RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GINO GOLDONI

Teoremi di unicità per le equazioni di Hertz

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 11 (1940), p. 97-107
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1940__11__97_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TEOREMI DI UNICITÀ PER LE EQUAZIONI DI HERTZ [1]

Nota di GINO GOLDONI (*a Modena*).

1. - Nel presente lavoro ci proponiamo di dimostrare alcuni teoremi di unicità relativi alle equazioni proposte da HERTZ per i campi elettromagnetici nei corpi in movimento [2]. Naturalmente la nostra questione ha solo interesse matematico perchè, com' è noto [3], le equazioni di HERTZ non rispecchiano la realtà, sebbene non sia escluso che, in qualche caso particolare, esse siano ancora utilizzabili, almeno in via di approssimazione. Faremo precisamente vedere che, assegnate le condizioni iniziali e opportuni valori al contorno, le equazioni di HERTZ, come le equazioni di MAXWELL, definiscono in modo unico il campo elettromagnetico.

2. - Le equazioni di HERTZ per i corpi in movimento, usando le unità GIORGI, hanno il seguente aspetto:

$$(1) \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} H = i + \dfrac{\partial D}{\partial t} + \rho u + \operatorname{rot}(D \wedge u) \\ \operatorname{rot} E = \quad -\dfrac{\partial B}{\partial t} - \operatorname{rot}(B \wedge u) \end{cases}$$

(1) Lavoro eseguito nell' Istituto Matematico della R. Università di Bologna.

(2) Cfr. H. HERTZ: *Wiedemann Annales*, 41, pag. 369-397, 1890.

(3) Una esposizione della teoria di HERTZ con relativa critica trovasi in BLOCH: *Précis d' électricité théorique*, Paris, Gauthier-Villars, Cap. XIV, pag. 386-397.

dove E ed H sono rispettivamente le intensità del campo elettrico e magnetico, D il vettore spostamento, B l'induzione magnetica, ρ la densità spaziale, i la densità della corrente di conduzione ed u la velocità della materia.

Valgono inoltre le relazioni :

$$(2) \qquad D = \varepsilon E ; \quad B = \mu H ; \quad i = \sigma E ; \quad \rho = \operatorname{div} D .$$

Il nostro studio è limitato a mezzi isotropi ; si escludono inoltre i mezzi ferromagnetici nei quali la permeabilità μ è funzione del campo. Quindi nei nostri problemi ε, μ e σ sono grandezze numeriche caratteristiche del mezzo, indipendenti dal campo elettromagnetico ; le supporremo inoltre, conformemente all'esperienza, sempre positive. Sulle varie funzioni, scalari e vettoriali, che figurano nelle equazioni (1), riterremo valide le solite ipotesi della fisica-matematica : supporremo quindi che esse siano limitate e continue colle loro derivate prime in tutto lo spazio. Perchè tali ipotesi possano sussistere, dobbiamo escludere passaggi bruschi da mezzo a mezzo (in quanto tali bruschi passaggi portano a superfici di discontinuità per le varie funzioni considerate) ; quindi le variazioni di ε, μ e σ avvengono sempre con continuità. Con ciò il nostro campo sarà ovunque continuo.

3. – Possiamo scrivere le equazioni di Hertz nella seguente forma :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{rot}(H - D \wedge u) = i + \frac{\partial D}{\partial t} + \rho u \\ &\operatorname{rot}(E + B \wedge u) = \quad - \frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

moltiplichiamo la prima equazione scalarmente per $(E + B \wedge u)$, la seconda per $(H - D \wedge u)$, quindi sottragghiamo a membro a membro :

$$\operatorname{rot}(H - D\wedge u)\times(E+B\wedge u)-\operatorname{rot}(E+B\wedge u)\times(H-D\wedge u)=$$

$$(4)\quad = i\times E+\frac{\partial D}{\partial t}\times E+\rho u\times E+B\wedge u\times i+$$

$$+B\wedge u\times\rho u+B\wedge u\times\frac{\partial D}{\partial t}+H\times\frac{\partial B}{\partial t}-D\wedge u\times\frac{\partial B}{\partial t}.$$

Tenendo presente per il primo membro di (4) una nota formula di calcolo vettoriale e per il secondo membro la terza equazione delle (2) e le relazioni:

$$\frac{\partial D}{\partial t}\times E+\frac{\partial B}{\partial t}\times H=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E^2+\mu H^2)$$

