

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO TURRI

**Omografie razionali proiettivamente distinte  
nel campo razionale e non nel campo reale  
o nel campo complesso**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 7 (1936), p. 111-127

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1936\\_\\_7\\_\\_111\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1936__7__111_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# OMOGRAFIE RAZIONALI PROIETTIVAMENTE DISTINTE NEL CAMPO RAZIONALE E NON NEL CAMPO REALE O NEL CAMPO COMPLESSO

di TULLIO TURRI a Cagliari

Riassumo i risultati ottenuti.

« Condizione necessaria e sufficiente perchè, data un'omografia razionale  $\alpha$ , esistano omografie razionali proiettivamente distinte da  $\alpha$  nel campo razionale ma proiettivamente identiche nel campo reale o solo nel campo complesso, è che la  $\alpha$  sia permutabile con omografie che non ne lasciano fissi gli spazi caratteristici ».

Le omografie permutabili con omografie che ne scambiano gli spazi caratteristici, sono state studiate da DEL PRETE <sup>(1)</sup>; le diremo « omografie di DEL PRETE ».

La equazione caratteristica di un'omografia razionale  $\alpha$  di DEL PRETE è della forma

$$\rho^{qs} + c_q \rho^{q(s-1)} + c_{2q} \rho^{q(s-2)} + \dots + c_{qs} = 0,$$

con  $q > 1$  (la proprietà non è tuttavia invertibile).

(1) G. DEL PRETE: *Le omografie e correlazioni permutabili fra di loro in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* [Giornale di matematiche di BATTAGLINI; vol. 37, (1899), pp. 107-123; vol. 38, (1900), pp. 40-62].

Si può vedere in proposito anche:

T. TURRI: *Sottogruppo commutativo del gruppo delle omografie permutabili con una data - Caso eccezionale* [Rendiconti del Reale Istituto Lombardo; vol. LXI, (1928), pp. 581-590].

Un' omografia razionale  $\beta$  proiettivamente identica alla  $\alpha$  nel campo complesso ha la equazione caratteristica

$$\rho^{qs} + g c_q \rho^{q(s-1)} + g^2 c_{2q} \rho^{q(s-2)} + \dots + g^s c_{sq} = 0.$$

Se  $q$  è dispari, ovvero se  $q$  è pari e nello stesso tempo  $g$  è positivo, la  $\beta$  è proiettivamente identica ad  $\alpha$  nel campo reale, ma è proiettivamente distinta da  $\alpha$  nel campo razionale per tutti i valori di  $g$  che non sono la potenza  $q^{\text{ma}}$  di un numero razionale. Se  $q$  è pari e nello stesso tempo  $g$  è negativo, la  $\beta$  è proiettivamente distinta da  $\alpha$  nel campo reale.

### § 1. - Sulla relazione tra matrici: $k T A T^{-1} = B$ .

1. Le matrici di cui parleremo nel presente lavoro, s'intenderanno quadrate e non degeneri; le omografie di cui parleremo, s'intenderanno non degeneri.

Sia la relazione

$$(1) \quad k T A T^{-1} = B,$$

dove  $A$ ,  $B$ ,  $T$  sono matrici dello stesso ordine  $n + 1$  e  $k$  un numero (per cui vengono moltiplicati gli elementi della  $T A T^{-1}$ ); ci gioverà tuttavia scrivere al posto della (1) la

$$(1^{\text{bis}}) \quad (k U) T A T^{-1} = B,$$

dove  $(k U)$  è la matrice di ordine  $n + 1$ , i cui elementi sulla diagonale principale sono eguali a  $k$ , mentre i rimanenti sono nulli.

È noto che si dice matrice caratteristica di  $A$  la matrice che si ottiene da  $A$  aggiungendo agli elementi sulla diagonale principale la indeterminata  $-\rho$ ; e si dice equazione caratteristica di  $A$  l'equazione di grado  $n + 1$  in  $\rho$ , che si ha eguagliando a zero il determinante della matrice caratteristica.

Sia  $\rho_j$  una radice dell'equazione caratteristica di  $A$ , e i

divisori elementari della matrice caratteristica di  $A$ , che contengono  $\rho_j$ , siano

$$(\rho - \rho_j)^{e_1}, (\rho - \rho_j)^{e_2}, \dots, (\rho - \rho_j)^{e_p};$$

per la (1) ovvero per la (1<sup>bis</sup>) i divisori elementari della matrice caratteristica di  $B$ , i quali contengono la radice  $k\rho_j$  dell'equazione caratteristica di  $B$ , sono

$$(\rho - k\rho_j)^{e_1}, (\rho - k\rho_j)^{e_2}, \dots, (\rho - k\rho_j)^{e_p}.$$

Converremo di dire che le due radici  $\rho_j$  e  $k\rho_j$  sono *corrispondenti rispetto alla matrice  $T$* .

