RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GUIDO ZAPPA

Sui gruppi di Hirsch supersolubili. Nota I

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 12 (1941), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__1_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUI GRUPPI DI HIRSCH SUPERSOLUBILI.

Nota I di GUIDO ZAPPA *a Roma.*

Come è noto, un gruppo G (finito o infinito) è detto *risolubile* quando la serie dei suoi successivi sottogruppi derivati ha un numero finito di termini e si chiude con l'identità.

K. A. HIRSCH (1) ha recentemente studiato una particolare classe di gruppi infiniti risolubili, i gruppi cioè che egli chiama S-gruppi, e che noi, per distinguerli da altri S-gruppi introdotti da HALL (2), preferiamo chiamare *gruppi di* HIRSCH. Essi si definiscono come segue:

Un gruppo G vien detto gruppo di HIRSCH *quando possiede almeno una serie di sottogruppi*

$$G = G_0,\ G_1, \ldots,\ G_l = 1$$

con un numero finito di termini, il primo dei quali è G stesso, e l'ultimo è l'identità, in modo che ogni sottogruppo sia invariante nel precedente, e che i fattoriali G_i / G_{i+1} $(i = 0, \ldots, l-1)$ siano tutti abeliani con un numero finito di generatori.

HIRSCH ha dato le più importanti proprietà dei suddetti gruppi. Tra queste ricordiamo le seguenti:

I) *Ogni sottogruppo, e ogni gruppo fattoriale di un gruppo di* HIRSCH, *è ancora un gruppo di* HIRSCH.

(1) K. A. HIRSCH, *On infinite soluble groups, I*, Proc. London Math. Soc., 2ª serie, vol. 44, pp. 53-60 (1938).

(2) P. HALL, *A note on soluble groups*, Journal London Math. Soc., 3, pp. 98-105 (1928).

II) *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè un gruppo infinito risolubile sia di* Hirsch, *è che in esso ogni catena crescente di sottogruppi abbia un numero finito di termini differenti.*

III) *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè un gruppo infinito risolubile sia di* Hirsch, *è che esso abbia un numero finito di generatori.*

Diremo *catena di composizione* di un gruppo di Hirsch una serie costituita da un numero finito di sottogruppi, ciascuno invariante nel precedente, iniziantesi con G e terminante con l'identità: $G = M_0,\ M_1, \ldots,\ M_h = 1$, e tale che i fattoriali $M_i \,/\, M_{i+1}$ sono ciclici infiniti o ciclici di ordine primo.

Diremo invece *catena principale* di un gruppo G di Hirsch una serie costituita da un numero finito di sottogruppi, ciascuno contenuto nel precedente e invariante in G, iniziantesi con G e terminante con l'identità: $G = N_0, \ldots,\ N_k = 1$, e tale che

a) non esistano sottogruppi invarianti di G contenenti N_{i+1} e contenuti in N_i, che abbiano indice infinito in $N_i\,(i = 0, \ldots$ $\ldots, k-1)$;

b) ogni fattoriale $N_i \,/\, N_{i+1}$ sia, se infinito, un gruppo abeliano libero, e, se finito, un gruppo abeliano d'ordine p^n (p primo) e tipo $(1, \ldots, 1)$.

Dal fatto che i gruppi di Hirsch sono risolubili, si deduce facilmente che ogni gruppo di Hirsch ha almeno una catena di composizione. Ma Hirsch ha di più mostrato che

IV) *Ogni gruppo di* Hirsch *possiede almeno una catena principale.*

Hirsch si è poi posto il problema, se in due diverse catene principali, o in due diverse catene di composizione di uno stesso gruppo G, i gruppi fattoriali siano, a meno dell'ordine, isomorfi; ed ha dimostrato che

V) *In due diverse catene principali (o di composizione) di uno stesso gruppo G di* Hirsch, *i gruppi fattoriali d'ordine infinito sono nello stesso numero e, a meno dell'ordine, a due a due isomorfi.*

Egli ha inoltre fatto vedere con esempi, che ciò non vale pei gruppi fattoriali d'ordine finito, e si è posto il quesito, se ciò valga anche pei gruppi fattoriali d'ordine finito, qualora ci si limiti a considerare catene principali, o di composizione, con un numero minimo di termini, o, per usare la sua denominazione, di lunghezza minima.

