RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

Sui metodi generali di rappresentazione lineare della geometria descrittiva

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 6 (1935), p. 132-140

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__132_0>

SUI METODI GENERALI DI RAPPRESENTAZIONE LINEARE DELLA GEOMETRIA DESCRITTIVA

di Ugo Morin *a Padova*

Il Bordiga [1], nelle sue vedute unitarie sulla geometria descrittiva, introduce il metodo generale di rappresentazione dello spazio punteggiato mediante coppie ordinate di punti di un piano. Questo metodo, ritrovato da Müller [2], è stato da questi chiamato il metodo più generale (allgemeinstes Zweibilderprinzip).

Ora, analogamente a quanto ha fatto A. del Re [3] per un caso particolare, e più in generale Müller e Comessatti [4], ho voluto indagare quali sono i possibili metodi di rappresentazione mediante coppie ordinate di punti, ove si pongano unicamente le condizioni che la rappresentazione sia algebrica e che le coppie rappresentatrici dei punti di una retta generica si distribuiscano

(1) C. Bordiga, *I metodi della Geometria descrittiva* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXI (1901-2)] pp. 389-403 e 609-618.

(2) Müller, *Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie* [Jhrsb. d. Deutsch. Math. Ver. 14 (1905)] pp. 569-574.

(3) A. del Re, *Il più generale metodo di rappresentazione che serve di base alla Geometria descrittiva ordinaria* [Rend. Acc. Lincei (5) 17 (1908)] pp. 639-643.

(4) A. Comessatti, *Considerazioni intorno ai metodi generali di rappresentazione della Geometria descrittiva, ed al teorema di* Pohlke [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXXXVII (2), (1927-28)] pp. 579-614.

sopra due rette; rappresentazioni che chiamerò in seguito *lineari*. Pervengo alla conclusione che i metodi di rappresentazione lineari possibili sono unicamente il metodo generale del Bordiga ed un metodo che ho chiamato *metodo generalizzato di proiezioni quotate* (con tutti i loro casi particolari).

Dopo aver accennato ad un' applicazione di quest' ultimo metodo alla fotogrammetria, generalizzo gli argomenti svolti agli iperspazi: pervenendo a classificare proiettivamente tutti i possibili metodi di rappresentazione lineare di uno spazio lineare S_n dentro ad uno spazio lineare S_m $(n \geq m,\ 2m \geq n)$.

1. La rappresentazione del Bordiga dello spazio punteggiato Σ mediante coppie ordinate di punti di un piano (quadro) π si ottiene nel seguente modo: Fissati in Σ due punti S' ed S'' (centri fondamentali) e due omografie non degeneri Ω', Ω'' fra le stelle S', S'' ed il quadro π, un punto generico A di Σ viene rappresentato su π dalla coppia dei punti (A_1, A_2) che, secondo Ω' ed Ω'', corrispondono ripettivamente ai raggi $S'A$ ed $S''A$.

2. La più generale rappresentazione *algebrica* dei punti di Σ mediante coppie ordinate di punti del quadro π, si ottiene evidentemente fissando entro alla varietà V_4 di quelle coppie una V_3 *razionale*, e riferendola birazionalmente a Σ. In questa corrispondenza birazionale tra la V_3 e Σ vi potranno essere in Σ dei punti fondamentali, cioè punti tali che ad essi corrispondono nella V_3 curve o superficie (eccezionali).

Imponiamo ora alla rappresentazione algebrica generale il *vincolo proiettivo* cioè prescriviamo che le coppie rappresentatrici (A_1, A_2) dei punti A di una retta generica a di Σ si distribuiscano rispettivamente sopra due rette a_1 ed a_2 (generiche o no) del quadro. Queste rappresentazioni chiameremo, come abbiamo detto nell' introduzione, *lineari*.

3. Il punto A_1 si dirà la prima imagine del punto A, ed A_2 la seconda; ed analogamente per le imagini a_1, a_2 di una retta a. Si presentano allora, per la rappresentazione suddetta, due diverse possibilità:

I) sia le prime che le seconde imagini dei punti di Σ si distribuiscono su tutto il quadro π;

II) mentre (ad es.) le prime imagini si distribuiscono ancora su tutto π, le seconde imagini descrivono una curva (algebrica) p.