Sia

$$(2) \quad \rho^{n+1} + c_1 \rho^n + c_2 \rho^{n-1} + \dots + c_{n+1} = 0,$$

l'equazione caratteristica di  $A$ ; per la (1<sup>bis</sup>) la equazione caratteristica di  $B$  è

$$(3) \quad \rho^{n+1} + k c_1 \rho^n + k^2 c_2 \rho^{n-1} + \dots + k^{n+1} c_{n+1} = 0;$$

si deduce di qui che il numero  $k$  è radice d'indice  $n+1$  del rapporto del termine noto della (3) al termine noto della (2).

Se indichiamo con  $\alpha, \beta, \tau$  le omografie rappresentate rispettivamente dalle matrici  $A, B, T$ , converremo parimenti di dire che la radice  $\rho_j$  della equazione caratteristica di  $\alpha$  e la radice  $k\rho_j$  della equazione caratteristica di  $\beta$  sono *corrispondenti rispetto alla omografia  $\tau$*  che trasforma  $\alpha$  in  $\beta$ .

**2.** Siano nella (1<sup>bis</sup>) le  $A, B, T$  reali (cioè ad elementi reali). Abbiamo dalla (1<sup>bis</sup>)

$$(4) \quad (kU) = B(TAT^{-1})^{-1};$$

poichè nelle ipotesi fatte la matrice del secondo membro della (4) è reale, si deduce che  $k$  è reale.

Siano nella (1<sup>bis</sup>)  $A$  e  $B$  reali e reale il numero  $k$ : *dimostrare che esiste una matrice reale  $S$  per cui si ha*

$$(5) \quad (kU) S A S^{-1} = B.$$

Se la matrice  $T$  è reale, la proprietà non ha bisogno di essere dimostrata. Sia la  $T$  non reale e quindi

$$T \equiv R_1 + i R_2,$$

dove  $R_1$  e  $R_2$  sono matrici reali; abbiamo dalla (1<sup>bis</sup>)

$$(k U) R_1 A = B R_1,$$

$$(k U) R_2 A = B R_2,$$

e quindi anche

$$(6) \quad k U (\lambda R_1 + \mu R_2) = B (\lambda R_1 + \mu R_2),$$

dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono numeri qualunque (che moltiplicano rispett.  $R_1$  ed  $R_2$ ).

Se una delle due matrici  $R_1$ ,  $R_2$  è non degenera, la proprietà da dimostrare si trova verificata. Supponiamo che  $R_1$  e  $R_2$  siano ambedue degeneri: dimostro che non tutte le matrici  $\lambda R_1 + \mu R_2$  con  $\lambda$  e  $\mu$  reali possono essere degeneri. In caso contrario il determinante  $|\lambda R_1 + \mu R_2|$  è sempre nullo per valori reali di  $\lambda$  e  $\mu$ ; ma allora  $\lambda$  e  $\mu$  non figurano nello sviluppo del determinante e questo è nullo anche pei valori non reali di  $\lambda$  e  $\mu$ , in contraddizione colla ipotesi  $|R_1 + i R_2| \equiv |T| \neq 0$ .

**3.** Siano nella (1<sup>bis</sup>) le  $A$ ,  $B$ ,  $T$  razionali. Abbiamo dalla (1<sup>bis</sup>)

$$(4) \quad (k U) = B (T A T^{-1})^{-1};$$

poichè nelle ipotesi fatte la matrice del secondo membro della (4) è razionale, il numero  $k$  è razionale.

Siano nella (1<sup>bis</sup>) razionali le  $A$ ,  $B$  e il numero  $k$ : *dimostro che esiste una matrice razionale  $S$  per cui si ha*

$$(7) \quad (k U) S A S^{-1} = B.$$

Se la  $T$  è razionale, la proprietà si trova verificata. Se la  $T$  non è razionale, essendo  $A$ ,  $B$  e  $k$  razionali e quindi reali, per la proposizione del secondo capoverso del n. precedente possiamo supporre  $T$  reale.

