

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

**Sui metodi generali di rappresentazione lineare  
della geometria descrittiva**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 6 (1935), p. 132-140

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1935\\_\\_6\\_\\_132\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__132_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUI METODI GENERALI DI RAPPRESENTAZIONE LINEARE DELLA GEOMETRIA DESCRITTIVA

di UGO MORIN a Padova

Il BORDIGA <sup>(1)</sup>, nelle sue vedute unitarie sulla geometria descrittiva, introduce il metodo generale di rappresentazione dello spazio punteggiato mediante coppie ordinate di punti di un piano. Questo metodo, ritrovato da MÜLLER <sup>(2)</sup>, è stato da questi chiamato il metodo più generale (allgemeinstes Zweibil-derprinzip).

Ora, analogamente a quanto ha fatto A. DEL RE <sup>(3)</sup> per un caso particolare, e più in generale MÜLLER e COMESSATTI <sup>(4)</sup>, ho voluto indagare quali sono i possibili metodi di rappresentazione mediante coppie ordinate di punti, ove si pongano unicamente le condizioni che la rappresentazione sia algebrica e che le coppie rappresentatrici dei punti di una retta generica si distribuiscano

<sup>(1)</sup> C. BORDIGA, *I metodi della Geometria descrittiva* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXI (1901-2)] pp. 389-403 e 609-618.

<sup>(2)</sup> MÜLLER, *Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie* [Jhrsb. d. Deutsch. Math. Ver. 14 (1905)] pp. 569-574.

<sup>(3)</sup> A. DEL RE, *Il più generale metodo di rappresentazione che serve di base alla Geometria descrittiva ordinaria* [Rend. Acc. Lincei (5) 17 (1908)] pp. 639-643.

<sup>(4)</sup> A. COMESSATTI, *Considerazioni intorno ai metodi generali di rappresentazione della Geometria descrittiva, ed al teorema di POHLKE* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXXXVII (2), (1927-28)] pp. 579-614.

sopra due rette; rappresentazioni che chiamerò in seguito *lineari*. Pervengo alla conclusione che i metodi di rappresentazione lineari possibili sono unicamente il metodo generale del BORDIGA ed un metodo che ho chiamato *metodo generalizzato di proiezioni quotate* (con tutti i loro casi particolari).

Dopo aver accennato ad un'applicazione di quest'ultimo metodo alla fotogrammetria, generalizzo gli argomenti svolti agli iperspazi: pervenendo a classificare proiettivamente tutti i possibili metodi di rappresentazione lineare di uno spazio lineare  $S_n$  dentro ad uno spazio lineare  $S_m$  ( $n \geq m$ ,  $2m \geq n$ ).

1. La rappresentazione del BORDIGA dello spazio punteggiato  $\Sigma$  mediante coppie ordinate di punti di un piano (quadro)  $\pi$  si ottiene nel seguente modo: Fissati in  $\Sigma$  due punti  $S'$  ed  $S''$  (centri fondamentali) e due omografie non degeneri  $\Omega'$ ,  $\Omega''$  fra le stelle  $S'$ ,  $S''$  ed il quadro  $\pi$ , un punto generico  $A$  di  $\Sigma$  viene rappresentato su  $\pi$  dalla coppia dei punti  $(A_1, A_2)$  che, secondo  $\Omega'$  ed  $\Omega''$ , corrispondono rispettivamente ai raggi  $S'A$  ed  $S''A$ .

2. La più generale rappresentazione *algebraica* dei punti di  $\Sigma$  mediante coppie ordinate di punti del quadro  $\pi$ , si ottiene evidentemente fissando entro alla varietà  $V_4$  di quelle coppie una  $V_3$  *razionale*, e riferendola birazionalmente a  $\Sigma$ . In questa corrispondenza birazionale tra la  $V_3$  e  $\Sigma$  vi potranno essere in  $\Sigma$  dei punti fondamentali, cioè punti tali che ad essi corrispondono nella  $V_3$  curve o superficie (eccezionali).