Trattiamo dapprima della corrispondenza tra i punti di Σ e le loro prime imagini. Ci riferiremo in seguito a questa corrispondenza dicendo che *π è una imagine lineare di Σ.* Questa corrispondenza risulterà la stessa per i due casi ora segnalati, di cui faremo seguire la trattazione separata.

4. Un punto generico A_1 di π è la prima imagine di ∞^1 punti di Σ, che generano dunque una curva algebrica a. Variando A_1 su π otteniamo in questo modo un sistema algebrico ∞^2 di curve di Σ, che indicheremo con (S'), di indice uno; cioè tale che per un punto generico di Σ passa una sola curva del sistema.

I punti di Σ le cui prime imagini sono punti di una retta generica l_1 di π, costituiscono una superficie algebrica λ, che contiene ∞^1 curve del sistema (S'). Due punti generici, A e B, di questa superficie λ hanno come imagini A_1 e B_1 due punti distinti della retta l_1 Dunque la retta (AB), in quanto ha come imagine la retta l_1, appartiene alla superficie λ: cioè questa superficie è un piano.

Il punto generico A_1 di π è sostegno di un fascio di raggi l_1, dunque per la curva algebrica a del sistema (S') passano ∞^1 piani del tipo λ, cioè quella curva è un retta.

Poichè due punti di π individuano una retta l_1, due rette generiche del sistema (S') sono complanari. Il sistema (S'), poichè le sue rette non possono appartenere ad un piano fisso in quanto per un punto generico di Σ passa una di esse, deve essere una *stella di raggi*; il cui centro S' sarà detto il *primo centro fondamentale.*

Tra i raggi a della stella (S') ed i punti A_1 di π intercede una corrispondenza (algebrica) *biunivoca*, Ω', tale che ad un fascio di raggi corrisponde una retta punteggiata. Cioè la corrispondenza Ω' è un'omografia, che diremo la (prima) *omografia rappresentatrice.*

L' imagine lineare di Σ su π (n. 3) può dunque essere ottenuta nel seguente modo. Si fissi in Σ un punto S' e si stabilisca una omografia Ω' tra la stella di raggi (S') ed il piano punteggiato π. Un punto A di Σ ha come imagine su π il punto A_1 che corrisponde nell' omografia Ω' al raggio $S'A$. Una corrispondenza di questo tipo, che interviene in molte questioni geometriche, vogliamo chiamare una *proiezione generalizzata*. In conclusione:

Un' imagine lineare (n. 3) *dello spazio* Σ *su un piano* π *si ottene sempre con una proiezione generalizzata di* Σ *da un suo punto* S' *su* π.

5. È ora immediata la discussione completa del *I° caso* (n. 3). Poichè anche le seconde imagini dei punti di Σ invadono tutto il quadro π, si ottiene una seconda imagine lineare di Σ su π; generata dunque da una proiezione generalizzata, determinata da un (*secondo*) *centro fondamentale* S'' di Σ e da una (*seconda*) *omografia rappresentatrice* Ω'' (n. 4).

Rileviamo che i due centri S' ed S'' sono necessariamente distinti, perchè, ove coincidessero, tutti i punti di un raggio generico della stella $(S') \equiv (S'')$ avrebbero la medesima coppia rappresentatrice.

Possiamo dunque concludere che *questo metodo più generale di rappresentazione lineare coincide con quello del* Bordiga (n. 1).

6. Veniamo ora alla discussione del *II° caso* (n. 3). Si vede che la curva algebrica p su cui, per ipotesi, si distribuiscono le seconde imagini dei punti di Σ è una retta. Infatti la retta che congiunge due punti qualunque, A_2 e B_2, di p, interpretata come seconda imagine di una retta di Σ che congiunge due punti le cui seconde imagini sono A_2 e B_2, fa parte di p.