Sia dunque la  $T$  reale e non razionale. Consideriamo nella (7) la  $S$  come una matrice incognita; dalla (7) scende un sistema  $E$  di equazioni lineari omogenee a coefficienti razionali negli elementi incogniti della  $S$ ; il sistema  $E$  è d'altronde compatibile giacchè esso è soddisfatto quando come elementi della  $S$  si prendano gli elementi della  $T$ . Poichè le equazioni di  $E$  sono a coefficienti razionali, il sistema stesso ammette soluzioni razionali; tra queste soluzioni ve ne sono di prossime quanto si vuole alla soluzione che ci dà la  $T$ , e che perciò ci forniscono matrici non degeneri.

4. Interpretando geometricamente i risultati ottenuti in questo paragrafo abbiamo le seguenti due Proposizioni che sono al nostro scopo fondamentali.

Proposizione I. – *Condizione necessaria e sufficiente perchè due omografie reali (razionali)  $\alpha$  e  $\beta$  proiettivamente identiche nel campo complesso siano proiettivamente identiche nel campo reale (razionale), è che esista una omografia  $\tau$  la quale trasformi  $\alpha$  in  $\beta$ , e rispetto alla quale le radici della equazione caratteristica di  $\beta$  siano eguali alle corrispondenti radici della equazione caratteristica di  $\alpha$  moltiplicate per un fattore reale (razionale).*

Per esclusione si ha dalla Proposizione I la

Proposizione II. – *Condizione necessaria e sufficiente perchè due omografie reali (razionali)  $\alpha$  e  $\beta$  proiettivamente identiche nel campo complesso non siano proiettivamente identiche nel campo reale (razionale), è che, rispetto a qualunque omografia che trasformi  $\alpha$  in  $\beta$ , le radici della equazione caratteristica di  $\beta$  siano eguali alle corrispondenti della equazione caratteristica di  $\alpha$  moltiplicate per un fattore non reale (non razionale) <sup>(2)</sup>.*

(<sup>2</sup>) Per le omografie reali si può consultare anche la Memoria: T. TURRI: *Omografie reali proiettivamente identiche nel campo complesso e proiettivamente distinte nel campo reale* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; t. LVII, (1933), pp. 273-298].

I risultati della Memoria ora citata vengono nella presente con altro metodo ritrovati in modo più rapido; il lettore può confrontare i risultati della Memoria citata con le Proposizioni I e III della presente, che riguardano le omografie reali.

§ 2. - Riduzione del problema proposto.

**5. Definizione.** « Siano per un' omografia  $\alpha$  uniti gli spazi  $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(d+1)}$  indipendenti e appartenenti allo spazio ambiente; quando  $d > 0$ , diremo che la  $\alpha$  è decomponibile nelle omografie subordinate in  $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(d+1)}$  ».

Sia la caratteristica di una omografia  $\alpha$  nella notazione di SEGRE

$$(8) \quad [(e^{(1)} e_1^{(1)} e_2^{(1)}, \dots, e_{h_1}^{(1)}) (e^{(2)} e_1^{(2)} \cdot e_2^{(2)} \dots e_{h_2}^{(2)}) \dots (e^{(m)} e_1^{(m)} e_2^{(m)} \dots e_{h_m}^{(m)})].$$

Si sa che per un punto  $P$  generico dello spazio ambiente passa uno e uno solo spazio unito  $S_{e^{(1)} + e^{(2)} + \dots + e^{(m)} - 1}$ ; l' omografia  $\gamma_1$  subordinata in  $S_{e^{(1)} + e^{(2)} + \dots + e^{(m)} - 1}$  ha la caratteristica

$$(9) \quad [(e^{(1)}) (e^{(2)}) \dots (e^{(m)})],$$

cioè gli spazi fondamentali si riducono a  $m$  punti rispett. di molteplicità  $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(m)}$ .

Indichiamo con  $r$  il numero delle dimensioni dello spazio ambiente ( $r \equiv e^{(1)} + e_1^{(1)} + \dots + e_{h_1}^{(1)} + e^{(2)} + e_1^{(2)} + \dots + e_{h_2}^{(2)} + \dots + e^{(m)} + e_1^{(m)} + \dots + e_{h_m}^{(m)} - 1$ ); la omografia  $\alpha$  si decompone nella omografia  $\gamma_1$  e in una omografia  $\delta$  subordinata in uno spazio  $S_{r - (e^{(1)} + e^{(2)} + \dots + e^{(m)})}$  indipendente da  $S_{e^{(1)} + e^{(2)} + \dots + e^{(m)} - 1}$ . A partire dalla omografia  $\delta$  si possono ripetere le considerazioni svolte a partire da  $\alpha$  e si avrà un' omografia  $\gamma_2$  la cui caratteristica è

$$(10) \quad [(e_1^{(1)}) (e_1^{(2)}) \dots (e_1^{(m)})].$$

Così via, via procedendo, supposto ad esempio che dei numeri  $h_1, h_2, \dots, h_m$  il numero  $h_1$  non sia inferiore a nessuno dei rimanenti, scomporremo la  $\alpha$  in  $h_1$  omografie,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{h_1}$ , in ciascuna delle quali gli spazi fondamentali si riducono a punti.