(5)

$$B\wedge u\times\frac{\partial D}{\partial t}-D\wedge u\times\frac{\partial B}{\partial t}=-u\times\left(B\wedge\frac{\partial D}{\partial t}-D\wedge\frac{\partial B}{\partial t}\right)=$$

$$=u\times\frac{\partial}{\partial t}(D\wedge B)$$

si trova:

$$\operatorname{div}[(H-D\wedge u)\wedge(E+B\wedge u)]=\sigma E^2+$$

(6)

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E^2+\mu H^2)+u\times\frac{\partial}{\partial t}(D\wedge B)+B\wedge u\times\sigma E+\rho u\times E.$$

Ciò posto, enunciamo il primo dei teoremi di unicità. Supponiamo che all'istante iniziale, $t=0$, siano noti in tutto lo spazio i valori di E ed H e inoltre che, in ogni istante, E, H e ρ tendano allo zero d'ordine maggiore di 3/2 se il punto in cui sono calcolati tende all'infinito ([4]). Allora le equazioni di Hertz ammettono un'unica soluzione quando, evidentemente, sia assegnato in ogni punto e in ogni istante il valore della velocità u. La u verrà supposta, come si è detto, finita e continua in tutto lo spazio e per ogni istante t assieme alla sua derivata. Ammetteremo inoltre che il prodotto $u\sqrt{\varepsilon\mu}$ sia in ogni istante

([4]) Con questa ipotesi si assicura la convergenza degli integrali estesi a tutto lo spazio, di εE^2, μH^2, ρ^2 integrali che incontreremo in seguito.

e in ogni punto, in modulo, inferiore all'unità. Tale ammissione si comprende facilmente dal punto di vista fisico, pensando che $\sqrt{\varepsilon\mu}$ vale l'inverso della velocità della luce nel mezzo considerato, e che la velocità della materia è sempre inferiore a quella della luce.

4. – Per dimostrare il teorema enunciato, procediamo al solito per assurdo: siano E_1, H_1; E_2, H_2 due eventuali soluzioni delle (1) e (2): dimostriamo che queste soluzioni coincidono. A questo scopo poniamo:

$$E = E_1 - E_2 ;\; H = H_1 - H_2 ;\; D = \varepsilon E ;\; B = \mu H ;\; i = \sigma E ;\; \rho = \operatorname{div} D . \tag{7}$$

Per la linearità delle equazioni di Hertz e per le nostre posizioni, E ed H soddisfano alle equazioni (1) e (2); inoltre, per le nostre ipotesi, E ed H saranno nulli per $t = 0$ in tutto lo spazio e si comporteranno all'infinito come E_1 e H_1; E_2 e H_2. Sarà dunque valida la (6). Supposto quindi che i simboli che figurano in quella equazione abbiano i significati precisati dalle (7), possiamo integrare la (6) su una sfera di centro un punto qualunque O e raggio R. Si può applicare il teorema della divergenza al primo membro; si ottiene così un integrale superficiale che, facendo tendere R all'infinito, per le condizioni all'infinito ricordate poco fa, tende allo zero. Rimane allora, indicando con v_∞ il volume di tutto lo spazio:

$$\begin{gathered} \int_{v_\infty} \sigma E^2 dv + \frac{1}{2}\int_{v_\infty} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, dv + \int_{v_\infty} u \times \frac{\partial}{\partial t}(D \wedge B)\, dv + \\ + \int_{v_\infty} \rho u \times E dv + \int_{v_\infty} B \wedge u \times \sigma E dv = 0 . \end{gathered} \tag{8}$$

Questa equazione, con semplici passaggi, si può scrivere:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{v_\infty} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, dv + \frac{d}{dt}\int_{v_\infty} u \times D \wedge B dv = \int_{v_\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \times D \wedge B dv - \\ - \int_{v_\infty} \sigma E^2 dv - \int_{v_\infty} B \wedge u \times \sigma E dv - \int_{v_\infty} \rho u \times E dv . \end{gathered} \tag{9}$$

Integriamo ora tutta l'espressione (9) rispetto al tempo nell'intervallo $0-t$ e ricordiamo che $D=\varepsilon E$, $B=\mu H$ [5]:

$$\frac{1}{2}\int_{v_\infty}(\varepsilon E^2+\mu H^2)\,dv+\int_{v_\infty}u\times\varepsilon\mu\,(E\wedge H)\,dv=$$

$$(10)\qquad =\int_0^t dt\int_{v_\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\times\varepsilon\mu\,(E\wedge H)\,dv-\int_0^t dt\int_{v_\infty}\sigma E^2\,dv-$$

$$-\int_0^t dt\int_{v_\infty}B\wedge u\times\sigma E\,dv-\int_0^t dt\int_{v_\infty}\rho\,u\times E\,dv\,.$$