Consideriamo la superficie algebrica λ di Σ i cui punti hanno come seconda imagine un punto fisso (generico) L_2 di p (e le prime imagini variabili su π). Variando L_2 su p si ottiene un sistema algebrico ∞^1 di superficie, che indicheremo con (s), di *indice uno* Infatti, per un punto generico L di Σ passa una sola superficie del sistema (s), quella associata alla seconda imagine L_2 del punto L. Il sistema di superficie (s) è dunque un fascio.

Consideriamo una superficie generica λ del fascio (s). Questa ha con una retta generica l della stella (S') (n. 4) in comune, oltre (eventualmente) il punto S', uno ed un sol punto: quello che ha come prima imagine il punto L_1 corrispondente ad l nella prima omografia rappresentatrice Ω' e come seconda imagine il punto L_2 associato a λ. Dunque se l'ordine di una superficie del fascio (s) è $n \geq 2$, il punto S' sarà per il fascio un punto base di ordine $n-1$. In particolare se $n = 1$, cioè il sistema (s) è un fascio di piani, l'asse s di questo fascio non passa per S'.

Tra il fascio (s) di superficie (in particolare di piani) e la retta punteggiata p intercede una corrispondenza algebrica biunivoca, quindi proiettiva. Questa sarà detta la seconda proiettività rappresentatrice Ω''.

7. Noti il centro S', il fascio (s) e le due proiettività rappresentatrici Ω' e Ω'' (nn. 4, 6), la rappresentazione è individuata. Preso un punto generico A di Σ, la sua prima imagine A_1 è il punto corrispondente del raggio $(S'A)$ nella Ω', e la seconda imagine A_2 il punto corrispondente nella Ω'' della superficie del fascio (s) che passa per A.

Le coppie imagini dei punti di una retta generica a di Σ stabiliscono tra la prima imagine a_1 di questa retta e la seconda imagine $a_2 \equiv p$ una corrispondenza algebrica di indici $(n, 1)$. Questa sarà quindi una proiettività unicamente nel caso che (s) sia un fascio di piani.

In questo ultimo caso, per evitare nella rappresentazione di una retta o di un piano, di segnare volta per volta le seconde imagini di alcuni loro punti, si potrà procedere nel seguente modo. Fissati e numerati due o più piani del fascio (s), che si potranno chiamare piani di livello, si segnino e numerino, sopra la prima imagine di una retta, le imagini dei punti comuni alla retta obbiettiva e quei piani. Questa imagine si potrà chiamare proiezione graduata della retta. Così, per rappresentare un piano, si segnino e numerino le prime imagini delle rette (di livello) che il piano ha in comune coi piani di livello prefissati.

È immediato quali ulteriori condizioni grafiche e metriche si dovranno porre, per ridurre questo metodo all'ordinario metodo delle proiezioni quotate; colla sola differenza che la quota, anzichè data numericamente si pensi segnata sulla scala grafica. Chiameremo perciò il metodo generale qui considerato con *metodo generalizzato di proiezioni quotate.*

Si osservi che questo metodo si potrebbe, quando $n = 1$, considerare come un caso particolare del metodo generale del Bordiga, ove si abbandoni la condizione che ambedue le omografie rappresentatrici Ω', Ω'' siano *non* degeneri, ma si ammetta che, in particolare, una delle due possa essere *degenere di prima specie* (5).

8. *Cenno di un' applicazione alla fotogrammetria.* - Nel metodo generale del Bordiga (n. 1) si passa dalla coppia rappresentatrice (A_1, A_2) al punto obiettivo A intersecando due raggi omologhi delle due stelle (S') ed (S''); mentrecchè nel metodo generalizzato di proiezioni quotate (n. 7) si interseca un raggio della stella (S') con un piano del fascio (s). Ciò suggerisce di riprendere i problemi fondamentali della fotogrammetria teorica da questo ultimo punto di vista.

