RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

R. CALAPSO

Alcune esplicitazioni intorno ad una trasformazione di Lie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 6 (1935), p. 44-56

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__44_0>

ALCUNE ESPLICITAZIONI INTORNO AD UNA TRASFORMAZIONE DI *LIE*.

di R. CALAPSO, *a Messina*.

Nel presente lavoro ci riferiamo alla trasformazione di LIE delle sfere in rette ed alle relative applicazioni alla teoria delle trasformazioni delle superficie, a norma di quanto è riportato nell' opera del DARBOUX ai nn. 157, 168, 978 e seguenti (1).

Noi siamo stati invogliati a ripigliare questa teoria dal fatto che lo stesso DARBOUX dichiara (vol. IV pag. 176 anno 1896) che il soggetto merita di essere ancora studiato, e noi crediamo di poterlo ulteriormente sviluppare trattando la seguente questione:

Nella trasformazione di LIE (che porta da una superficie riferita alle asintotiche in una superficie riferita alle linee di curvatura) esplicitare i legami che passano tra gl' invarianti della prima - rispetto al gruppo proiettivo - e gl' invarianti dell' altra - rispetto al gruppo conforme (2).

(1) È bene riportare quanto dice il DARBOUX alla fine del n. 157:

« La trasformazione di LIE fa corrispondere all' insieme delle rette tangenti ad una superficie (S') l' insieme delle sfere tangenti a una superficie (S). A tutte le rette tangenti ad (S') in un suo punto M' corrispondono tutte le sfere tangenti ad (S) in un suo punto M. Quando il punto M' descrive un' asintotica di (S'), il punto M descrive una linea di curvatura di (S). Segue che ad ogni superficie di cui si sanno determinare le linee asintotiche si può far corrispondere - per trasformazione di LIE - un' altra superficie di cui si conosceranno le linee di curvatura e viceversa ».

(2) Vedi: P. CALAPSO - *Sugl' invarianti del gruppo delle trasformazioni conformi dello spazio* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1906).

Cfr. FUBINI e ČECH - *Geometria proiettiva differenziale* (Tomo I, pag. 94).

Ora, la trattazione del DARBOUX si presta poco a questo ulteriore sviluppo, sicchè noi abbiamo ripreso la trattazione della detta trasformazione di LIE (per le superficie) deducendola dalla teoria delle trasformazioni di RIBAUCOUR, nel seguente modo:

Partendo da una superficie S, riferita alle linee di curvatura, alla totalità delle congruenze di sfere di RIBAUCOUR, aderenti alla S, corrisponde – per la trasformazione di LIE delle sfere in rette – la totalità delle congruenze W aderenti ad una stessa superficie S'. D'altra parte, considerata la sfera avente il centro in uno dei centri principali di curvatura e passante per il generico punto M della superficie, si riconosce che questa descrive (al variar del punto sulla superficie) una congruenza di RIBAUCOUR, aderente alla S, da dirsi congruenza-limite perchè le focali coincidono nell'unica superficie S. Ne segue che trasformando – secondo LIE – la detta sfera in retta, si ottiene una congruenza W *le cui focali pure coincidono* e l'unico fuoco M' sul generico raggio, descrive la superficie trasformata S' della data superficie S (secondo LIE).

Seguendo questa via si determinano, in modo rapido, le formole del passaggio (in termini finiti) della S nella S' e viceversa (3) e si è in grado di *esplicitare* i legami tra gl'invarianti proiettivi della S' e gl'invarianti conformi della S.

In ultimo applichiamo la detta esplicitazione alla determinazione delle trasformate di LIE delle supercie N di GUICHARD (4) e riconosciamo che le dette trasformate costituiscono una classe di superficie R (5), precisamente quella stessa da noi determinata in altro lavoro (6), per la quale cioè tra la funzione θ che individua la generica superficie N e gl'invarianti proiettivi B

(3) Cfr. le nostre formule (8) e (9) del passaggio della S nella S' con quelle riportate dal DARBOUX a pg. 172 e 175 del vol. IV.

(4) Vedi: P. CALAPSO – *Alcune superficie di* GUICHARD *e le relative trasformazioni* (Annali di Matematica 1905).