Hirsch ha dato risposta al quesito, e in senso affermativo, per una larga classe di gruppi di Hirsch, detti, *gruppi con serie centrale* (3), e che sono caratterizzati dalla proprietà di contenere una catena di composizione $G = K_0, \ K_1, \dots, \ K_m = 1$, tale che il fattoriale K_i / K_{i+1} appartenga al centrale di G / K_{i+1}. Hirsch ha determinato molte proprietà di questi gruppi, che sono analoghe a quelle possedute, tra i gruppi finiti, dai p–gruppi.

In questa nota ci proponiamo di studiare una classe di gruppi di Hirsch più ampia di quella dei gruppi con serie centrale, e di dimostrare tra l'altro che, anche pei gruppi di questa nuova classe, i fattoriali di due catene principali di lunghezza minima sono, a meno dell'ordine, isomorfi.

1. Definizione. *Un gruppo di* Hirsch *si dirà supersolubile se possiede almeno una catena principale, i cui gruppi fattoriali siano tutti ciclici infiniti, o ciclici d'ordine primo.*

Notiamo anzitutto che

Ogni sottogruppo di un gruppo di Hirsch *supersolubile, è un gruppo di* Hirsch *supersolubile.*

Sia G un gruppo di Hirsch supersolubile, e sia

$$G = N_0, \ N_1, \dots, \ N_k = 1$$

una sua catena principale, in cui ogni fattoriale N_i / N_{i+1} sia ciclico infinito, o ciclico d'ordine primo.

Sia L un sottogruppo qualsiasi di G. Dal teorema I) di Hirsch sopra riportato, segue che L è ancora un gruppo di Hirsch. Si indichi ora con L_i l'intersezione di L con $N_i \, (i = 0, \dots, k)$.

(3) K. A. Hirsch, *On infinite soluble groups, II*, Proc. London Math. Soc., 2a serie, vol. 44, pp. 336-344 (1938).

Ogni sottogruppo L_i è invariante in N. Detto poi R_i il minimo gruppo contenente L_i ed N_{i+1}, si ha da un teorema sugli isomorfismi che R_i / N_{i+1} è oloedricamente isomorfo ad L_i / L_{i+1}. Ora R_i / N_{i+1} è un sottogruppo di N_i / N_{i+1}, e quindi è al pari di esso ciclico d'ordine primo o ciclico infinito; tale pertanto dovrà essere L_i / L_{i+1}, e di conseguenza la serie $L, L_1, \ldots, L_k = 1$ è una catena principale, i cui fattoriali sono ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti. Da ciò segue che L è un gruppo di Hirsch supersolubile, c. d. d.

Si osservi parimenti che

Se G è un gruppo di Hirsch *supersolubile, e L è un suo sottogruppo invariante, anche il fattoriale G / L è un gruppo di* Hirsch *supersolubile.*

Sia $G = N_0, N_1, \ldots, N_k = 1$ una catena principale di G, in cui ogni fattoriale sia ciclico d'ordine primo, o ciclico infinito. Considerata, accanto a questa catena, la serie G, L, 1, di sottogruppi invarianti, si ha dal teorema di Jordan-Hölder-Schreier che si possono raffinare le due serie, in modo da ottenere due nuove serie di sottogruppi invarianti, i cui fattoriali siano, a meno dell'ordine, isomorfi. Poichè una di queste serie si ottiene raffinando la $G, N_1, \ldots, N_k = 1$, le due nuove serie saranno anch'esse serie principali con fattoriali ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti. Se

$$G,\ H_1, \ldots, H_{t-1},\ L,\ K_1, \ldots, K_{s-1},\ K_s = 1$$

è la catena principale ottenuta raffinando la serie G, L, 1, la serie

$$G / L,\ H_1 / L, \ldots, H_{t-1} / L,\ 1$$

è una serie principale di G / L con fattoriali ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti. G / L è pertanto supersolubile, c. d. d.

