P_1, \ldots P_n$. Se escludiamo uno di essi, P_j, otteniamo un' n-pla, cui facciamo corrispondere il vertice A_j $(j=0, 1, \ldots n)$ di una piramide fondamentale di uno spazio lineare S_N $\left(N=\frac{n(n+3)}{2}\right)$.

Il vertice A_j, in quanto potrà essere considerato appartenente allo spazio osculatore $S_m^{(k)}$, relativo ad un punto P_k della n-pla di imagine A_j (n. 3), verrà indicato con $A_{j,k}$. In questa scrittura, l' indice k può dunque assumere tutti gli n valori da 0 ad n distinti da j, con che non cambia il punto dell' S_N da essa rappresentato, ma unicamente lo spazio osculatore alla Φ, $S_m^{(k)}$, cui lo imaginiamo riferito.

Se escludiamo da G due punti (P_j, P_k), otteniamo un gruppo di $n-1$ punti cui, pensato come gruppo base (n. 2) delle n-ple che hanno quegli $n-1$ punti fissi, facciamo corrispondere la faccia piana Γ_{jk}^{*} della piramide fondamentale dell' S_N, determinata dai vertici A_j, A_k e da un vertice prescelto A_r $(r>n)$. Poichè i piani Γ_{jk} sono in numero di $\binom{n+1}{2}$ ed è $\binom{n+1}{2}=N-n$, si potrà far si che ogni vertice $A_r (r>n)$ appartenga ad una faccia Γ_{jk}, e ad una soltanto.

Il punto dell' S_N che faremo corrispondere alla n-pla col punto doppio P_i, che si ottiene escludendo da G i vertici P_j e P_k, verrà indicato con $A_{jk,i}$. Questo punto dovrà appartenere al piano Γ_{jk} e allo spazio osculatore (da determinarsi) $S_m^{(i)}$ $(i \neq j, k)$. La posizione dei diversi punti $A_{jk,i}$ verrà precisata successivamente.

Sia in $A_{j,i}$ che in $A_{jk,i}$, l' indice dopo la virgola è stato scelto in modo che punti con lo stesso indice appartengano allo stesso spazio osculatore $S_m^{(i)}$; e quindi si corrispondano nelle omografie da determinarsi tra i piani Γ_{jk}.

11. Fissiamo nell' S_N un iperpiano generico, S_{N-1}. Questi taglierà i nostri piani Γ_{jk} rispettivamente in $\binom{n+1}{2}$ rette r_{jk} (ciascuna indipendente dai punti A_j e A_k già fissati entro al rispettivo piano). Due tali rette si assumeranno in ogni caso come corrispondenti nelle omografie che ora veniamo a determinare entro ai rispettivi piani Γ_{jk}.

Ordiniamo i piani Γ_{jk} in un modo qualunque e sia, ad es., Γ_{01} il primo di essi. Poniamo un' omografia non degenere tra i piani π e Γ_{01}, in cui ai punti $P_0, P_1, \ldots P_n$ corrispondano ordinatamente i punti

$$A_{1,0}, \; A_{0,1}, \; A_{01,2}, \ldots A_{01,n}, \tag{3}$$

di modo che i punti $A_{01,2}, \ldots A_{01,n}$ vengono determinati da questa omografia. Ai punti A_0, A_1, già fissati su Γ_{01} (n. 10), è stato attribuito il secondo indice secondo il criterio con cui chiude il n. 10.

Per l' omografia da stabilirsi tra Γ_{01} ed il piano successivo, sia Γ_{jk}, sono già determinati in Γ_{jk} tre elementi, corrispondenti di elementi di Γ_{01}: cioè la retta r_{jk} ed i punti $A_{k,j}$ e $A_{j,k}$ (n. 10). Orbene, fissiamo in Γ_{jk} genericamente un punto $A_{jk,i}$, da scegliersi come omologo di $A_{01,i}$. Così è determinata l' omografia tra i piani Γ_{01} e Γ_{jk}, ed essa determina in Γ_{jk} tutti i punti omologhi dei punti (3),

$$A_{jk,0}, \; A_{jk,1}, \ldots A_{k,j}, \ldots A_{j,k}, \ldots A_{jk,n}. \tag{4}$$

Per stabilire l' omografia tra Γ_{jk} ed il piano successivo, ci si trova nella identica situazione che si aveva da Γ_{01} a Γ_{jk}. Si proceda dunque in modo analogo, fino ad aver determinata l' omografia tra gli ultimi due piani.

Congiungendo con spazi S_m i gruppi di $\binom{n+1}{2} = m+1$

punti corrispondenti nelle omografie ora stabilite tra i piani Γ_{jk}, si ottiene un sistema di ∞^2 spazi S_m. Può questi considerarsi come generatore (n. 7) di una M_{2n}?

12. Per rispondere in senso affermativo alla domanda ora posta, consideriamo in uno spazio lineare S'_N la varietà M'_{2n} (n. 1), e gli elementi Γ'_{jk}, A'_i, $A'_{jk,i}$ corrispondenti, nel riferimento a π, degli elementi Γ_{jk}, A_j, $A_{jk,i}$ dell' S_N.