6. Supponiamo che la omografia  $\alpha$  del n. precedente sia reale (razionale); a partire da un punto  $P$  generico ma reale (razionale) decomporremo la  $\alpha$  in due omografie reali (razionali)  $\gamma_1$  e  $\delta$  la prima delle quali ha gli spazi fondamentali riducendosi a punti. E procedendo sulla  $\delta$  come si è fatto sulla  $\alpha$  e così via, si scompone la  $\alpha$  in  $h_1$  omografie,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{h_1}$  reali (razionali), i cui spazi fondamentali sono punti. Scegliamo i vertici reali (razionali) della piramide di riferimento dello spazio in cui opera la  $\alpha$ , negli spazi reali (razionali) in cui operano  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{h_1}$ ; dette  $A, C_1, C_2, \dots, C_{h_1}$  le matrici di  $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{h_1}$ , abbiamo

$$A \equiv \left\| \begin{array}{cccc} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & C_{h_1} \end{array} \right\| .$$

Sia ora  $\beta$  un' omografia reale (razionale) proiettivamente identica ad  $\alpha$  nel campo complesso; possiamo scomporre la  $\beta$  in  $h_1$  omografie,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{h_1}$ , *reali (razionali)* proiettivamente identiche nel campo complesso rispett. a  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{h_1}$ . Dette  $B, F_1, F_2, \dots, F_{h_1}$  le matrici rispett. di  $\beta, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{h_1}$ , abbiamo

$$B \equiv \left\| \begin{array}{cccc} F_1 & & & \\ & F_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & F_{h_1} \end{array} \right\| .$$

Per la identità proiettiva nel campo complesso di  $\alpha$  e  $\beta$  e di  $\gamma_j$  e  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, h_1$ ), abbiamo una matrice

$$T \equiv \left\| \begin{array}{cccc} S_1 & & & \\ & S_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & S_{h_1} \end{array} \right\| ,$$



(dove  $S$ , ha lo stesso ordine di  $C$ , e  $F$ ), tale che

$$(11) \quad \begin{cases} k T A T^{-1} = B \\ k S_j C_j S_j^{-1} = F_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, h_1).$$

*Per le (11) il problema di ricercare se, data un'omografia reale (razionale)  $\alpha$ , esistano omografie reali (razionali)  $\beta$  proiettivamente identiche ad  $\alpha$  nel campo complesso e non proiettivamente identiche ad  $\alpha$  nel campo reale (razionale), si può limitare al caso che la  $\alpha$  abbia i suoi spazi fondamentali riducentisi a punti.*

### § 3. - Sulla matrice di un'omografia i cui spazi fondamentali sono punti.

7. Sia  $\alpha$  un'omografia i cui spazi fondamentali sono punti (non necessariamente semplici, nè necessariamente di eguale molteplicità); in tali ipotesi gli spazi uniti per  $\alpha$  sono in numero finito. Prendiamo nello spazio ambiente  $S_n$  un punto  $V_1$  non appartenente a nessuno degli spazi uniti; la  $\alpha$  fa corrispondere al punto  $V_1$  un punto  $V_2$ , a  $V_2$  un punto  $V_3, \dots$ , a  $V_n$  un punto  $V_{n+1}$ ; per la ipotesi fatta su  $V_1$  i punti  $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$  sono indipendenti e quindi appartengono allo spazio ambiente.

Assunti quali vertici della piramide di riferimento i punti  $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ , la matrice di  $\alpha$  è della forma

$$(12) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2} & 0 & 0 & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{n-1} & 0 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & a_n & b_n \end{vmatrix}$$

Il determinante della (12) è  $(-1)^n b_0 a_1 a_2 \dots a_n$ , e poichè esso è diverso da zero, sono diverse da zero le  $b_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Poniamo per semplicità  $b_0 = 1$ , e facciamo la sostituzione lineare data dalle