2. Passiamo ora a provare che

In ogni catena principale di un gruppo di Hirsch *supersolubile, i fattoriali sono tutti ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti.*

Sia G un gruppo di Hirsch supersolubile. Sia

$$(1) \qquad G = N_0, \ N_1, \ldots, \ N_k = 1$$

una sua catena principale (esistente per definizione), i cui fattoriali siano tutti ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti, e sia

$$(2) \qquad G = M_0, \ M_1, \ldots, \ M_k = 1$$

un' altra sua catena principale. Si tratta di dimostrare che i fattoriali di questa godono della stessa proprietà di quelli della (1). Facciamo la dimostrazione per assurdo, supponendo pertanto che, ad es., il fattoriale M_i / M_{i+1} non sia ciclico d' ordine primo, nè ciclico infinito. Sono allora possibili due casi:

a) M_i / M_{i+1} è un gruppo abeliano libero non ciclico. Allora, pel teorema IV) di Hirsch, di cui sopra, M_i / M_{i+1} è isomorfo ad un fattoriale della (1), che dovrebbe essere anch'esso un gruppo abeliano libero non ciclico, contro l'ipotesi.

b) M_i / M_{i+1} è un gruppo abeliano d'ordine p^n (p primo, $n > 1$) e tipo $(1, 1, \ldots, 1)$. In base al teorema di Jordan-Hölder-Schreier, sarà possibile raffinare le due catene principali (1), (2) in modo che i gruppi fattoriali che si originano siano a due a due isomorfi. E poichè nella (1), o in qualunque catena che si ottenga raffinando la (1), i gruppi fattoriali sono ciclici, si dovranno poter inserire tra M_i ed M_{i+1} dei sottogruppi invarianti, in modo che i fattoriali che si originano sian ciclici, e ciò contro la definizione di catena principale. Il teorema è pertanto in ogni caso dimostrato.

3. Estendiamo ora ai gruppi di Hirsch supersolubili un teorema già noto pei gruppi finiti supersolubili ([4]).

([4]) Pei gruppi finiti supersolubili, cioè pei gruppi finiti i cui fattori principali sono tutti numeri primi, tale teorema fu trovato da E. Wendt nel 1901 (*Über eine spezielle Klasse von Gruppen*, Math. Ann. 55, pp. 479-492). Esso fu recentemente ritrovato dall'Autore (a cui, per involontario, *Il derivato di un gruppo di* Hirsch *supersolubile è un gruppo con serie centrale.*

Sia infatti G' il derivato di un gruppo di Hirsch supersolubile G, e sia $G = N_0, N_1, \ldots, N_k = 1$ una catena principale di G. Chiamiamo H_i l'intersezione di N_i con G' $(i = 0, \ldots, k)$. I sottogruppi H_i, quali intersezioni di sottogruppi invarianti in G, sono invarianti in G. Dal ragionamento fatto per dimostrare il primo teorema del n. 1, segue che i sottogruppi H_i costituiscono una catena principale di G', e che i fattoriali H_{i-1} / H_i $(i = 1, \ldots, k)$ sono tutti ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti. Siano a e b due qualsiasi elementi di G; essi determineranno in ciascuno dei fattoriali H_{i-1} / H_i automorfismi permutabili, perchè il gruppo di automorfismi di un gruppo ciclico è sempre abeliano. Essendovi un isomorfismo tra gli elementi di G e gli automorfismi che essi determinano in H_{i-1} / H_i, il commutante $a^{-1}b^{-1}ab$ di a e b determina su H_{i-1} / H_i un automorfismo che è il commutante degli automorfismi determinati da a e b, vale a dire l'automorfismo identico. Pertanto ogni commutante, e quindi anche ogni elemento di G', determina l'automorfismo identico in ciascuno dei fattoriali H_{i-1} / H_i, onde H_{i-1} / H_i appartiene al centrale di G' / H_i, e la serie $G', H_1, \ldots, H_k = 1$ è una serie centrale di G', c. d. d.