Gli $\binom{n+1}{2}$ piani Γ'_{ik} appartengono allo spazio S_N e non ad uno spazio di dimensione minore. Infatti, ove si aggiunga a G (n. 10) un punto generico P_{n+1} di π, alle n-ple che si possono estrarre dal gruppo di $n+2$ punti così ottenuti, corrispondono $N+1$ punti linearmente indipendenti dell' S'_N (n. 8); e ciascuno di questi punti appartiene ad almeno un piano Γ'_{jk}.

Da ciò segue che gli $n+1$ punti A'_j $(j=0, 1, \ldots n)$ e per ciascun piano Γ'_{jk} il punto $A'_{jk,i}$ associato a quel punto $A_{jk,i}$ di Γ_{jk} che si è fissato per determinare l' omografia rispetto al piano precedente (n. 8) (tranne nel piano Γ'_{01} ove si prenderà ad es. il punto $A'_{01,2}$), costituiscono in tutto $N+1$ punti linearmente indipendenti dell' S'_N.

Scegliamo inoltre nel piano Γ'_{01} una retta generica r'_{01} e consideriamo tutte le rette r'_{jk} ad essa corrispondenti nelle omografie che intercedono tra Γ'_{01} e i diversi piani Γ'_{jk} (n. 5). Queste rette appartengono ad un medesimo iperpiano S'_{N-1}, individuato da due spazi osculatori massimi S'_m e S''_m (n. 4), che passino rispettivamente per due punti della r'_{01}.

Possiamo ora determinare un' omografia Ω tra gli spazi S'_N ed S_N, facendo corrispondere agli $N+1$ punti linearmente indipendenti dell' S'_N su precisati, A'_j e $A'_{jk,i}$, i punti A_j e $A_{jk,i}$ dell' S_N, e all' iperpiano S'_{N-1} ora introdotto, l' iperpiano S_{N-1} intervenuto nella costruzione delle omografie tra i Γ_{jk} (n. 11).

Questa omografia Ω muta non solo l' insieme dei piani Γ'_{jk} della M'_{2n} nell' insieme dei piani Γ_{jk} da noi direttamente costruito, ma trasforma anche (come è facile rilevare) l' omografia fra due piani Γ'_{jk} nell' omografia da noi direttamente determinata tra i corrispondenti piani Γ_{jk}. L' insieme degli spazi S_m costruito al n. 11 è dunque effettivamente, in quanto trasformato omografico dell' insieme degli S'_m osculatori della Φ' della M'_{2n}, costruttore (n. 7) di una varietà M_{2n}.

È noto [4] che due varietà minime, M_{2n} e M'_{2n}, sono proiettivamente equivalenti. Questo fatto è risultato qui direttamente, dall'aver costruita un'omografia Ω che trasforma la M'_{2n} nella M_{2n}.

13. Applichiamo la costruzione della M_{2n} ai casi più semplici di $n = 2$ ed $n = 3$. Per $n = 2$ si trova una costruzione proiettiva dell' insieme dei piani tangenti ad una superficie di Veronese già segnalata [5].

Per $n = 3$, fissati in un S_9 i punti A_0, A_1, A_2, A_3 ed i piani Γ_{01}, Γ_{02}, Γ_{03}, Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{23} secondo gli ovvi criteri del n. 10, si determinino su questi piani le rette r_{jk}, segandoli con un iperpiano generico S_8 dell' S_9, rette che si considereranno come corrispondenti nelle omografie da determinarsi entro a questi piani (n. 11). In queste omografie si corrispondano i punti che figurano in una medesima colonna della seguente tabella

Γ_{01}	$A_{1,0}$	$A_{0,1}$	$A_{01,2}$	$A_{01,3}$
Γ_{02}	$A_{2,0}$	$A_{02,1}$	$A_{0,2}$	$A_{02,3}$
Γ_{03}	$A_{3,0}$	$A_{03,1}$	$A_{03,2}$	$A_{0,3}$
Γ_{12}	$A_{12,0}$	$A_{2,1}$	$A_{1,2}$	$A_{12,3}$
Γ_{13}	$A_{13,0}$	$A_{3,1}$	$A_{13,2}$	$A_{1,3}$
Γ_{23}	$A_{23,0}$	$A_{23,1}$	$A_{3,2}$	$A_{2,3}$

e tenuto conto che mentre i punti a due indici sono già conosciuti (poichè trascurato il secondo indice si tratta dei punti A_0, A_1, A_2, A_3 (n. 10)), dei punti a tre indici di ciascuna riga si scelga, entro al rispettivo piano, genericamente uno, gli altri risultando individuati dall' omografia così determinata rispetto al piano precedente; tranne per il piano Γ_{01} i cui punti, essendo quattro soltanto, potranno essere presi genericamente.

[4] G. Bordiga, loco cil. [1].

[5] U. Morin, *Sui sistemi di piani a due a due incidenti* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Atti, t. 89 (1929-30), pag. 907-26].