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = a_1 x_2 \\ x'_3 = a_1 a_2 x_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x'_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_n x_{n+1}; \end{array} \right.$$

tenuto conto che si è posto  $b_0 = 1$ , la (12) si trasforma nella

$$(14) \quad \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & -c_{n+1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & -c_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & -c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & -c_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & -c_1 \end{array} \right\| ,$$

dove

$$\left\{ \begin{array}{l} -c_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_n \\ -c_n = b_1 a_2 \dots a_n \\ -c_{n-1} = b_2 a_3 \dots a_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -c_3 = b_{n-2} a_{n-1} a_n \\ -c_2 = b_{n-1} a_n \\ -c_1 = b_n . \end{array} \right.$$

Sviluppando il calcolo si trova che la equazione caratteristica di  $\alpha$  è

$$(15) \quad \rho^{n+1} + c_1 \rho^n + c_2 \rho^{n-1} + \dots + c_n \rho + c_{n+1} = 0.$$

Supponiamo ora che la  $\alpha$  sia *reale (razionale)*, e prendiamo il punto  $V_1$  del primo capoverso, oltrechè non appartenente a nessuno degli spazi uniti, *reale (razionale)*; perveniamo ancora alla matrice (14) e alla equazione (15), dove però le  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$  sono numeri reali (razionali).

### 8. Consideriamo la matrice

$$(16) \quad \left\| \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & -k^{n+1} c_{n+1} \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & -k^n c_n \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & -k^{n-1} c_{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 & 0 & -k^3 c_3 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & -k^2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 & -k c_1 \end{array} \right\|.$$

La equazione caratteristica della (16) è

$$(17) \quad \rho^{n+1} + k c_1 \rho^n + k^2 c_2 \rho^{n-1} + \dots + k^n c_n \rho + k^{n+1} c_{n+1} = 0;$$

le radici della (17) sono dunque le radici della (15) moltiplicate per  $k$ ; se  $\rho_j$  è una radice  $d$ -upla della (15), la radice  $k \rho_j$  della (17) è essa pure  $d$ -upla.

Indichiamo con  $\beta$  la omografia rappresentata dalla (16) e supponiamo per semplicità che essa operi nello stesso spazio in cui opera la  $\alpha$  del n. precedente. La  $\beta$  fa corrispondere a  $V_1$  il punto  $V_2$ , a  $V_2$  il punto  $V_3, \dots$ , a  $V_n$  il punto  $V_{n+1}$ ; segue

di qui che anche gli spazi fondamentali della  $\beta$  sono punti. Tenendo poi conto che i punti uniti associati alle radici  $\rho_j$ ,  $k\rho_j$  dell'equazione caratteristica di  $\alpha$  e di  $\beta$  hanno eguale molteplicità, si ha che  $\alpha$  e  $\beta$  sono proiettivamente identiche (nel campo complesso).

Indichiamo con  $A$  la matrice (14) e con  $B$  la (16), e poniamo

$$T = \begin{vmatrix} k^{-1} & & & \\ & k^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & k^{-(n+1)} \end{vmatrix};$$

sviluppando il calcolo troviamo

$$(18) \quad T(kA)T^{-1} = B,$$

che possiamo scrivere anche a mezzo delle (1) e (1<sup>bis</sup>).

#### § 4. - Risoluzione del problema proposto.

**9.** Faccio alcuni richiami sulle « omografie (già dette) di DEL PRETE » <sup>(3)</sup>.

Un'omografia  $\alpha$  permutabile anche con omografie che non ne lasciano fissi gli spazi caratteristici, è caratterizzata dalle seguenti due proprietà:

« 1<sup>a</sup> » Le radici distinte della equazione caratteristica di  $\alpha$  si ripartiscono in  $f$  ( $\geq 1$ ) gruppi

<sup>(3)</sup> Note citate in <sup>(1)</sup>. Il ROSATI ha trattato incidentalmente lo stesso argomento senza essere a conoscenza del lavoro di DEL PRETE; vedasi:

C. ROSATI: *Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica e sulle varietà di JACOBI a gruppo di moltiplicabilità abeliano* [Annali di Matematica pura e applicata, serie IV, t. VI, (1929), pp. 233-263].

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1, \quad \rho_1 \varepsilon, \quad \rho_1 \varepsilon^2, \quad \dots, \quad \rho_1 \varepsilon^{q-1} \\ \rho_2, \quad \rho_2 \varepsilon, \quad \rho_2 \varepsilon^2, \quad \dots, \quad \rho_2 \varepsilon^{q-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \rho_f, \quad \rho_f \varepsilon, \quad \rho_f \varepsilon^2, \quad \dots, \quad \rho_f \varepsilon^{q-1} \end{array} \right.$$

dove  $\varepsilon$  è radice primitiva d'indice  $q$  ( $> 1$ ) della unità.

