RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie di ordine *n*

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 12 (1941), p. 114-122

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__114_0>

SU UN PROBLEMA DI VALORI AL CONTORNO PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DI ORDINE n.

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER *a Padova*

I teoremi d'esistenza per le soluzioni di classi estesissime di equazioni funzionali hanno una comune radice topologica posta in luce da BIRKOFF–KELLOGG (1) e CACCIOPPOLI (2). In questa Nota mi propongo di far vedere come, servendosi delle considerazioni svolte da tali Autori, si possa dimostrare anche il seguente noto teorema (3):

Il problema

$$
(1) \qquad \begin{aligned} & y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ & y(x_1) = c_1, \ y(x_2) = c_2, \ldots, \ y(x_n) = c_n, \end{aligned}
$$

(1) BIRKHOFF–KELLOGG: *Invariant points in function space* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. 23 (1922), pp. 96-115].

(2) R. CACCIOPPOLI: *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 6ª, vol. XI (1930), pp. 794-799]; *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi ai limiti* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 6ª, vol. XII (1931), pp. 498-502].

(3) Cfr. S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n* [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. IX (1940), pp. 61-77], pp. 63-68.

Per $n = 3$ cfr. G. ZWIRNER: *Problemi al contorno per l'equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine: teoremi di esistenza e di unicità* [Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, t. XCIX, parte II (1940), pp. 263-275], pp. 268-271.

dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *sono numeri reali arbitrariamente prefissati,* $x_1 < x_2 < \ldots . < x_n$ *n punti qualsiasi dell'intervallo chiuso* (a, b) *e* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *è continua rispetto a* $(y, y', \ldots$ $\ldots y^{(n-1)})$ *e misurabile rispetto a* x *in*

$$T:\ a \leq x \leq b,\quad |y^{(i)}| < +\infty,\quad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ y^{(0)} = y),$$

ammette almeno una soluzione $y(x)$ *assolutamente continua insieme con le sue prime* $n-1$ *derivate nell'intervallo* $a \leq$ $\leq x \leq b$*, se in tutto il campo* T *risulta verificata la disegua-glianza*

$$(2)\qquad |f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})| \leq \sum_{0}^{n-1}{}_i\, \alpha_i(x)\, |y^{(i)}| + \beta(x),\quad (y^{(0)} = y),$$

dove $\beta(x)$ *e* $\alpha_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ *sono funzioni non negative e sommabili in* $a \leq x \leq b$*, con*

$$(3)\qquad \int_a^b \left(\sum_{0}^{n-1}{}_i \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\, \alpha_i(x)\right) dx < 1\ (^4).$$

Per dimostrare il teorema enunciato mi servirò anche del seguente lemma, conseguenza immediata (n. 1) di una notissima formula d'interpolazione:

Se $Y(x)$ *è una funzione assolutamente continua, insieme con le sue prime* $n-1$ *derivate, in* $a \leq x \leq b$ *e ivi nulla in* n *punti* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$*, risultano allora verificate, in tutto* $a \leq x \leq b$*, le diseguaglianze:*

[4] Se si vuole definire l'integrale $y(x)$ soltanto nell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_n$, basta porre $a = x_1$ e $b = x_n$ e con ciò si viene ad enunciare un teorema non più generale di quello del testo.

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
&| Y(x) | \leq \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \int_a^b | Y^{(n)}(x) | \, dx, \\
&| Y'(x) | \leq \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} \int_a^b | Y^{(n)}(x) | \, dx, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&| Y^{(n-1)}(x) | \leq \int_a^b | Y^{(n)}(x) | \, dx .
\end{aligned}
$$

In un prossimo lavoro darò un criterio di esistenza che generalizzerà quello del testo e che estenderò anche ai sistemi di equazioni differenziali ordinarie di forma normale e d'ordine qualunque.

1. - Per dimostrare il lemma enunciato ricordiamo che per la funzione $Y(x)$, soddisfacente alle condizioni dette, vale la formula

$$
(5) \quad Y(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) \frac{Y^{(n-1)}(u)}{(n-1)!}, \quad (a \leq x \leq b),
$$

dove u è un conveniente valore intermedio fra a e b, dipendente da x (5).