Siano date due prospettive di una medesima figura F dello spazio Σ sopra due quadri π e π', non orientate (cioè di cui si ignori la posizione nello spazio dei piani e centri di proiezione). Sia l_1 una retta di π, congiungente due punti M_1 ed N_1 le cui corrispondenti imagini M' ed N' di π' coincidono. La retta l_1 è dunque traccia di un piano proiettante λ nella prima prospettiva il quale per il fatto che contiene la retta obbiettiva MN, che è un raggio proiettante nella seconda prospettiva, contiene anche il secondo centro di proiezione (6).

(5) A. Comessatti, *Lezioni di geometria anatitica e proiettiva*, Parte seconda [Cedam, Padova, 1931] pag. 161.

(6) Ciò è come dire che la retta l_1 passa per il punto nodale del piano π (retta nodale). Si noti che sia in una costruzione teorica, ma sopratutto in una costruzione per approssimazioni alla quale in pratica spesso si ricorre, la determinazione di una retta nodale è alquanto più semplice che la costruzione del punto nodale stesso.

Le seconde imagini dei punti del piano λ cadranno dunque pure su una medesima retta l' di π'. Prendiamo sulla l' un punto generico P' e riferiamo il fascio (P') con una proiettività Π ad una retta qualunque p di π, in modo che al raggio l' corrisponda il punto, L_2, comune alle rette p ed l_1.

Ad un punto generico A' di π' corrisponde così, con proiezione da P' e con la Π, un determinato punto A_2 di p. Ad un punto generico A di F che abbia come imagine su π un punto A_1 e come imagine su π' il punto A' corrisponde in questo modo una coppia di punti (A_1, A_2) di π. La rappresentazione di F su π così realizzata è, come si rileva direttamente, una proiezione quotata generalizzata (n. 7). Senonché, a partire dalle coppie rappresentatrici (A_1, A_2) non possiamo ricostruire direttamente la figura obbiettiva perchè non conosciamo la effettiva posizione in Σ degli elementi fondamentali S' ed s, nè le due omografie rappresentatrici Ω', Ω''. Ma con una semplice costruzione *possiamo determinare una figura* $\overline{F}$ *omografica alla figura* F.

Perciò prendiamo un piano generico per la retta l_1 e scegliamo in esso genericamente un punto S' ed una retta s.

Facciamo corrispondere ad un punto A della F il punto $\overline{A}$ di Σ che si ottiene intersecando il raggio $(S A_1)$ col piano $(s A_2)$. La corrispondenza Ω così generata tra F ed $\overline{F}$ è un'omografia di Σ.

Infatti, indicato con L il punto d'incontro di una retta generica a di Σ col piano λ, proiettante in ambedue le prospettive, la sua imagine L_1 su π è il punto comune alla retta a_1, imagine di a, e la retta l_1; ed analogamente l'imagine A' sn π' è il punto comune delle rette a' ed l'. Trasformando la retta a' nella retta p, mediante proiezione da P' e la proiettività Π, al punto L' corrisponde il punto L_2 (comune alle rette l_1 e p). Dunque nella proiettività tra le rette a_1 e p, in cui si corrispondono le coppie (A_1, A_2) rappresentatrici dei punti della retta a, la retta l_1 congiunge la coppia di punti corrispondenti (L_1, L_2).

Proiettando da S' i punti A_1 della a_1 e da s i punti corrispondenti A_2 della p si ottengono un fascio di raggi ed un fascio di piani in corrispondenza proiettiva. Ma questa proiettività è una prospettività, perchè il raggio $(S' L_1)$ appartiene al piano corrispondente $(s L_2)$. Dunque alla retta generica a di F corrisponde nella Ω proiettivamente una retta $\bar{a}$ di $\bar{F}$, cioè la Ω è un' omografia.

9. *Generalizzazione agli iperspazi.*

Se tra uno spazio lineare S_n ed uno spazio lineare S_m $(n > m \geq 2)$ intercede una corrispondenza algebrica, tale che ad un punto generico dell' S_n corrisponde un punto generico dell' S_m, e tale che ad una retta punteggiata dell' S_n corrisponde una retta punteggiata dell' S_m, diremo che *l' S_m è un' imagine lineare dell' S_n* (n. 3).