Imponiamo ora alla rappresentazione algebraica generale il *vincolo proiettivo* cioè prescriviamo che le coppie rappresentatrici  $(A_1, A_2)$  dei punti  $A$  di una retta generica  $a$  di  $\Sigma$  si distribuiscono rispettivamente sopra due rette  $a_1$  ed  $a_2$  (generiche o no) del quadro. Queste rappresentazioni chiameremo, come abbiamo detto nell'introduzione, *lineari*.

3. Il punto  $A_1$  si dirà la prima immagine del punto  $A$ , ed  $A_2$  la seconda; ed analogamente per le immagini  $a_1, a_2$  di una retta  $a$ . Si presentano allora, per la rappresentazione suddetta, due diverse possibilità:

I) sia le prime che le seconde immagini dei punti di  $\Sigma$  si distribuiscono su tutto il quadro  $\pi$ ;

II) mentre (ad es.) le prime immagini si distribuiscono ancora su tutto  $\pi$ , le seconde immagini descrivono una curva (algebraica)  $p$ .

Trattiamo dapprima della corrispondenza tra i punti di  $\Sigma$  e le loro prime immagini. Ci riferiremo in seguito a questa corrispondenza dicendo che  $\pi$  è una *immagine lineare* di  $\Sigma$ . Questa corrispondenza risulterà la stessa per i due casi ora segnalati, di cui faremo seguire la trattazione separata.

4. Un punto generico  $A_1$  di  $\pi$  è la prima immagine di  $\infty^1$  punti di  $\Sigma$ , che generano dunque una curva algebraica  $a$ . Variando  $A_1$  su  $\pi$  otteniamo in questo modo un sistema algebrico  $\infty^2$  di curve di  $\Sigma$ , che indicheremo con  $(S')$ , di indice uno; cioè tale che per un punto generico di  $\Sigma$  passa una sola curva del sistema.

I punti di  $\Sigma$  le cui prime immagini sono punti di una retta generica  $l_1$  di  $\pi$ , costituiscono una superficie algebraica  $\lambda$ , che contiene  $\infty^1$  curve del sistema  $(S')$ . Due punti generici,  $A$  e  $B$ , di questa superficie  $\lambda$  hanno come immagini  $A_1$  e  $B_1$  due punti distinti della retta  $l_1$ . Dunque la retta  $(AB)$ , in quanto ha come immagine la retta  $l_1$ , appartiene alla superficie  $\lambda$ : cioè questa superficie è un piano.

Il punto generico  $A_1$  di  $\pi$  è sostegno di un fascio di raggi  $l_1$ , dunque per la curva algebraica  $a$  del sistema  $(S')$  passano  $\infty^1$  piani del tipo  $\lambda$ , cioè quella curva è un retta.

Poichè due punti di  $\pi$  individuano una retta  $l_1$ , due rette generiche del sistema  $(S')$  sono complanari. Il sistema  $(S')$ , poichè le sue rette non possono appartenere ad un piano fisso in quanto per un punto generico di  $\Sigma$  passa una di esse, deve essere una *stella di raggi*; il cui centro  $S'$  sarà detto il *primo centro fondamentale*.

Tra i raggi  $a$  della stella  $(S')$  ed i punti  $A_1$  di  $\pi$  intercede una corrispondenza (algebraica) *biunivoca*,  $\Omega'$ , tale che ad un fascio di raggi corrisponde una retta punteggiata. Cioè la corrispondenza  $\Omega'$  è un'omografia, che diremo la (prima) *omografia rappresentatrice*.

L'immagine lineare di  $\Sigma$  su  $\pi$  (n. 3) può dunque essere ottenuta nel seguente modo. Si fissi in  $\Sigma$  un punto  $S'$  e si stabilisca una omografia  $\Omega'$  tra la stella di raggi ( $S'$ ) ed il piano punteggiato  $\pi$ . Un punto  $A$  di  $\Sigma$  ha come immagine su  $\pi$  il punto  $A_1$  che corrisponde nell'omografia  $\Omega'$  al raggio  $S'A$ . Una corrispondenza di questo tipo, che interviene in molte questioni geometriche, vogliamo chiamare una *proiezione generalizzata*. In conclusione:

*Un'immagine lineare (n. 3) dello spazio  $\Sigma$  su un piano  $\pi$  si ottiene sempre con una proiezione generalizzata di  $\Sigma$  da un suo punto  $S'$  su  $\pi$ .*

5. È ora immediata la discussione completa del *I° caso* (n. 3). Poichè anche le seconde immagini dei punti di  $\Sigma$  invadono tutto il quadro  $\pi$ , si ottiene una seconda immagine lineare di  $\Sigma$  su  $\pi$ ; generata dunque da una proiezione generalizzata, determinata da un (*secondo*) *centro fondamentale*  $S''$  di  $\Sigma$  e da una (*seconda*) *omografia rappresentatrice*  $\Omega''$  (n. 4).

Rileviamo che i due centri  $S'$  ed  $S''$  sono necessariamente distinti, perchè, ove coincidessero, tutti i punti di un raggio generico della stella ( $S'$ )  $\equiv$  ( $S''$ ) avrebbero la medesima coppia rappresentatrice.

Possiamo dunque concludere che *questo metodo più generale di rappresentazione lineare coincide con quello del BORDIGA* (n. 1).

6. Veniamo ora alla discussione del *II° caso* (n. 3). Si vede che la curva algebrica  $p$  su cui, per ipotesi, si distribuiscono le seconde immagini dei punti di  $\Sigma$  è una retta. Infatti la retta che congiunge due punti qualunque,  $A_2$  e  $B_2$ , di  $p$ , interpretata come seconda immagine di una retta di  $\Sigma$  che congiunge due punti le cui seconde immagini sono  $A_2$  e  $B_2$ , fa parte di  $p$ .

Consideriamo la superficie algebrica  $\lambda$  di  $\Sigma$  i cui punti hanno come seconda immagine un punto fisso (generico)  $L_2$  di  $p$  (e le prime immagini variabili su  $\pi$ ). Variando  $L_2$  su  $p$  si ottiene un sistema algebrico  $\infty^1$  di superficie, che indicheremo con ( $s$ ), di *indice uno*. Infatti, per un punto generico  $L$  di  $\Sigma$  passa una sola superficie del sistema ( $s$ ), quella associata alla seconda

immagine  $L_2$  del punto  $L$ . Il sistema di superficie  $(s)$  è dunque un fascio.

Consideriamo una superficie generica  $\lambda$  del fascio  $(s)$ . Questa ha con una retta generica  $l$  della stella  $(S')$  (n. 4) in comune, oltre (eventualmente) il punto  $S'$ , uno ed un sol punto: quello che ha come prima immagine il punto  $L_1$  corrispondente ad  $l$  nella prima omografia rappresentatrice  $\Omega'$  e come seconda immagine il punto  $L_2$  associato a  $\lambda$ . Dunque se l'ordine di una superficie del fascio  $(s)$  è  $n \geq 2$ , il punto  $S'$  sarà per il fascio un punto base di ordine  $n - 1$ . In particolare se  $n = 1$ , cioè il sistema  $(s)$  è un fascio di piani, l'asse  $s$  di questo fascio non passa per  $S'$ .

Tra il fascio  $(s)$  di superficie (in particolare di piani) e la retta punteggiata  $p$  intercede una corrispondenza algebrica biunivoca, quindi proiettiva. Questa sarà detta la seconda proiettività rappresentatrice  $\Omega''$ .

7. Noti il centro  $S'$ , il fascio  $(s)$  e le due proiettività rappresentatrici  $\Omega'$  e  $\Omega''$  (nn. 4, 6), la rappresentazione è individuata. Preso un punto generico  $A$  di  $\Sigma$ , la sua prima immagine  $A_1$  è il punto corrispondente del raggio  $(S' A)$  nella  $\Omega'$ , e la seconda immagine  $A_2$  il punto corrispondente nella  $\Omega''$  della superficie del fascio  $(s)$  che passa per  $A$ .

Le coppie imagini dei punti di una retta generica  $a$  di  $\Sigma$  stabiliscono tra la prima immagine  $a_1$  di questa retta e la seconda immagine  $a_2 \equiv p$  una corrispondenza algebrica di indici  $(n, 1)$ . Questa sarà quindi una proiettività unicamente nel caso che  $(s)$  sia un fascio di piani.

