RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERRE HUMBERT

Quelques généralisations de l'équation de Laplace

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 6 (1935), p. 121-131

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__121_0>

QUELQUES GÉNÉRALISATIONS DE L' EQUATION DE LAPLACE

par Pierre Humbert *à Montpellier* (*)

Nous voulons exposer très brievement, dans ce qui suit, un certain nombre de résultats sur les généralisations de l' équation de Laplace, et sur les solutions qu' on en peut donner [1].

1. *L' équation de Laplace.* Si entre deux points $P(a, b, c)$ et $M(x, y, z)$ l' attraction est newtonienne, c' est-à-dire inversement proportionelle au carré de la distance

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

on sait que cette attraction dérive du potentiel

$$U(x, y, z) = \frac{1}{r}.$$

Si au lieu d' un point attirant P on a un volume attirant V, le potentiel sera donné par l' intégrale

$$V(x, y, z) = \iiint_V \frac{da\, db\, dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

(*) Conferenza tenuta al Seminario matematico della R. Università di Padova il 15 Marzo 1935.

[1] Ces quelques pages ne sont que le résumé d' un ouvrage plus important sur la question, dans la collection des *Cahiers Scientifiques* de M. Julia.

Si alors on calcule les dérivées partielles secondes de U par rapport à x, y et z, on trouve immédiatement la relation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 .$$

C' est l' *équation de Laplace*, qui s' écrit en abrégé

$$\Delta U = 0 .$$

La solution générale de cette équation a été donnée, sous forme d' integrale, par M. Whittaker: mais il est intéressant d' en connaître des solutions particulières (fonctions harmoniques).

2. *Introduction des polynomes de Legendre.* On peut en obtenir de la façon suivante. Partons de la solution

$$U = \frac{1}{r} ;$$

que nous appellerons *fondamentale*; nous pouvons écrire que la fonction

$$V = [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}},$$

où a est un paramètre quelconque, est une fonction harmonique. D' ailleurs toutes les dérivées de V par rapport à x seront aussi harmoniques, vu la forme de l' équation de Laplace. Donc l' expression

$$\frac{1}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}}$$

sera harmonique. Designons-la par $P_m(x, y, z)$, après y avoir fait $a = 0$. On a d' après la formule de Taylor

$$[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} a^m P_m(x, y, z) .$$

Supposons que le point x, y, z, soit sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

le premier membre devient

$$[1 - 2ax + a^2]^{-\frac{1}{2}},$$

c' est la fonction genératrice des *polynomes de Legendre*, $P_n(x)$. Donc, sur la sphére, les fonctions harmoniques $P_m(x, y, z)$ se réduisent aux polynomes de LEGENDRE.

3. D' autres solutions de l' equation $\Delta U = 0$ s' obtiennent aisément en faisant un *changement de variables*, et spécialement en introduisant comme nouvelles surfaces coordonnées des quadriques. Sans entrer dans le détail des calculs, indiquons seulement les résultats suivants :

a) Le changement de coordonnées introduisant des cônes de révolution conduit à des solutions où figure la fonction $P_n(x)$ de LEGENDRE, mais où n, au lieu d' être entier, est imaginaire.

b) Le changement de condonnées introduisant des tores conduit à des solutions où figure la fonction $P_n(x)$ de LEGENDRE, mais où n, au lieu d' être entier, est égal à la moitié d' un nombre entier impair.

4. Le rôle des fonctions de LEGENDRE, et particulierement des polynómes de LEGENDRE (qui, comme on l' a vu, sont des fonctions sphériques) étant ainsi tres important dans la théorie de l' équation de LAPLACE, nous pouvons prévoir que, dans l' étude des généralisations de cette équation, des extensions des fonctions de LEGENDRE vont s' introduire très naturellement. Commençons donc par indiquer rapidement quelles sont les principales généralisations des polynomes de LEGENDRE.

I. *Polynomes de Gegenbauer.* - Ils sont définis par le développement

$$[1 - 2ax + a^2]^{-\nu} = \sum_n a^n C_n^\nu(x),$$

où ν est un nombre positif quelconque. Dans le cas $\nu = 0$, on est conduit à considérer le développement

$$\log [1 - 2ax + a^2] = \sum_n a^n C_n^0 (x) .$$

II. *Polynomes d'Hermite.* - Cherchant à étendre à deux variables la definition des polynomes de LEGENDRE, HERMITE a constaté, avec quelque étonnement, que ce n'etait pas de la fonction génératrice

$$[1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2]^{-\frac{1}{2}}$$

qu'il fallait partir, comme cela paraissait naturel, mais de la formule

$$[1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2]^{-1} = \sum_m \sum_n a^m b^n V_{m,n} (x, y) .$$

Le polynome $V_{m,n}$ à deux variables possède alors des propriétés (équations différentielles, formules de récurrence, intégrales, etc.) qui généralisent directement celles du polynome $P_n (x)$.