Inoltre, in un conveniente punto ξ interno all'intervallo $x_1 \leq x \leq x_n$, risulta

$$
Y^{(n-1)}(\xi) = 0
$$

e quindi, per essere

$$
Y^{(n-1)}(x) = \int_\xi^x Y^{(n)}(x) \, dx,
$$

(5) Cfr. Severi e Scorza Dragoni: *Lezioni di Analisi* [Zanichelli, Bologna] II_1. n. 57.

resta senz'altro provata la prima delle (4). In modo analogo si prova che sussistono anche le altre diseguaglianze osservando che la $Y^{(i)}(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ si annulla $n-i$ volte in $x_1 \leq x \leq x_n$ (e che $Y^{(n)}(x)$ è la derivata $n-i$ di $Y^{(i)}(x)$).

Osservazione. *Sieno:* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ *r numeri interi positivi (maggiori od eguali ad* 1) *con* $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=n$; $x_1 < < x_2 < \ldots < x_r$ *r punti dell'intervallo* $a \leq x \leq b$ *e* $F(x)$ *una funzione assolutamente continua, insieme con le sue prime* $n-1$ *derivate, in* $a \leq x \leq b$ *e verificante le condizioni*:

$$F(x_j)=F'(x_j)=\ldots=F^{\nu_j-1}(x_j)=0, \quad (j=1, 2, \ldots, r).$$

Risultano allora verificate, in tutto $a \leq x \leq b$, *le diseguaglianze*:

$$|F^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\int_a^b |F^{(n)}(x)|\, dx,$$

$$(i=1, 2, \ldots, n-1;\ F^{(0)}(x)=F(x)).$$

Basta infatti ricordare che per la funzione $F(x)$ vale la formula [6]:

$$F(x)=(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_{r-1})^{\nu_{r-1}}(x-x_r)^{\nu_r-1}\frac{F^{(n-1)}(u)}{(n-1)!},$$

$$(a \leq x \leq b),$$

e poi ragionare come nel lemma precedente.

2. - Per provare il teorema enunciato nella prefazione osserviamo innanzi tutto che possiamo sempre supporre, per semplicità di dimostrazione,

$$c_1=c_2=\ldots=c_n=0 \ [7].$$

[6] Cfr. loc. cit. [5], n. 58.

[7] Infatti, detto $G(x)$ il polinomio di grado $n-1$ (al più) verificante le condizioni $G(x_1)=c_1$, $G(x_2)=c_2, \ldots, G(x_n)=c_n$, basta eseguire il cambiamento di funzione $y(x)=\eta(x)-G(x)$, in base al quale, nella (2), le $\alpha_i(x)$ restano immutate e varia soltanto la $\beta(x)$.

Indichiamo inoltre con Σ lo spazio delle funzioni $y(x)$ continue insieme con le loro prime $n-1$ derivate in $a \leq x \leq b$ e assumiamo, in tale spazio, come distanza fra due funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ la somma dei massimi delle n funzioni $|y_1(x) - y_2(x)|$, $|y_1'(x) - y_2'(x)|, \ldots, |y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x)|$; un insieme compatto di Σ risulterà costituito da funzioni equicontinue ed equilimitate con le loro derivate fino alla $(n-1)$-ma.

Osserviamo infine che, data $y(x)$, la funzione, $z(x)$, assolutamente continua insieme con le sue prime $n-1$ derivate, verificante, quasi ovunque in $a \leq x \leq b$, l'equazione

$$z^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \tag{6}$$

e le condizioni

$$z(x_1) = z(x_2) = \ldots = z(x_n) = 0$$

è completamente determinata ed è data dalla formula:

$$\begin{aligned} z(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(u, y(u), y'(u), \ldots, y^{(n-1)}(u))\, du \,- \\ - \sum_1^n{}_i \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \cdot \\ \cdot \int_a^{x_i} dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(u, y(u), y'(u), \ldots, y^{(n-1)}(u))\, du . \end{aligned} \tag{7}$$