In questo ultimo caso, per evitare nella rappresentazione di una retta o di un piano, di segnare volta per volta le seconde imagini di alcuni loro punti, si potrà procedere nel seguente modo. Fissati e numerati due o più piani del fascio  $(s)$ , che si potranno chiamare piani di livello, si segnino e numerino, sopra la prima immagine di una retta, le imagini dei punti comuni alla retta obbiettiva e quei piani. Questa immagine si potrà chiamare proiezione graduata della retta. Così, per rappresentare un piano, si segnino e numerino le prime imagini delle rette (di livello) che il piano ha in comune coi piani di livello prefissati.

È immediato quali ulteriori condizioni grafiche e metriche si dovranno porre, per ridurre questo metodo all'ordinario metodo delle proiezioni quotate; colla sola differenza che la quota, anzichè data numericamente si pensi segnata sulla scala grafica. Chiameremo perciò il metodo generale qui considerato con *metodo generalizzato di proiezioni quotate*.

Si osservi che questo metodo si potrebbe, quando  $n = 1$ , considerare come un caso particolare del metodo generale del BORDIGA, ove si abbandoni la condizione che ambedue le omografie rappresentatrici  $\Omega'$ ,  $\Omega''$  siano *non degeneri*, ma si ammetta che, in particolare, una delle due possa essere *degenere di prima specie* <sup>(5)</sup>.

**8. Cenno di un'applicazione alla fotogrammetria.** - Nel metodo generale del BORDIGA (n. 1) si passa dalla coppia rappresentatrice  $(A_1, A_2)$  al punto obiettivo  $A$  intersecando due raggi omologhi delle due stelle  $(S')$  ed  $(S'')$ ; mentrecchè nel metodo generalizzato di proiezioni quotate (n. 7) si interseca un raggio della stella  $(S')$  con un piano del fascio  $(s)$ . Ciò suggerisce di riprendere i problemi fondamentali della fotogrammetria teorica da questo ultimo punto di vista.

Siano date due prospettive di una medesima figura  $F$  dello spazio  $\Sigma$  sopra due quadri  $\pi$  e  $\pi'$ , non orientate (cioè di cui si ignori la posizione nello spazio dei piani e centri di proiezione). Sia  $l_1$  una retta di  $\pi$ , congiungente due punti  $M_1$  ed  $N_1$  le cui corrispondenti immagini  $M'$  ed  $N'$  di  $\pi'$  coincidono. La retta  $l_1$  è dunque traccia di un piano proiettante  $\lambda$  nella prima prospettiva il quale per il fatto che contiene la retta obbiettiva  $MN$ , che è un raggio proiettante nella seconda prospettiva, contiene anche il secondo centro di proiezione <sup>(6)</sup>.

<sup>(5)</sup> A. COMESSATTI, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Parte seconda [Cedam, Padova, 1931] pag. 161.

<sup>(6)</sup> Ciò è come dire che la retta  $l_1$  passa per il punto nodale del piano  $\pi$  (retta nodale). Si noti che sia in una costruzione teorica, ma soprattutto in una costruzione per approssimazioni alla quale in pratica spesso si ricorre, la determinazione di una retta nodale è alquanto più semplice che la costruzione del punto nodale stesso.

Le seconde immagini dei punti del piano  $\lambda$  cadranno dunque pure su una medesima retta  $l'$  di  $\pi'$ . Prendiamo sulla  $l'$  un punto generico  $P'$  e riferiamo il fascio  $(P')$  con una proiettività  $\Pi$  ad una retta qualunque  $p$  di  $\pi$ , in modo che al raggio  $l'$  corrisponda il punto,  $L_2$ , comune alle rette  $p$  ed  $l_1$ .