III. *Polynomes de Pincherle et analogues.* Pour étendre la définition des polynomes de LEGENDRE au troisième degré, PINCHERLE a considéré le développement

$$[1 - 3ax + a^3]^{-\frac{1}{2}} = \sum a^n Q_n (x)$$

que l'on peut facilement ramener au développement analogue

$$[1 + 3a^2 x - a^3]^{-\frac{1}{2}} = \sum a^n R_n (x) .$$

J'ai moi même étendu ces résultats en etudiant les polynomes naissant des développements

$$[1+3a^2x-a^3]^{-\nu}=\sum_n a^n R_n^\nu(x)$$

$$\log[1+3a^2x-a^3]=\sum a^n R_n^0(x)\,.$$

5. Ceci posé, nous allons dire quelques mots des ***généralisations*** de l' équation de LAPLACE dans les trois cas suivants:

α) augmentation du nombre de variables: potentiel dans l' hyperespace.

β) attraction proportionnelle à une puissance quelconque se la distance: prépotentiel.

γ) augmentation de l' ordre de l' équation différentielle: équation $\Delta_3 U=0$.

6. Considérons en premier lieu l' *équation à quatre variables*

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0.$$

On constatera facilement que la fonction

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+(t-d)^2}}$$

n' en est pas solution, mais que la fonction

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+(t-d)^2}$$

en est une solution, que nous prendrons pour solution fondamentale. D' une façon générale, le potentiel dans l' espace à quatre dimensions, satisfaisont à l' èquation de LAPLACE, sera donné par l' intégrale

$$U(x,\ y,\ z,\ t)=\iiiint\frac{da\ldots.}{(x-a)^2+\ldots\ldots\ldots}\,.$$

Pour trouver des solutions particulières de l'équation, partons de la solution fondamentale (dans laquelle nous ferons c et d nuls)

$$V = [(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 + t^2]^{-1},$$

qui est harmonique. Toutes ses dérivées par rapport à x et y le seront aussi, et par conséquent l'expression

$$\frac{1}{m!\,n!} \cdot \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n} [(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 + t^2]^{-1},$$

sera harmonique. Nous la designerons par $P_{m,n}(x, y, z, t)$ lorsque nous y aurons fait $a = b = 0$. Mais on a

$$[(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 + t^2]^{-1} = \sum_m \sum_n a^m b^n P_{m,n}(x, y, z, t).$$

Si le point x, y, z, t reste sur l'*hypersphére*

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1,$$

le premier membre devient

$$[1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2]^{-1},$$

fonction génératrice des polynomes $V_{m,n}(x, y)$ d'Hermite.

Donc, sur l'hypersphère, les fonctions harmoniques P se réduisent aux polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite. Ces polynomes sont donc des *fonctions hypersphériques.*

On remarquera: 1.° l'analogie parfaite avec le cas de trois variables; 2.° la raison pour laquelle la fonctions génératrice des polynomes d'Hermite comporte l'exposant -1 et non pas l'exposant $-\frac{1}{2}$.

7. L'importance de ce résultat (du à Paul Appell) est evidemment très grande. On peut le généraliser de diverses façons, en faisant des *changements de variables* dans l'équation

$\Delta\, U = 0$. Signalons les deux faits suivants, exactement parallèles à ceux que nous avons rappelés plus haut :

a) Un changement de coordonnées introduisant des hyper surfaces telles que

$$x^2 + y^2 + z^2 = A\, t^2,$$

c' est - à - dire des ***hypercônes***, conduit à des solutions où figure la fonction $V_{m,n}$, mais où m et n seraient *imaginaires.*

b) Le changement de coordonnées introduisant l' hypersurface obtenue par rotation de la sphère $x^2 + y^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0$ autours de l' axe des z, hors de son espace, c' est - à - dire un *hypertore*, conduit à des solutions où figure la fonction $V_{m,n}$, mais où m et n sont égaux à la moitié d' entiers impairs.

8. Une seconde généralisation de l' équation de Laplace consiste à supposer - dans l' espace ordinaire - l' attraction proportionnelle à une *puissance quelconque* de la distance. On est alors conduit à considerer l' intégrale

$$U(x,\, y,\, z) = \iiint [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2]^p\, da\, db\, dc$$

etendue à tous les points *a, b, c*, d' un volume attirant. A une telle intégrale, Green et Cayley ont donné le nom de *prépotentiel.*

On ne sait pas en général écrire d' équation différentielle satisfaite par le prépotentiel. Mais certains cas particuliers conduisent à des résultats simples. Le plus connu est celui du ***prépotentiel plan***, ou le volume attirant se réduit au *plan* $a = 0$.

On aura alors

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2\, p\, x \iint [x^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2]^{p-1}\, db\, dc$$

et

$$\Delta\, U = 2\, p\, (2\, p + 1) \iint [x^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2]^{p-1}\, db\, dc$$

d' où l' équation

$$\Delta U = \frac{2p+1}{x}\frac{\partial U}{\partial x}.$$

C' est l'équation du prépotentiel plan on *équation de* GREEN.