Premesso ciò e tenuta presente la (3), indichiamo con M un numero reale positivo verificante la relazione

$$\int_a^b \left(\sum_0^{n-1}{}_i \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \alpha_i(x) + \frac{\beta(x)}{M} \right) dx < 1 \tag{8}$$

e con Σ' l'insieme degli elementi $g(x)$ di Σ per i quali sia

$$g(x_1) = g(x_2) = \ldots = g(x_n) = 0$$

e la $g^{(n-1)}(x)$ sia assolutamente continua e

$$(9) \qquad |g^{(n)}(x)| \leq M \sum_{0}^{n-1} {}_i \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \alpha_i(x) + \beta(x).$$

Valendo allora per le $g(x)$ le relazioni, analoghe alle (4),

$$|g^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_a^b |g^{(n)}(x)| dx,$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1 \,;\; g^{(0)}(x) = g(x)),$$

per le (8) e (9), si ha

$$|g^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} M.$$

L'insieme Σ' sarà allora compatto rispetto a Σ perchè composto da funzioni equicontinue ed equilimitate insieme con le loro prime $n-1$ derivate in $a \leq x \leq b$.

Fissato un numero intero positivo p, dividiamo l'intervallo (a, b) in 2^p parti eguali mediante i punti

$$D_p: \ \xi_1 = a, \ \xi_2, \ldots, \xi_{2^p}, \ \xi_{2^p+1} = b$$

e sia $g(x)$ un elemento qualsiasi di Σ' e $\varphi_p(g \mid x)$ la funzione continua, lineare in ognuno degli intervalli di suddivisione e verificante le condizioni

$$\varphi_p(g \mid \xi_1) = g^{(n-1)}(\xi_1), \ \varphi_p(g \mid \xi_2) = g^{(n-1)}(\xi_2), \ldots$$
$$\ldots, \ \varphi_p(g \mid \xi_{2^p+1}) = g^{(n-1)}(\xi_{2^p+1}).$$

Le funzioni $\varphi_p(g \mid x)$, per $p = 1, 2, \ldots$, verificano la diseguaglianza

$$|\varphi_p(g \mid x)| \leq M$$

e risultano inoltre, come si vede facilmente, equicontinue in $a \leq x \leq b$.

Posto ora

$$\psi_p(g\,|\,x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots . \int_a^{t_{n-2}} \varphi_p(g\,|\,u)\,du -$$

$$-\sum_1^{n-1}{}_i \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})\,(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n-1})}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})\,(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n-1})} \int_a^{x_i} dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-2}} \varphi_p(g\,|\,u)du$$

e quindi

$$\psi_p^{(n-1)}(g\,|\,x) = \varphi_p(g\,|\,x),$$

per la (5) e ricordando che $|\,\psi_p^{(n-1)}(g\,|\,x)\,| \leq M$, si avrà, in $a \leq \leq x \leq b$,

$$|\,\psi_p^{(i)}(g\,|\,x)\,| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\,M, \tag{10}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1\,;\ \psi_p^{(0)}(g\,|\,x) = \psi_p(g\,|\,x)).$$

Inoltre, prefissata $g(x)$, risulta, come si vede facilmente,

$$\lim_{p\to\infty} \psi_p^{(i)}(g\,|\,x) = g^{(i)}(x), \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Per ogni numero intero positivo p indicheremo con Σ_p'' la porzione di Σ formata con gli elementi $\psi_p(g\,|\,x)$ e con $\overline{\Sigma}_p''$ l'involucro chiuso (rispetto a Σ) di Σ_p''. È evidente che $\overline{\Sigma}_p''$ è costituito da funzioni la cui derivata $(n-1)$-ma è continua e lineare in ogni intervallo di suddivisione di (a, b) in 2^p parti eguali. Indicheremo infine con Σ'' lo spazio

$$\Sigma'' = \Sigma_1'' + \Sigma_2'' + \ldots \Sigma_p'' + \ldots\ldots.$$

Nell' S_{2^p+1} reale euclideo consideriamo l'insieme s_{2^p+1} descrittto dal punto $(\psi_p^{(n-1)}(\xi_1),\ldots, \psi_p^{(n-1)}(\xi_{2^p+1}))$ al variare di $\psi_p(x)$ in Σ_p'' e l'insieme $\overline{s}_{2^p+1}$ descritto dal punto $(\psi_p^{(n-1)}(\xi_1), \ldots, \psi_p^{(n-1)}(\xi_{2^p+1}))$ al variare di $\psi_p(x)$ in $\overline{\Sigma}_p''$.