A questa memoria rimandiamo il lettore per le formole e per alcuni risultati di cui ci serviamo in merito alle dette superficie N.

(5) Vedi: FUBINI e ČECH – *Geometria proiettiva differenziale.*

(6) R. CALAPSO – *Alcune superficie di* GUICHARD *e loro trasformazione in superficie R* (Bollettino della Unione Matem. It. 1935, N. 2).

e P della corrispondente superficie R [7] intercede il legame:

$$B = -i\frac{\partial\theta}{\partial u}; \quad P = i\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

In questa nota abbiamo omesso qualche procedimento d'inversione e qualche dimostrazione e ciò per non accrescere la mole del lavoro; ma diamo gli elementi per poter dedurre tutto.

Sarà oggetto di un prossimo lavoro uno studio più dettagliato e sistematico della detta trasformazione di Lie specialmente in relazione al modo di trasformarsi della S quando S' subisce una trasformazione proiettiva ed in relazione alla trasformazione per congruenza W esplicitata sugl'invarianti proiettivi [8].

§ 1 - Nuova trattazione della trasformazione di LIE

1. Assumiamo una superficie S dello spazio euclideo ordinario e sia (K_1) la famiglia delle linee di curvatura di un sistema, (K_2) quella dell'altro sistema. Per il punto generico M della superficie S facciamo passare la sfera L_1, tangente in M alla superficie ed avente contatto tripunto con la linea K_1 passante per M; avremo così definito un sistema ∞^2 di sfere, una per ogni punto della superficie.

Il sistema $[L_1]$ di sfere, così costruito, si cambia per trasformazione di Lie in un sistema $[G_1]$ di rette, interpretabili come le tangenti alle asintotiche (K'_1) – di uno stesso sistema – di una superficie S' (perfettamente determinata e costruibile in termini finiti)

(7) Fubini e Čech, l. c. (5) Cap. V (ed. 1926).

(8) Cfr. con Fubini e Čech, l. c. Cap. V (ed. 1926) e con Picone: *Sulle congruenze rettilinee W* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Tomo XXXVII, I sem. 1914).

Costruiamo similmente per il punto P la sfera L_2 tangente in M alla superficie S ed avente contatto tripunto con la linea K_2 passante per M; il sistema $[L_2]$ di sfere, così costruito, si cambia per trasformazione di Lie in un sistema $[G_2]$ di rette, che sono le tangenti alle asintotiche (K'_2) dell'altro sistema della stessa superficie S'.

Per dimostrare questi teoremi (a norma del seguente n. 2 e del n. 3) notiamo anzitutto che le dette sfere L_1 ed L_2 sono proprio quelle che hanno i centri nei centri principali di curvatura della data superficie (e passano per M).

Infatti consideriamo per M la linea K_1, il centro C di curvatura della sezione normale tangente a K_1 ed il centro di curvatura C' della linea K_1.

Sia C_1 il simmetrico di M rispetto a C e sia C'_1 il simmetrico di M rispetto a C'. La sfera di centro C e passante per M contiene evidentemente il punto C_1; ma contiene anche C'_1 perchè *per il teorema di* Meusnier il triangolo $P\,C'_1\,C_1$ è rettangolo in C'_1. Frattanto il circolo sezione di questa sfera col piano passante per la tangente a K_1 e per C'_1 coincide col circolo osculatore a K_1; la sfera costruita contiene dunque il circolo osculatore alla curva K_1 ed è quindi in contatto tripunto (almeno) con la curva K_1. Vedremo che il contatto è tripunto e non più, eccetto il caso in cui il punto M della superficie sia immagine di un flecnodo (9) di S' o addirittura che la superficie S' sia rigata; in tal caso se (K'_1) sono le generatrici rettilinee, ogni sfera L_1 è in contatto quadripunto con la relativa curva K_1.