On ne peut pas en chercher des solutions par la méthode que nous avons utilisée deux fois jusqu'ici, car si V est solution, $\frac{\partial V}{\partial x}$ ne l'est pas. On fera alors des changements de variables: indiquons simplement que dans ce problème s'introduiront très naturellement les polynomes de GEGENBAUER.

9. Pour trouver une équation aux dérivées partielles du *troisième* ordre qui généralise l'équation de LAPLACE, on peut opérer de la façon suivante.

Partons de l' équation à deux variables,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Si on y fait le changement de variables

$$u = x + iy$$
$$v = x - iy,$$

elle devient

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} = 0.$$

Considérons alors l' équation

$$\frac{\partial^3 U}{\partial u \partial v \partial w} = 0.$$

Nous y ferons le changement de variables, tout à fait analogue au précédent,

$$\begin{aligned} u &= x + y + z \\ v &= x + \varepsilon\, y + \varepsilon^2 z \\ w &= x + \varepsilon^2 y + \varepsilon\, z \end{aligned}$$

où $\varepsilon^3 = 1$. On trouvera alors l'équation

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0,$$

qui généralise directement, au troisième ordre, l'équation de Laplace. On a bien voulu donner mon nom à cette équation, que j'ai introduite au Congrès de Bologne en 1928. Nous désignerons son premier membre par $\Delta_3 U$.

10. On en trouvera aisément une solution fondamentale: comme l'équation

$$\frac{\partial^3 U}{\partial u\, \partial v\, \partial w} = 0,$$

admet, ainsi qu'on le vérifie immédiatement, la solution

$$\log u v w,$$

l'équation $\Delta_3 U = 0$ admettra la solution

$$\log (x^3 + y^3 + z^3 - 3 x y z].$$

Nous partirons alors de la solution fondamentale

$$\log [(x - a)^3 + y^3 + z^3 - 3 (x - a) y z]$$

qui satisfait à $\Delta_3 U = 0$, ainsi que ses dérivées par rapport à x. Nous en déduisons que les polynomes $R_m (x, y, z)$ definis par

$$\log [(x - a)^3 + y^3 + z^3 - 3 (x - a) y z] = \sum a^m R_m (x, y, z)$$

satisfont à l'équation. Mais si le point x, y, z reste sur la courbe gauche

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 - 3\,x\,y\,z = 1 \\ x^2 - y\,z = 0\,, \end{cases}$$

intersection d'un cône et d'un hyperboloïde cubique, le premier membre se réduit à

$$\log\left[1 + 3\,a^2 x - a^3\right]$$

et le polynome $R_m(x,\ y,\ z)$ devient le polynome $R_m^0(x)$ dont nous avons donné plus haut la définition. On voit encore apparaître l'analogie avec l'équation de LAPLACE.

11. Si dans l'équation de LAPLACE à deux variables

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0\,,$$

on fait le changement de variables des coordonnées polaires,

$$x = \rho \cos \vartheta$$
$$y = \rho \sin \vartheta\,,$$

on trouve qu'une solution est

$$U = \rho^m \cos m\,\vartheta$$

ou

$$U = \rho^m \sin m\,\vartheta\,.$$

Nous allons généraliser ce résultat comme suit: dans l'équation $\Delta_3 U = 0$; posons

$$x = \rho\, P\,(\vartheta,\ \varphi)$$
$$y = \rho\, Q\,(\vartheta,\ \varphi)$$
$$z = \rho\, R\,(\vartheta,\ \varphi)$$

aù P, Q, R sont les trois *cosinus d'* Appell, généralisant au troisième ordre et à deux variables les cosinus et sinus ordinaires, et définis par les formules

$$P(\vartheta, \varphi) = \frac{e^{\vartheta + \varphi} + e^{\varepsilon \vartheta + \varepsilon^2 \varphi} + e^{\varepsilon^2 \vartheta + \varepsilon \varphi}}{3}$$

$$Q(\vartheta, \varphi) = \frac{e^{\vartheta + \varphi} + \varepsilon e^{\varepsilon \vartheta + \varepsilon^2 \varphi} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2 \vartheta + \varepsilon \varphi}}{3}$$

$$R(\vartheta, \varphi) = \frac{e^{\vartheta + \varphi} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon \vartheta + \varepsilon^2 \varphi} + \varepsilon e^{\varepsilon^2 \vartheta + \varepsilon \varphi}}{3}.$$

On trouvera alors que les fonctions

$$\rho^{m+n} P(m\vartheta, n\varphi)$$
$$\rho^{m+n} Q(m\vartheta, n\varphi)$$
$$\rho^{m+n} R(m\vartheta, n\varphi)$$

sont des solutions de l'équation.