2<sup>a</sup>) Le omografie subordinate negli spazi caratteristici associati alle radici di uno stesso gruppo sono proiettivamente identiche (nel campo complesso) ».

Una omografia permutabile con  $\alpha$  induce tra gli spazi caratteristici di uno stesso gruppo una permutazione con cicli di ordine  $q$  o divisore di  $q$ . Per semplicità noi supporremo che il numero  $f$  sia il numero minimo di gruppi in cui si possono ripartire le radici, e quindi che  $q$  sia l'ordine massimo dei cicli.

Per la proprietà 2<sup>a</sup>) le radici della equazione caratteristica di  $\alpha$  appartenenti a uno stesso gruppo hanno tutte la stessa molteplicità; perciò l'equazione caratteristica è della forma

$$(19) \quad \rho^{qs} + c_q \rho^{q(s-1)} + c_{2q} \rho^{q(s-2)} + \dots + c_{q(s-1)} \rho^q + c_{qs} = 0$$

(dove  $s > f$  se si hanno radici multiple), equazione equivalente al sistema

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta^s + c_q \eta^{s-1} + c_{2q} \eta^{s-2} + \dots + c_{q(s-1)} \eta + c_{qs} = 0 \\ \eta = \rho^q. \end{array} \right.$$

### 10. Dimostro la

Proposizione III. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché, data una omografia reale  $\alpha$ , esista una omografia reale  $\beta$  proiettivamente identica ad  $\alpha$  nel campo complesso e non nel campo reale, è che la  $\alpha$  sia un'omografia di DEL PRETE, e che inoltre l'ordine massimo  $q$  dei cicli sia un numero pari.*

*Soddisfatta la enunciata condizione, la  $\beta$  è unica.*

Pel risultato finale del paragrafo 2 possiamo limitarci a

considerare il caso che la  $\alpha$  abbia quali spazi fondamentali dei punti. In tale ipotesi la matrice di  $\alpha$  si può mettere sotto la forma (14); sia quindi la (15) la equazione caratteristica di  $\alpha$ .

Sia ora  $\beta$  un'omografia reale proiettivamente identica ad  $\alpha$  nel campo complesso e non nel campo reale: la matrice di  $\beta$  può essere messa sotto la forma della (16) [intendendo che le  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$  abbiano gli stessi valori che nella (14)]; è quindi la (17) la equazione caratteristica di  $\beta$ .

Per la Proposizione II il fattore  $k$  che si presenta nella matrice (16) e nell'equazione (17), è immaginario; d'altronde la (16) ha i suoi elementi reali e la (17) i coefficienti reali: concludiamo che nella ultima colonna della (16) sono nulli quegli elementi che non contengono a fattore una potenza reale di  $k$ . Sia  $k^g$  la prima potenza reale di  $k$ , e poniamo  $k^g = g$ . Tenendo ad un tempo conto della relazione (18) con cui si chiude il paragrafo precedente, e della Proposizione II, si ha che nessuna delle radici  $q^{\text{mo}}$  di  $g$  è un numero reale: ne segue che  $g$  è pari e nello stesso tempo  $g$  è negativo.

Poichè nella (15) il termine noto  $c_{n+1}$  è diverso da zero, posto  $q = 2q'$ , la equazione caratteristica di  $\alpha$  è della forma

$$(19^{\text{bis}}) \quad \rho^{2q's} + c_{2q'} \rho^{2q'(s-1)} + c_{4q'} \rho^{2q'(s-2)} + c_{2q',s-1} \rho^{2q'} + c_{2q',s} = 0.$$

Sia  $\rho_j$  una radice della (19<sup>bis</sup>) e sia  $d$ -upla per l'equazione stessa; sono pure radici  $d$ -uple della (19<sup>bis</sup>) le  $\rho_j \epsilon, \rho_j \epsilon^2, \dots, \rho_j \epsilon^{2q'-1}$ ; si deduce di qui che i punti uniti associati alle radici  $\rho_j, \rho_j \epsilon, \rho_j \epsilon^2, \dots, \rho_j \epsilon^{2q'-1}$  hanno tutti la molteplicità  $d$ . Resta così provato che la  $\alpha$  è un'omografia di DEL PRETE.

La sufficienza della condizione è già implicitamente dimostrata da quanto siamo venuti esponendo. Sia  $\alpha$  un'omografia di DEL PRETE e l'ordine massimo dei cicli sia un numero pari  $2q'$ ; ancora per il risultato finale del paragrafo 2 possiamo limitarci a considerare il caso che gli spazi fondamentali della  $\alpha$  siano punti.