2. Ciò premesso denotiamo con $x\ y\ z$ le coordinate ortogonali del generico punto M della superficie S, con u e v i parametri delle linee di curvatura di S e con X_r, Y_r, Z_r $(r=1, 2, 3)$ i coseni direttori degli spigoli del triedro principale; introducendo le consuete notazioni per gli elementi della superficie si hanno le equazioni:

(9) Vedi Fubini e Čech, l. c. pag. 89.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = h\, X_1 & \dfrac{\partial x}{\partial v} = l\, X_2 \\[2ex] \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\, p\, X_2 - a\, X_3 & \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = q\, X_2 \\[2ex] \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = p\, X_1 & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\, q\, X_1 - b\, X_3 \\[2ex] \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = a\, X_1 & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = b\, X_2 \end{cases}$$

per la cui integrabilità sono necessarie e sufficienti le equazioni (di Codazzi e di Gauss):

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial v} = p\, l & \dfrac{\partial l}{\partial u} = q\, h \\[2ex] \dfrac{\partial a}{\partial v} = p\, b & \dfrac{\partial b}{\partial u} = q\, a \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial v} + \dfrac{\partial q}{\partial u} + a\, b = 0\,. \end{cases}$$

Se $v = \text{cost.}$ è la famiglia di linee di curvatura sopra indicata con (K_1), le coordinate del centro di curvatura C sono:

$$x - \frac{h}{a}\, X_3\,; \quad y - \frac{h}{a}\, Y_3\,; \quad z - \frac{h}{a}\, Z_3\,;$$

quindi se con

$$(3)\qquad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ i = \sqrt{-1}$$

indichiamo le coodinate della sfera di centro C e passante per M, avremo:

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha_1 = X_3 - \dfrac{a}{h}\, x\,; \quad \alpha_2 = Y_3 - \dfrac{a}{h}\, y\,; \quad \alpha_3 = Z_3 - \dfrac{a}{h}\, z \\[2ex] \alpha_4 + i\,\alpha_5 = \dfrac{a}{h}\,; \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 - 1 = 0\,. \end{cases}$$

3. Interpretiamo le (3) come coordinate di Klein di una retta G_1 dello spazio, per il che le coordinate raggio p_{rs} hanno le espressioni:

$$(5)\qquad \begin{cases} p_{14} = \alpha_1 - 1 = (X_3 - 1) - \dfrac{a}{h} x \\[2ex] p_{24} = \alpha_2 + i\,\alpha_3 = (Y_3 + i\,Z_3) - \dfrac{a}{h} (y + i\,z) \\[2ex] p_{34} = \alpha_4 + i\,\alpha_5 = \dfrac{a}{h} \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} p_{23} = \alpha_1 + 1 = (X_3 + 1) - \dfrac{a}{h} x \\[2ex] p_{31} = \alpha_2 - i\,\alpha_3 = (Y_3 - i\,Z_3) - \dfrac{a}{h} (y - i\,z) \\[2ex] p_{12} = \alpha_4 - i\,\alpha_5 \end{cases}$$

e le equazioni della retta sono:

$$(7)\qquad \begin{cases} p_{24}\, z' - p_{34}\, y' = p_{23} \\ p_{34}\, x' - p_{14}\, z' = p_{31} \end{cases}.$$

Consideriamo allora il punto M' (di questa retta) le cui coordinate (x', y', z') siano date dalle formole:

$$(8)\qquad z' = \frac{1 + X_3}{Y_3 + i\,Z_3} \qquad \left(\text{ossia}\ \ z' = \frac{Y_3 - i\,Z_3}{1 - X_3}\right)$$

$$(9)\qquad \begin{cases} x' = -(y - i\,z) - x\,z' \\ y' = x - (y + i\,z)\, z' \end{cases}.$$

e dimostriamo che questo punto genera una superficie per cui $v = \text{cost}$ ed $u = \text{cost}$ sono le asintotiche e le rette $[G_1]$ sono le tangenti alla famiglia di asintotiche $v = \text{cost}$.