Allora $\overline{s}_{2^p+1}$ è l'involucro chiuso di s_{2^p+1} ed è convesso.

Diciamo infine Σ^* lo spazio

$$\Sigma^* = \Sigma' + \Sigma''$$

e $\overline{\Sigma}^*$ l'involucro chiuso di Σ^* (rispetto a Σ). L'insieme $\overline{\Sigma}^*$ è un sottospazio compatto di Σ ed ogni suo elemento $y(x)$ soddisfa alle relazioni:

$$|y^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} M,$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ y^{(0)}(x) = y(x)).$$

Premesso tutto ciò, sia ora $\psi(x)$ un elemento qualsiasi di $\overline{\Sigma}''_p$. I valori che $\psi^{(n-1)}(x)$ assume nei punti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2^p+1}$ di suddivisione dell'intervallo (a, b) in 2^p parti eguali, rappresentano, come abbiamo già osservato, un punto dell'insieme $\overline{s}_{2^p+1}$.

Trasformando la $\psi(x)$ mediante la (7) otteniamo una funzione $g(x)$ che, in base alle (2), (4), (6) e (10), appartiene, evidentemente, a Σ'. Allora i valori che la $g^{(n-1)}(x)$ assume nei punti di suddivisione di D_p rappresentano, nel modo solito, un punto di $\overline{s}_{2^p+1}$. Viene così definita una trasformazione univoca e continua, di $\overline{s}_{2^p+1}$ in una sua parte, quindi, per un teorema di BROUWER [8], esiste almeno un elemento unito.

Per ogni numero intero positivo p posso quindi trovare una funzione $\psi_p(x)$ di $\overline{\Sigma}''_p$ tale che la sua derivata $(n-1)$-ma coincida con la derivata $(n-1)$-ma della sua trasformata $g_p(x)$ nei punti di suddivisione di D_p. Dalle successioni

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots,$$

$$g_1(x),\ g_2(x), \ldots,$$

formate da funzioni equicontinue ed equilimitate, potremo estrarre delle successioni parziali:

(8) BROUWER: *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, [Math. Ann., t. 71 (1912), p. 115].

$$\psi_{q_1}(x),\ \psi_{q_2}(x),\ldots\ldots,$$

$$g_{q_1}(x),\ g_{q_2}(x),\ldots\ldots$$

in modo che le

$$\begin{array}{l} \psi^{(i)}_{q_1}(x),\ \psi^{(i)}_{q_2}(x),\ldots\ldots, \\ g^{(i)}_{q_1}(x),\ g^{(i)}_{q_2}(x),\ldots\ldots, \end{array} \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ldots,n-1)$$

risultino convergenti uniformemente verso funzioni continue che indicheremo rispettivamente con $\psi^{(i)}(x)$ e $g^{(i)}(x)$ $(i=0,1,\ldots,\ n-1$; $\psi^{(0)}(x)=\psi(x)$, $g^{(0)}(x)=g(x))$ dove $g(x)$ è la trasformata della $\psi(x)$ $\left(\text{e } \psi^{(i)}(x)=\dfrac{d^i\psi(x)}{dx^i},\ g^{(i)}(x)=\dfrac{d^i g(x)}{dx^i}\right)$.

Siccome $\psi^{(n-1)}(x)$ e $g^{(n-1)}(x)$ sono funzioni continue e coincidono in un insieme denso su $a\leq x\leq b$, si avrà, in $a\leq x\leq b$,

$$\psi^{(n-1)}(x)=g^{(n-1)}(x)$$

e quindi la trasformazione considerata ammette almeno un elemento unito.

(*Pervenuto in Redazione il 10 ottobre 1941 XIX*)