La matrice di  $\alpha$  ha l'ordine pari e si può mettere sotto la forma (14) intendendo che siano nulli gli elementi della ultima colonna il cui indice non è multiplo di  $2q'$ . (Poichè  $2q'$  è

l'ordine massimo dei cicli, si può precisare maggiormente dicendo che le  $c$  non nulle non possono avere *tutte* gli indici divisibili per un numero multiplo di  $2q'$ . Indichiamo con  $A$  la matrice di  $\alpha$ , e indichiamo con  $B$  la matrice che si ottiene dalla  $A$  cambiando segno agli elementi della ultima colonna; la  $B$  rappresenta (n. 8) un'omografia reale  $\beta$  proiettivamente identica ad  $\alpha$  nel campo complesso e proiettivamente distinta da  $\alpha$  nel campo reale, perchè nessuna delle radici d'indice  $2q'$  di  $-1$  è reale.

Mettiamo nella matrice  $A$  al posto di

$$c_{2q'}, c_{4q'}, \dots, c_{2q'(s-1)}, c_{2q's}$$

rispettiv.

$$g c_{2q'}, g^2 c_{4q'}, \dots, g^{s-1} c_{2q'(s-1)}, g^s c_{2q's};$$

secondochè  $g$  è positivo o negativo, la matrice ottenuta rappresenta un'omografia proiettivamente identica nel campo reale alla  $\alpha$  o alla  $\beta$  del capoverso precedente. Poichè la matrice di un'omografia reale proiettivamente identica ad  $\alpha$  nel campo complesso si può mettere sotto la forma ora detta, resta dimostrato anche il secondo capoverso della Proposizione III.

#### 11. Dimostro la

Proposizione IV. — *Condizione necessaria e sufficiente, affinché, data un'omografia razionale  $\alpha$ , esistano omografie razionali  $\beta$  proiettivamente distinte da  $\alpha$  nel campo razionale, ma proiettivamente identiche nel campo reale o solo nel campo complesso, è che la  $\alpha$  sia un'omografia di DEL PRETE.*

Come al solito basta limitarci al caso che la  $\alpha$  abbia quali spazi fondamentali dei punti.

Sia  $\beta$  un'omografia razionale proiettivamente identica alla  $\alpha$  nel campo complesso ma proiettivamente distinta da  $\alpha$  nel campo razionale. La matrice  $A$  di  $\alpha$  è del tipo della (14) e la matrice  $B$  di  $\beta$  è del tipo della (16); il fattore  $k$  che entra nella (16) non può per l'ipotesi fatta su  $\beta$  (Proposizione II) essere razio-

nale; sia  $k^a$  la prima potenza razionale di  $k$ ; nella  $B$  e quindi nella  $A$  debbono essere nulle le  $c$  i cui indici non sono multipli di  $q$ . La equazione caratteristica di  $\alpha$  ha la forma (19); se  $\rho_j$  è una radice dell'equazione caratteristica di  $\alpha$ , le radici  $\rho_j, \rho_j \varepsilon, \rho_j \varepsilon^2, \dots, \rho_j \varepsilon^{q-1}$  dell'equazione caratteristica di  $\alpha$ , dove  $\varepsilon$  è radice primitiva d'indice  $q$  della unità, sono associate a punti uniti di eguale molteplicità; resta così provato che la  $\alpha$  è un'omografia di DEL PRETE.

Sia viceversa  $\alpha$  un'omografia razionale di DEL PRETE, i cui spazi fondamentali sono punti. La matrice di  $\alpha$  è la  $A$  del precedente capoverso, dove possiamo intendere che  $q$  sia l'ordine massimo dei cicli. Mettiamo nella matrice  $A$  al posto di

$$c_q, c_{2q}, \dots, c_{qs}$$

rispettiv.

$$g c_q, g^2 c_{2q}, \dots, g^s c_{qs},$$

dove  $g$  è un numero razionale; sappiamo (n. 8) che la matrice  $B$  così ottenuta rappresenta un'omografia razionale  $\beta$  proiettivamente identica alla  $\alpha$  nel campo complesso.