Questa equazione si può trasformare in una disuguaglianza fondamentale per il nostro scopo. Si ha intanto:

$$(11)\quad |u\times\varepsilon\mu\,(E\wedge H)|\leq\sqrt{\varepsilon\mu}\,u\cdot\sqrt{\varepsilon}\,E\cdot\sqrt{\mu}\,H\leq\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot u\,\frac{\varepsilon E^2+\mu H^2}{2}\,.$$

Allora, tenendo presente che, per ipotesi, $|u\cdot\sqrt{\varepsilon\mu}\,|$ è continua e inferiore all'unità, esisterà un numero positivo $m<1$ e maggiore di $|u\sqrt{\varepsilon\mu}|$ in ogni punto dello spazio e in ogni istante dell'intervallo $0-t$. Potremo perciò scrivere:

$$(12)\qquad \left|\int_{v_\infty}u\times\varepsilon\mu\,(E\wedge H)\,dv\right|\leq\frac{m}{2}\int_{v_\infty}(\varepsilon E^2+\mu H^2)\,dv\,.$$

Di questa relazione si farà uso più innanzi.

Prendiamo in esame il secondo membro di (10). Se teniamo presente che, per le nostre ipotesi, le funzioni $\left|\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\partial u}{\partial t}\right|$, $\left|\sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cdot u\right|$ e $\left|\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}\right|$ sono in valore assoluto limitate, indicando con M_1,

[5] A rigore, per evitare qualche difficoltà nell'inversione del segno di derivata rispetto al tempo con quello d'integrale rispetto allo spazio, era opportuno prima integrare rispetto al tempo poi far tendere R all'infinito.

M_2, M_3 i loro limiti superiori in tutto lo spazio e nell'intervallo $0 - t$ si ha:

$$(13)\qquad \left|\frac{\partial u}{\partial t} \times \varepsilon\mu (E \wedge H)\right| \leq \left|\frac{\partial u}{\partial t} \sqrt{\varepsilon\mu}(\sqrt{\varepsilon}\, E \cdot \sqrt{\mu}\, H)\right| < M_1 \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2}$$

$$(14)\qquad \begin{aligned} |B \wedge u \times \sigma E| &\leq |u \mu \sigma \cdot E \cdot H| \leq \sigma \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, u \sqrt{\varepsilon\mu}\, E \cdot H \leq \\ &\leq M_2 \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} \end{aligned}$$

$$(15)\qquad |\rho u \times E| < \frac{u}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\rho^2 + \varepsilon E^2}{2} \leq \frac{M_3}{2} \rho^2 + M_3 \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2}.$$

Ora riprendiamo la (10). Se in luogo del secondo integrale a primo membro, poniamo, col segno cambiato, l'ultimo membro di (12), otteniamo una espressione inferiore a questo membro della (10). Se poi negli altri integrali di (10) sostituiamo le (13), (14), (15) otteniamo una espressione superiore al secondo membro della (10) stessa [6]. Si ottiene così in definitiva la disuguaglianza:

$$(16)\qquad \begin{aligned} \frac{1-m}{2} \int_{v_\infty} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, dv &\leq \frac{M_1 + M_2 + M_3}{2} \int_0^t dt \int_{v_\infty} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, dv + \\ &+ \frac{M_3}{2} \int_0^t dt \int_{v_\infty} \rho^2\, dv - \int_0^t dt \int_{v_\infty} \sigma E^2\, dv\,. \end{aligned}$$

Ora l'ultimo termine di (16), essendo $\sigma > 0$, è negativo o, al più, nullo; perciò sopprimendolo si aumenta la disuguaglianza (16). Allora, dividendo per $1 - m$ (che è positivo) e posto:

[6] Cioè prendiamo i valori assoluti del primo, terzo, quarto integrale del secondo membro di (10) e in luogo della funzione integranda vi sostituiamo quelle date dalle (13), (14), (15).

$$R = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{1 - m} \qquad S = \frac{M_3}{1 - m}$$

si ha:

$$(17) \quad \int_{v_\infty} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, dv \leq R \int_0^t dt \int_{v_\infty} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, dv + S \int_0^t dt \int_{v_\infty} \rho^2\, dv.$$

Abbiamo così stabilito una fondamentale disuguaglianza per il nostro teorema.