Ad un punto generico  $A'$  di  $\pi'$  corrisponde così, con proiezione da  $P'$  e con la  $\Pi$ , un determinato punto  $A_2$  di  $p$ . Ad un punto generico  $A$  di  $F$  che abbia come immagine su  $\pi$  un punto  $A_1$  e come immagine su  $\pi'$  il punto  $A'$  corrisponde in questo modo una coppia di punti  $(A_1, A_2)$  di  $\pi$ . La rappresentazione di  $F$  su  $\pi$  così realizzata è, come si rileva direttamente, una proiezione quotata generalizzata (n. 7). Senonché, a partire dalle coppie rappresentatrici  $(A_1, A_2)$  non possiamo ricostruire direttamente la figura obbiettiva perchè non conosciamo la effettiva posizione in  $\Sigma$  degli elementi fondamentali  $S'$  ed  $s$ , nè le due omografie rappresentatrici  $\Omega'$ ,  $\Omega''$ . Ma con una semplice costruzione possiamo determinare una figura  $\bar{F}$  omografica alla figura  $F$ .

Perciò prendiamo un piano generico per la retta  $l_1$  e scegliamo in esso genericamente un punto  $S'$  ed una retta  $s$ .

Facciamo corrispondere ad un punto  $A$  della  $F$  il punto  $\bar{A}$  di  $\Sigma$  che si ottiene intersecando il raggio  $(SA_1)$  col piano  $(sA_2)$ . La corrispondenza  $\Omega$  così generata tra  $F$  ed  $\bar{F}$  è un'omografia di  $\Sigma$ .

Infatti, indicato con  $L$  il punto d'incontro di una retta generica  $a$  di  $\Sigma$  col piano  $\lambda$ , proiettante in ambedue le prospettive, la sua immagine  $L_1$  su  $\pi$  è il punto comune alla retta  $a_1$ , immagine di  $a$ , e la retta  $l_1$ ; ed analogamente l'immagine  $A'$  su  $\pi'$  è il punto comune delle rette  $a'$  ed  $l'$ . Trasformando la retta  $a'$  nella retta  $p$ , mediante proiezione da  $P'$  e la proiettività  $\Pi$ , al punto  $L'$  corrisponde il punto  $L_2$  (comune alle rette  $l_1$  e  $p$ ). Dunque nella proiettività tra le rette  $a_1$  e  $p$ , in cui si corrispondono le coppie  $(A_1, A_2)$  rappresentatrici dei punti della retta  $a$ , la retta  $l_1$  congiunge la coppia di punti corrispondenti  $(L_1, L_2)$ .

Proiettando da  $S'$  i punti  $A_1$  della  $a_1$  e da  $s$  i punti corrispondenti  $A_2$  della  $p$  si ottengono un fascio di raggi ed un fascio di piani in corrispondenza proiettiva. Ma questa proiettività è



una prospettività, perchè il raggio  $(S' L_1)$  appartiene al piano corrispondente  $(s L_2)$ . Dunque alla retta generica  $a$  di  $F$  corrisponde nella  $\Omega$  proiettivamente una retta  $\bar{a}$  di  $\bar{F}$ , cioè la  $\Omega$  è un' omografia.

### 9. Generalizzazione agli iperspazi.

Se tra uno spazio lineare  $S_n$  ed uno spazio lineare  $S_m$  ( $n > m \geq 2$ ) intercede una corrispondenza algebrica, tale che ad un punto generico dell'  $S_n$  corrisponde un punto generico dell'  $S_m$ , e tale che ad una retta punteggiata dell'  $S_n$  corrisponde una retta punteggiata dell'  $S_m$ , diremo che l'  $S_m$  è un' *immagine lineare* dell'  $S_n$  (n. 3).

La varietà algebrica  $V_{n-m}$  ( $n - m \geq 1$ ) dei punti dell'  $S_n$  che hanno nell'  $S_m$  come immagine un medesimo punto  $P_1$ , descrive, al variare di  $P_1$  nell'  $S_m$ , un sistema algebrico  $\infty^m$  di  $V_{n-m}$  di indice 1, che indicheremo con  $(S_{n-m-1})$ . Facciamo descrivere al punto  $P_1$  una retta generica  $r_1$  dell'  $S_m$ . Il corrispondente sistema algebrico  $\infty^1$  di  $V_{n-m}$  genera una varietà  $V_{n-m+1}$ .