Se  $q$  è dispari, una delle radici  $q^{\text{mo}}$  di  $g$  è reale; se  $q$  è pari e  $g$  è positivo, si hanno due radici  $q^{\text{mo}}$  di  $g$  reali (l'una opposta dell'altra); se  $q$  è pari e  $g$  negativo, le radici  $q^{\text{mo}}$  di  $g$  sono tutte immaginarie. Poichè le radici della equazione caratteristica di  $\beta$  sono le radici della equazione caratteristica di  $\alpha$  moltiplicate per una qualunque radice  $q^{\text{ma}}$  di  $g$ , tenuto conto delle Proposizioni I e II, abbiamo:

*Le omografie  $\alpha$  e  $\beta$  proiettivamente identiche nel campo complesso sono proiettivamente distinte nel campo razionale per tutti i valori di  $g$  che non sono la potenza  $q^{\text{ma}}$  di un numero razionale. Se  $q$  è dispari, ovvero se  $q$  è pari e  $g$  è positivo,  $\alpha$  e  $\beta$  sono proiettivamente identiche nel campo reale. Se  $q$  è pari e  $g$  è negativo, conformemente a quanto risulta già dalla Proposizione III,  $\alpha$  e  $\beta$  sono proiettivamente distinte anche nel campo reale.*



**§ 5. - Applicazione alle omografie razionali  
dello spazio ordinario.**

**12. a)** Omografie razionali sulla retta. - Il numero  $q$ , ordine massimo dei cicli, non può avere che il valore 2; abbiamo le matrici

$$(21) \quad \left\| \begin{array}{cc} & -c_2 \\ 1 & \end{array} \right\|; \quad (21^{bis}) \quad \left\| \begin{array}{cc} & -gc_2 \\ 1 & \end{array} \right\|$$

le quali rappresentano involuzioni proiettivamente distinte nel campo razionale se  $g$  non è il quadrato di un numero razionale; se  $g$  è positivo le involuzioni sono proiettivamente identiche nel campo reale; sono una ellittica e l'altra iperbolica se  $g$  è negativo.

**b)** Omografie razionali nel piano. - Il numero  $q$  non può avere che il valore 3; si hanno le matrici

$$(22) \quad \left\| \begin{array}{ccc} & & -c_3 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array} \right\|; \quad (22^{bis}) \quad \left\| \begin{array}{ccc} & & -gc_3 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array} \right\|$$

le quali rappresentano omografie cicliche proiettivamente identiche nel campo reale, ma proiettivamente distinte nel campo razionale se  $g$  non è il cubo di un numero razionale.

**c)** Omografie razionali nello spazio. - Il numero  $q$  può avere il valore 4 ovvero il valore 2.

Per  $q = 4$  si hanno le matrici

$$(23) \quad \left\| \begin{array}{ccc} & & -c_4 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{array} \right\|; \quad (23^{bis}) \quad \left\| \begin{array}{ccc} & & -gc_4 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{array} \right\|$$

le quali rappresentano omografie cicliche dello spazio; esse sono proiettivamente distinte nel campo razionale se  $g$  non è la quarta potenza di un numero razionale; sono o no proiettivamente identiche nel campo reale secondochè  $g$  è positivo o negativo.

Sia  $q = 2$ ; bisogna distinguere secondochè gli spazi fondamentali sono o no punti.

Se gli spazi fondamentali sono punti, abbiamo le matrici

$$(24) \quad \left\| \begin{array}{ccc} & & -c_4 \\ 1 & & \\ & 1 & -c_2 \\ & & 1 \end{array} \right\| ; (24^{\text{bis}}) \quad \left\| \begin{array}{ccc} & & -g^2 c_4 \\ 1 & & \\ & 1 & -g c_2 \\ & & 1 \end{array} \right\|$$

le quali rappresentano omografie proiettivamente distinte nel campo razionale se  $g$  non è il quadrato di un numero razionale; sono o no proiettivamente identiche nel campo reale secondochè  $g$  è positivo o negativo.

Se gli spazi fondamentali non sono punti, si hanno le matrici

$$(25) \quad \left\| \begin{array}{ccc} & -c_2 & \\ 1 & & \\ & & -c_2 \\ & 1 & \end{array} \right\| ; (25^{\text{bis}}) \quad \left\| \begin{array}{ccc} & -g c_2 & \\ 1 & & \\ & & -g c_2 \\ & 1 & \end{array} \right\| ;$$

si conclude come alla lettera  $a$ ) per le involuzioni sulla retta (\*).

(\*) Volendo applicare i risultati della Proposizione III alle omografie reali dello spazio ordinario, basta supporre nelle matrici di cui alle lettere  $a$ ) e  $c$ ) del presente n. che le costanti  $c$  siano reali e porre al posto della  $g$  il valore  $-1$ . Del resto la relativa ricerca è stata fatta esaurientemente con altro metodo al paragrafo IV della Memoria citata in (\*).