5. - Riprendiamo ora la prima equazione delle (3) e facciamone la divergenza. Tenendo presente che la divergenza di un rotazionale è nulla e che:

$$\operatorname{div} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{D}}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

si ha con semplici passaggi:

$$(18) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} \rho \times \boldsymbol{u} + \operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0\,.$$

Moltiplicando ambo i membri per 2ρ otteniamo, dopo qualche calcolo:

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial t} + 2\rho^2 \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} \rho^2 \times \boldsymbol{u} + 2\rho \operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0\,.$$

Integriamo questa equazione su tutto lo spazio v_∞; otteniamo, applicando al terzo termine una nota formula di calcolo vettoriale:

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{v_\infty} \rho^2\, dv + 2 \int_{v_\infty} \rho^2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, dv + \int_{v_\infty} \operatorname{div} (\rho^2 \boldsymbol{u})\, dv - \\ &- \int_{v_\infty} \rho^2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, dv + 2 \int_{v_\infty} \rho \operatorname{div} \boldsymbol{i}\, dv = 0\,. \end{aligned}$$

Applicando il teorema della divergenza al terzo integrale si vede subito che esso è nullo perchè, per le nostre ipotesi, ρ^2, quando il punto in cui tale grandezza si calcola tende all'infinito, tende allo zero d'ordine maggiore di due.

Integrando allora la (19) rispetto al tempo abbiamo:

$$\int_{v_\infty} \rho^2 dv = -\int_0^t dt \int_{v_\infty} \rho^2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, dv - 2\int_0^t dt \int_{v_\infty} \rho \operatorname{div} \boldsymbol{i}\, dv \,. \tag{20}$$

Ora si osservi che, essendo $\boldsymbol{u}$ continua assieme alla sua derivata, $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ ammetterà, per ogni punto P e per ogni istante di $0-t$, un limite superiore N_1 finito. Quindi:

$$|-\rho^2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}| < N_1 \rho^2 \,. \tag{21}$$

D'altra parte, posto $\lambda = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, abbiamo:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} = \operatorname{div} \sigma \boldsymbol{E} = \operatorname{div} \lambda \boldsymbol{D} = \operatorname{grad} \lambda \times \boldsymbol{D} + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{D} \,.$$

Allora se indichiamo con N_2 e N_3 rispettivamente i massimi (certamente finiti) in tutto lo spazio e nell'intervallo $0-t$ di $|\operatorname{grad} \lambda| \sqrt{\varepsilon}$ e di 2λ, abbiamo:

$$\begin{aligned} 2|\rho \operatorname{div} \boldsymbol{i}| &\leq 2\,|\operatorname{grad} \lambda|\, \varepsilon\, |E\rho| + 2\,|\lambda|\, \rho^2 \leq \\ |\operatorname{grad} \lambda| \sqrt{\varepsilon}\, |\varepsilon E^2 + \rho^2| &+ 2\,|\lambda|\, \rho^2 \leq N_2(\varepsilon E^2 + \rho^2) + \\ &+ N_3 \rho^2 \leq N_2(\varepsilon E^2 + \mu H^2) + N_3 \rho^2 + N_2 \rho^2 \,. \end{aligned} \tag{22}$$

Sostituendo le (21) e (22) nella (20) e ponendo:

$$P = N_1 + N_2 + N_3 \quad Q = N_2$$

si ha:

$$\int_{v_\infty} \rho^2 dv \leq Q \int_0^t dt \int_{v_\infty} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) dv + P \int_0^t dt \int_{v_\infty} \rho^2 dv \,. \tag{23}$$

Facciamo ora sistema delle disuguaglianze (17) e (23). Se poniamo $a=\int\limits_{v_\infty}(\varepsilon E^2+\mu H^2)\,dv$, $b=\int\limits_{v_\infty}\rho^2 dv$ ed indichiamo con T il più grande tra i quattro numeri positivi P, Q, R, S otteniamo un sistema che, nelle nostre ipotesi, ammette per soluzioni solo $a=0$, $b=0$ (7).

Da ciò discende subito: $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}=0$ $\rho=0$ e il nostro teorema è così completamente provato.

6. – Finora abbiamo implicitamente ammesso che le caratteristiche del mezzo siano funzioni del punto, ma indipendenti dal tempo. Questa ipotesi è un po' restrittiva. Infatti la materia è in movimento e quindi è molto probabile che in un punto fisso dello spazio vengano a variare le caratteristiche del mezzo. È facile vedere però che anche in questo caso è possibile dimostrare il teorema di unicità riconducendosi alla dimostrazione precedente.

A questo scopo si procede senz'altro come nel paragrafo 3, ma si osservi che ora la prima delle (5) va sostituita dall'equazione:

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E^2+\mu H^2)+\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}E^2+\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}H^2$$

mentre l'altra equazione rimane invariata.