Due punti generici,  $P$  e  $Q$ , di questa varietà hanno come immagini  $P_1$  e  $Q_1$  due punti distinti della retta  $r_1$ . Dunque la retta  $(PQ)$ , in quanto ha come immagine la retta  $r_1$ , appartiene alla  $V_{n-m+1}$ , cioè questa varietà è uno spazio lineare  $S_{n-m+1}$ .

Poichè per un punto  $P_1$  dell'  $S_m$  passano  $\infty^{m-1}$  ( $m - 1 \geq 1$ ) rette  $r_1$ , per la varietà  $V_{n-m}$  dei punti dell'  $S_n$  che hanno come immagine  $P_1$ , passano  $\infty^{m-1}$  spazi lineari  $S_{n-m+1}$ : cioè questa varietà è pure uno spazio lineare  $S_{n-m}$ . E infine, poichè due punti dell'  $S_m$  individuano una retta  $r_1$ , due generici spazi  $S_{n-m}$  del sistema  $(S_{n-m-1})$  appartengono ad un  $S_{n-m+1}$ . In base a quest' ultima condizione <sup>(6)</sup>, e perchè dobbiamo escludere che gli  $S_{n-m}$  appartengano ad un  $S_{n-m+1}$  fisso in quanto per un punto generico dell'  $S_n$  passa uno di essi, possiamo concludere che questi spazi passano per un medesimo  $S_{n-m-1}$ , cioè formano una  $S_{n-m-1}$  - stella.

Tra gli  $S_{n-m}$  della  $S_{n-m-1}$  - stella ed i punti dell'  $S_m$ , intercede una corrispondenza *biunivoca*  $\Omega'$ , nella quale ad un

<sup>(6)</sup> E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* [G. Principato, Messina 1923] pag. 16.

fascio di  $S_{n-m}$  corrisponde una retta punteggiata. Dunque la  $\Omega'$  è un'omografia (omografia rappresentatrice). Estendendo l'accezione introdotta al n. 4, possiamo concludere:

*Un'immagine lineare di uno spazio lineare  $S_n$  dentro uno spazio lineare  $S_m$  ( $n > m \geq 2$ ) si ottiene sempre con una proiezione generalizzata dell' $S_n$  da un suo  $S_{n-m-1}$  sopra l' $S_{n-m}$ .*

**10.** Una rappresentazione lineare di uno spazio lineare  $S_n$  in uno spazio lineare  $S_m$  ( $n \geq m \geq 2$ ), tale che, mentre le prime immagini appartengano a tutto l' $S_m$ , le seconde immagini appartengano ad un  $S_l$  dell' $S_m$  ( $m \geq l \geq 2$ ,  $m + l \geq n$ ), (<sup>7</sup>), si compone dunque di due distinte *immagini lineari*. In conclusione:

*La più generale rappresentazione lineare di uno spazio lineare  $S_n$  in uno spazio lineare  $S_m$  ( $n > m \geq l \geq 2$ ) si ottiene nel seguente modo.*

*Presi nell' $S_n$  uno spazio lineare  $S_{n-m-1}$  ed uno spazio lineare  $S_{n-l-1}$ , non incidenti, si stabilisca un'omografia  $\Omega'$  tra la  $S_{n-m-1}$  - stella e lo spazio  $S_m$  ed un'omografia  $\Omega''$  tra  $S_{n-l-1}$  - stella ed uno spazio  $S_l$  dell' $S_m$ . Un punto generico  $A$  dell' $S_n$  si rappresenti nell' $S_m$  dalla coppia dei punti  $(A_1, A_2)$  che secondo  $\Omega'$  ed  $\Omega''$ , corrispondono rispettivamente agli spazi che dall' $S_{n-m-1}$  e dall' $S_{n-l-1}$  proiettano il punto  $A$ .*

Segnalo come interessante lo studio delle diverse proprietà che intervengono in questa rappresentazione e dei diversi casi particolari, soprattutto ove negli spazi lineari  $S_n$  ed  $S_m$  s'introduca (proiettivamente) una metrica.

(<sup>7</sup>) Ometto il caso  $l = 1$  che abbisognerebbe di una trattazione separata, del tutto analoga a quella svolta (n. 6) per  $n = 3$ .