Per derivazione da (8) e (9), tenendo conto delle (1) e (2) e delle identità relative all' ortogonalità del determinante dei nove coseni $X_r\ Y_r\ Z_r$, segue, con un procedimento che omettiamo, il seguente gruppo di formule:

$$(10)\qquad \begin{cases} \bar{\theta}\,\dfrac{\partial x'}{\partial u} = -a\,x - h\,(1 - X_3) \\ \bar{\theta}\,\dfrac{\partial x'}{\partial v} = -i\,b\,x - i\,l\,(1 - X_3) \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \bar{\theta}\,\dfrac{\partial y'}{\partial u} = h\,(Y_3 + i\,Z_3) - a\,(y + i\,z) \\ \bar{\theta}\,\dfrac{\partial y'}{\partial v} = i\,l\,(Y_3 + i\,Z_3) - i\,b\,(y + i\,z) \end{cases}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} \bar{\theta}\,\dfrac{\partial z'}{\partial u} = a \\ \bar{\theta}\,\dfrac{\partial z'}{\partial v} = b\,i \end{cases}$$

in cui si è posto

$$(13)\qquad \bar{\theta} = \frac{(Y_3 + i\,Z_3)\,(1 - X_3)}{X_1 - i\,X_2}.$$

Confrontando queste con le (5) risulta:

$$(14)\qquad \frac{\partial x'}{\partial u} : \frac{\partial y'}{\partial u} : \frac{\partial z'}{\partial u} = p_{14} : p_{24} : p_{34}$$

cioè le rette $[G_1]$ sono le tangenti alle linee $v =$ cost della superficie S'. Questa risulta riferita alle asintotiche.

Infatti da (10) (11) (12) si trae che i coseni direttori della normale alla S' sono dati dalle formole:

$$(15)\qquad X' = Y_3 + i\,Z_3;\quad Y' = 1 - X_3;\quad Z' = x\,(Y_3 + i\,Z_3) + \\ + (y + i\,z)\,(1 - X_3)$$

e da queste per derivazione si ricava

$$\Sigma \frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial X'}{\partial u} = 0 ; \quad \Sigma \frac{\partial x'}{\partial v} \frac{\partial X'}{\partial v} = 0 \tag{16}$$

$$\theta \, \Sigma \frac{\partial x'}{\partial v} \frac{\partial X'}{\partial u} = \tag{17}$$

$$= [i\,(Y_1 + i\,Z_1)\,(1 - X_3) + i\,X_1\,(Y_3 + i\,Z_3)]\,(b\,h - a\,l)\,.$$

Le (16) dimostrano appunto che sulla superficie S' le linee $u =$ cost e $v =$ cost sono le asintotiche; in quanto alla (17) si osserva che l' espressione in parentesi quadra è diversa da zero, giacchè alle condizioni iniziali

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ha il valore -1; quindi deduciamo

$$\Sigma \frac{\partial x'}{\partial v} \frac{\partial X'}{\partial u} \neq 0. \tag{18}$$

Eccezione si ha soltanto nel caso in cui $b\,h - a\,l = 0$; si può dimostrare che questo caso si presenta quando la superficie di partenza S è una sfera.

§ 2. - I legami fra l' invarianti.

Possiamo ora formare le espressioni degl' invarianti proiettivi di S' mediante gl' invarianti di S rispetto al gruppo conforme.

Gl' invarianti fondamentali di S rispetto alle trasformazioni conformi sono ([10])

([10]) P. Calapso l. c. ([2]).

$$\omega = b - \frac{a\,l}{h}; \qquad \Omega = a - \frac{b\,h}{l} \tag{19}$$

$$W = -\,\omega\,\Omega + 2\,\frac{\Omega}{\omega}\left[2\,\frac{\partial^2 \log h}{\partial v^2} - 2\,\frac{\partial \log h}{\partial v}\,\frac{\partial \log l}{\partial v} + \right. \tag{20}$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \log h}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{1}{h}\,\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 + b^2\right]$$

e questi invarianti ω, Ω, W sono caratterizzati dalle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &4\,\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\omega}{\Omega}\left(\frac{\partial^2 \log \Omega}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \log \omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial \log \Omega}{\partial v}\right)\right] = -\frac{\omega}{\Omega}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\Omega^2 - \frac{\Omega}{\omega}W\right) \\ &4\,\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\Omega}{\omega}\left(\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \log \omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial \log \Omega}{\partial v}\right)\right] = -\frac{\Omega}{\omega}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\omega^2 + \frac{\omega}{\Omega}W\right). \end{aligned}\right. \tag{21}$$

D' altra parte, essendo la superficie S' riferita alle asintotiche, le funzioni x', y', z' soddisfano ad un sistema della forma [11]