La (6) diventa allora:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{u})\wedge(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{u})]&=\sigma E^2+\rho\,\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{E}+\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E^2+\mu H^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}E^2+\frac{\partial\mu}{\partial t}H^2\right)+\\&+\boldsymbol{u}\times\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{u}\times\sigma\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

(7) Cfr. D. Graffi: *Sulla teoria della propagazione del calore per convenzione naturale*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie VI vol. XII, (1930) pag. 135 (in nota).

Integrando in tutto lo spazio e poi rispetto al tempo nell'intervallo $0 - t$, applicando il teorema della divergenza al primo membro, dopo qualche trasformazione, otteniamo:

$$\frac{1}{2}\int_{v_\infty}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\,dv + \int_{v_\infty} u \times D \wedge B\,dv = \int_0^t dt \int_{v_\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \times D \wedge B\,dv -$$

$$-\int_0^t dt \int_{v_\infty} \sigma E^2\,dv - \int_0^t dt \int_{v_\infty} \rho\, u \times E\,dv - \int_0^t dt \int_{v_\infty} B \wedge u \times \sigma E\,dv -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t dt \int_{v_\infty}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} E^2 + \frac{\partial \mu}{\partial t} H^2\right) dv\,.$$

Questa formula differisce dalla (10) soltanto per la presenza dell'ultimo integrale a 2° membro. Ma è facile anche in questo caso ricondursi alla (17). Infatti essendo $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ e $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ continue, ε e μ continue e positive, esisterà per tutto lo spazio v_∞ e per tutti gli istanti in $0 - t$ un numero M' positivo tale che:

$$\left|\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}{\varepsilon}\right| < M' \qquad \left|\frac{\frac{\partial \mu}{\partial t}}{\mu}\right| < M'\,.$$

Allora si ha subito:

$$\frac{1}{2}\left|\int_{v_\infty}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} E^2 + \frac{\partial \mu}{\partial t} H^2\right) dv\right| \leq \frac{M'}{2}\left|\int_{v_\infty}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\,dv\right|.$$

Ciò posto si può, procedendo come nel paragrafo (4), trovare la (17), purchè in questo caso si ponga:

$$R = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M'}{1 - m}\,.$$

Essendo poi, com'è facile riscontrare, ancora valida la (23), la dimostrazione del teorema di unicità procede in modo identico a quello dei precedenti paragrafi.

7. – I casi fin quì esaminati riguardano uno spazio di definizione infinito. Nel problema dei corpi in quiete si giunge a dimostrare l'unicità delle soluzioni in campi finiti, assegnando, oltre alle condizioni iniziali, le componenti tangenziali di $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{H}$ in superficie. Vogliamo vedere quali condizioni supplementari sia oppportuno aggiungere nel problema dei corpi in movimento.

Ricordiamo la formula (6) integrata in un volume v finito, limitato da una superficie Σ ($\boldsymbol{n}$ vettore unitario normale a Σ diretto verso l'esterno di v);

$$\int_\Sigma (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{D} \wedge \boldsymbol{u}) \wedge (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{n}\, d\Sigma = \int_v \sigma E^2 dv +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_v \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) dv + \int_v \boldsymbol{u} \times \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{D} \wedge \boldsymbol{B}) dv +$$

$$+ \int_v \rho \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{E} dv + \int_v \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{u} \times \sigma \boldsymbol{E} dv .$$

Se possiamo affermare che il primo termine è nullo si potranno ripetere per gli altri termini le considerazioni fatte e ottenere la (17). Ciò accade quando sarà nulla la componente normale del vettore $(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{D} \wedge \boldsymbol{u}) \wedge (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{u})$ p. e. quando sarà nulla una delle componenti tangenziali di $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{D} \wedge \boldsymbol{u}$ o di $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{u}$.

Per stabilire la (23) abbiamo applicato il teorema della divergenza e le condizioni all'infinito al terzo integrale della (19) per potere affermare che questo termine è nullo.

Raggiungeremo lo stesso resultato anche nel presente caso, se è nulla la componente normale di $\boldsymbol{u}$ su Σ, oppure se è nulla su Σ la ρ.

Possiamo dunque concludere che il teorema di unicità è valido anche per un campo finito purchè al contorno sia assegnata la densità elettrica ρ e la componente tangenziale di $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{u}$ o di $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{D} \wedge \boldsymbol{u}$.

(Pervenuto in Redazione il 6 agosto 1940 - XVIII)