La varietà algebrica V_{n-m} $(n - m \geq 1)$ dei punti dell' S_n che hanno nell' S_m come imagine un medesimo punto P_1, descrive, al variare di P_1 nell' S_m, un sistema algebrico ∞^m di V_{n-m} di indice 1, che indicheremo con (S_{n-m-1}). Facciamo descrivere al punto P_1 una retta generica r_1 dell' S_m. Il corrispondente sistema algebrico ∞^1 di V_{n-m} genera una varietà V_{n-m+1}.

Due punti generici, P e Q, di questa varietà hanno come imagini P_1 e Q_1 due punti distinti della retta r_1. Dunque la retta $(P\,Q)$, in quanto ha come imagine la retta r_1, appartiene alla V_{n-m+1}, cioè questa varietà è uno spazio lineare S_{n-m+1}.

Poichè per un punto P_1 dell' S_m passano ∞^{m-1} $(m - 1 \geq 1)$ rette r_1, per la varietà V_{n-m} dei punti dell' S_n che hanno come imagine P_1, passano ∞^{m-1} spazi lineari S_{n-m+1}: cioè questa varietà è pure uno spazio lineare S_{n-m}. E infine, poichè due punti dell' S_m individuano una retta r_1, due generici spazi S_{n-m} del sistema (S_{n-m-1}) appartengono ad un S_{n-m+1}. In base a quest' ultima condizione [6], e perchè dobbiamo escludere che gli S_{n-m} appartengano ad un S_{n-m+1} fisso in quanto per un punto generico dell' S_n passa uno di essi, possiamo concludere che questi spazi passano per un medesimo S_{n-m-1}, cioè formano una S_{n-m-1} - *stella.*

Tra gli S_{n-m} della S_{n-m-1} - stella ed i punti dell' S_m, intercede una corrispondenza *biunivoca* Ω', nella quale ad un

(6) E. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* [G. Principato, Messina 1923] pag. 16.

fascio di S_{n-m} corrisponde una retta punteggiata. Dunque la Ω' è un' omografia (omografia rappresentatrice). Estendendo l' accezione introdotta al n. 4, possiamo concludere:

Un' imagine lineare di uno spazio lineare S_n dentro uno spazio lineare S_m $(n > m \geq 2)$ si ottiene sempre con una proiezione generalizzata dell' S_n da un suo S_{n-m-1} sopra l' S_{n-m}.

10. Una rappresentazione lineare di uno spazio lineare S_n in uno spazio lineare S_m $(n \geq m \geq 2)$, tale che, mentre le prime imagini appartengano a tutto l' S_m, le seconde imagini appartengano ad un S_l dell' S_m $(m \geq l \geq 2,\ m + l \geq n)$, (7), si compone dunque di due distinte *imagini lineari*. In conclusione:

La più generale rappresentazione lineare di uno spazio lineare S_n in uno spazio lineare S_m $(n > m \geq l \geq 2)$ si ottiene nel seguente modo.

Presi nell' S_n uno spazio lineare S_{n-m-1} ed uno spazio lineare S_{n-l-1}, non incidenti, si stabilisca un' omografia Ω' tra la S_{n-m-1} - stella e lo spazio S_m ed un' omografia Ω'' tra S_{n-l-1} - stella ed uno spazio S_l dell' S_m. Un punto generico A dell' S_n si rappresenti nell' S_n dalla coppia dei punti (A_1, A_2) che secondo Ω' ed Ω'', corrispondono rispettivamente agli spazi che dall' S_{n-m-1} e dall' S_{n-l-1} proiettano il punto A.

Segnalo come interessante lo studio delle diverse proprietà che intervengono in questa rappresentazione e dei diversi casi particolari, soprattutto ove negli spazi lineari S_n ed S_m s' introduca (proiettivamente) una metrica.

(7) Ometto il caso $l = 1$ che abbisognerebbe di una trattazione separata, del tutto analoga a quella svolta (n. 6) per $n = 3$.