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x'}{\partial u^2} &= A\,\frac{\partial x'}{\partial u} + B\,\frac{\partial x'}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x'}{\partial v^2} &= P\,\frac{\partial x'}{\partial u} + Q\,\frac{\partial x'}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Sostituendo in queste espressioni (10) e (12) si ha:

[11] Cfr. con Fubini e Čech l. c. pg. 94. Per accordare le notazioni ricordiamo che basta porre $b = B$; $p = P$; $W_1 = L + \dfrac{\partial b}{\partial v}$; $W_2 = M + \dfrac{\partial p}{\partial u}$. Noi assumiamo gl' invarianti proiettivi della S' con le denominazioni:

$$B;\ P;\ W_1;\ W_2.$$

I simboli b e p di cui ora parliamo non sono da confondere con le quantità già adoperate nel sistema (1) e (2).

$$(23)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial u}+A\,\overline{\theta}\right)\dfrac{\partial x'}{\partial u}+B\overline{\theta}\,\dfrac{\partial x'}{\partial v}=-\dfrac{\partial a}{\partial u}x-\dfrac{\partial h}{\partial u}(1-X_3) \\ \left(\dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial u}+A\,\overline{\theta}\right)\dfrac{\partial z'}{\partial u}+B\overline{\theta}\,\dfrac{\partial z'}{\partial v}=\dfrac{\partial a}{\partial u}. \end{cases}$$

Se ne deduce:

$$(24)\qquad Bi\left(\frac{b}{l}-\frac{a}{h}\right)=\frac{h}{l}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a}{h}\right).$$

Similmente

$$(25)\quad \begin{cases} P\overline{\theta}\,\dfrac{\partial x'}{\partial u}+\left(\dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial v}+Q\,\overline{\theta}\right)\dfrac{\partial x'}{\partial v}=-i\dfrac{\partial b}{\partial v}x-i\dfrac{\partial l}{\partial v}(1-X_3) \\ P\overline{\theta}\,\dfrac{\partial z'}{\partial u}+\left(\dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial v}+Q\,\overline{\theta}\right)\dfrac{\partial z'}{\partial v}=i\dfrac{\partial b}{\partial v}, \end{cases}$$

e si trova

$$(24\text{ bis})\qquad Pi\left(\frac{b}{l}-\frac{a}{h}\right)=\frac{l}{h}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b}{l}\right).$$

Ciò posto, gl' invarianti proiettivi della S', con riferimento al sistema (22) sono [cfr. l. c. ([12])]

$$B;\ P;\ W_1=\frac{\partial A}{\partial u}-\frac{1}{2}A^2-BQ;\ W_2=\frac{\partial Q}{\partial v}-\frac{1}{2}Q^2-AP$$

e si tratta di esprimere questi in funzione di ω, Ω W (vedi le (19) (20) (21)).

Per i primi due, ricordando le (1) e (2) si trae

$$\frac{\partial \omega}{\partial u}=-l\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a}{h}\right).$$

Ma si ha pure

$$\frac{\omega}{l} = \frac{b}{l} - \frac{a}{h}; \quad -\frac{\Omega}{h} = \frac{b}{l} - \frac{a}{h}$$

perciò segue

$$\frac{h}{l} = -\frac{\Omega}{\omega}$$

e quindi la (24) da:

$$\text{(26)} \qquad Bi = \frac{\Omega}{\omega}\frac{\partial \log \Omega}{\partial u}.$$

Similmente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = -h\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b}{l}\right)$$

e per conseguenza

$$\text{(27)} \qquad Pi = -\frac{\omega}{\Omega}\frac{\partial \log \Omega}{\partial v}.$$

Molto laborioso è il procedimento per mezzo del quale si ricavano le altre due formole relative a W_1 e W_2. Ci limitiamo a trascrivere il risultato finale, cioè:

$$\text{(28)} \qquad W_1 - \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial^2 \log \Omega}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \Omega}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\Omega^2 - \frac{\Omega}{\omega}W\right)$$

$$\text{(29)} \qquad W_2 - \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \omega}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\omega^2 + \frac{\omega}{\Omega}W\right)$$

Le formole (26) - (27) - (28) - (29) esprimono appunto gl' invarianti proiettivi B, P, W_1 e W_2 di S' per mezzo degl' invarianti conformi ω, Ω, W della superficie S.

Rimandiamo ad altro lavoro l' inversione delle dette formole.

§ 3. - Deduzione di una classe di superficie R.

La formazione delle superficie R è equivalente alla formazione delle reti O isoterme di uno spazio a quattro dimensioni ([12]). Qui, valendoci della trasformazione di Lie - e dopo fatta l'anzidetta esplicitazione sugl' invarianti - possiamo - p. es. - dedurre una classe di superficie R, senza uscire dallo spazio a tre dimensioni.

Partiamo da una superficie N di Guichard ([13]) che riferiamo alle linee di curvatura; per queste superficie, le funzioni fondamentali introdotte mediante le (1) hanno le espressioni [l. c. (4)]

$$(30) \quad \begin{cases} h = e^{\omega} \operatorname{sen} h\, \theta\,; & l = e^{\omega} \cos h\, \theta \\ a = -\cos h\, \theta - H \operatorname{sen} h\, \theta\,; & b = -\operatorname{sen} h\, \theta - H \cos h\, \theta \end{cases}$$

[in queste, che riportiamo dal l. c. ([4]), le funzioni trigonometriche sono *iperboliche*; la θ non è da confondere con quella introdotta nelle (10) (11) (12)] ([14]).

Se introduciamo l' invariante conforme W, ponendo:

$$(31) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + \frac{1}{2 \operatorname{sen} h^2 \theta}\left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2 \cos h^2 \theta}\left(\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)^2 + \operatorname{tg} h\, \theta \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \\ &+ \cot h\, \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \frac{1}{2} \cos h\, 2\theta\, (1 + H^2) + 2H \operatorname{sen} h\, \theta \cos h\, \theta + W = 0 \end{aligned}$$

le funzioni θ e W soddisfano alle equazioni [P. Calapso l. c. ([4])]:

([12]) Il detto passaggio è stato da me esplicitato nella nota: R. Calapso - *Riduzione della deformazione proiettiva di una superficie R alla trasformazione C_m delle superficie isoterme* (Rend. della R. Acc. de. Lincei, vol. VII, serie 6ª 1928).

([13]) Vedi: P. Calapso l. c. ([4]).

([14]) In questo paragrafo la lettera h posta dopo il nome di una funzione trigonometrica sta ad indicare che questa è *iperbolica*.

$$
(32) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{1}{\cos^2 h\,\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{1}{\operatorname{sen} h^2\,\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} \\
&\quad - \frac{1}{\operatorname{sen} h\,\theta \cos h\,\theta}\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v^2} - 2\operatorname{tg} h\,\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}W, \\
\frac{\partial W}{\partial v} &= -\frac{1}{\cos h^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{1}{\operatorname{sen} h^2\,\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} \\
&\quad + \frac{1}{\operatorname{sen} h\,\theta \cos h\,\theta}\frac{\partial^3\theta}{\partial u^2\,\partial v} - 2\cot h\,\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}W.
\end{aligned}
\right.
$$

Per avere gl'invarianti proiettivi della superficie trasformata di N secondo Lie, basta applicare le nostre formole (24) e (24 bis).

Partiamo dalla (24), cioè

$$
(33) \qquad Bi\,(b h - a l) = h\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial h}{\partial u}.
$$

Si ha per le (30)

$$
b h - a l = e^{\omega}
$$

$$
h\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial h}{\partial u} = e^{\omega}\frac{\partial\theta}{\partial u} + e^{\omega}\operatorname{sen} h^2\,\theta\left[(H + \cot h\,\theta)\frac{\partial\omega}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial u}\right].
$$

Ma l'espressione in parentesi al 2° membro è nulla [vedasi P. Calapso l. c. ([4]) § II formole (B)] quindi rimane:

$$
h\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial h}{\partial u} = e^{\omega}\frac{\partial\theta}{\partial u}
$$

e dalla (33) segue

$$
Bi = \frac{\partial\theta}{\partial u}
$$

similmente

$$
Pi = -\frac{\partial\theta}{\partial v}
$$

e perciò le trasformate (secondo Lie) delle superficie N di Guichard costituiscono una classe di superficie R.