4. Per arrivare a proprietà più importanti sui gruppi di Hirsch supersolubili, ci gioveremo dei seguenti lemmi.

A) Se un gruppo di Hirsch *supersolubile ha un elemento il cui ordine è divisibile pel numero primo p, in ogni sua catena di composizione (e quindi anche principale) v' è almeno un fattoriale d' ordine p.*

Poichè nei gruppi di Hirsch supersolubili le catene princi-

deplorevole errore, era sfuggita la memoria ora citata di Wendt) nella nota: *Sui gruppi supersolubili* (Rend. Sem. Mat. Univ. Roma, IV serie, vol. , pp. 323-330 (1938)) e, contemporaneamente, in modo molto semplice, da O. Ore nella memoria: *Contributions to the theory of groups of finite order*, (Duke mathematical Journal, vol. 5, pp. 431-460 (1939)). È appunto la dimostrazione di Ore che vien qui estesa ai gruppi di Hirsch supersolubili.

pali sono particolari catene di composizione, basterà dimostrare la cosa per quest' ultime.

Sia G un tal gruppo, e a un suo elemento il cui ordine è divisibile per p. Una conveniente potenza di a, che diremo b, deve avere esattamente ordine p. Se $G = N_0, N_1, \ldots, N_k = 1$ è una catena di composizione di G, si indichi con N_i il primo dei suoi sottogruppi, che non contenga b. Nell' isomorfismo meriedrico tra N_{i-1} ed N_{i-1} / N_i, all' elemento b dovrà corrispondere in N_{i-1} / N_i un elemento diverso dall' identità, quindi necessariamente d' ordine p. Ma allora N_{i-1} / N_i non può essere ciclico infinito; esso dovrà avere per ordine un numero primo, e precisamente p, c. d. d.

B) Se un gruppo G ha un sottogruppo invariante N ciclico infinito, il cui indice è un numero primo dispari p, e non ha elementi d' ordine finito, è esso stesso un gruppo ciclico infinito.

Sotto le ipotesi fatte, G sarà generato da un elemento b, generatore di N, e da un elemento a, tale che a^p sia in N. Essendo N invariante in G, trasformando mediante a gli elementi di N, si deve determinare in N un automorfismo, il cui ordine divide p. Ma, essendo N ciclico infinito, esso possiede, oltre l' automorfismo identico, solo l' automorfismo d' ordine 2 che muta ciascun elemento nel suo inverso. Onde a determinerà in N l' automorfismo identico, vale a dire sarà permutabile con b e G di conseguenza sarà abeliano. Due casi sono allora da distinguersi:

α) È $a^p = b^{pk}$, con k intero $\gtreqless 0$. Si ha allora

$$(a b^{-k})^p = a^p b^{-kp} = b^{kp} b^{-kp} = 1$$

onde ab^{-k}, (che è diverso dall' identità, perchè a non è in N), ha ordine finito p, contro le ipotesi fatte. Questo caso pertanto si esclude.

β) È $a^p = b^k$, con k non divisibile per p. L' equazione indeterminata

$$kx + py = 1 \tag{3}$$

ha allora soluzione (perchè $D(k, p) = 1$). Presi due numeri x e y che soddisfino ad essa, si ha

$$(a^x b^y)^p = a^{xp} b^{yp}$$

perchè a e b sono permutabili, ed inoltre

$$a^{xp} b^{yp} = b^{kx + yp} = b$$

perchè $a^p = b^k$, e per la (3). In sostanza, b è potenza di $a^x b^y$. Analogamente si ha

$$(a^x b^y)^k = a^{xk} b^{yk} = a^{xk} a^{yp} = a^{xk + yp} = a$$

onde anche a è potenza di $a^x b^y$. Pertanto $a^x b^y$, generando i generatori a e b di G, genera tutto G, che è di conseguenza ciclico infinito. Il lemma è quindi dimostrato.

Dalla dimostrazione precedente risulta del pari che

C) Se un gruppo G ha un sottogruppo invariante N ciclico infinito, il cui indice sia un numero primo dispari p, esso è abeliano.

È poi immediato che

D) Se un gruppo G ha un sottogruppo invariante N d'ordine 2, il cui indice sia un numero primo dispari p, esso è (ciclico, quindi) abeliano.

5. Per arrivare a stabilire che i fattoriali di due catene principali di lunghezza minima sono, a meno dell'ordine, isomorfi, occorre provare che

Data una catena principale Σ di un gruppo di Hirsch *supersolubile G, può costruirsi un'altra catena principale Σ^*, tale che*

a) Il numero ν^* dei fattoriali di Σ^* non supera il numero ν dei fattoriali di Σ.

b) Tra i ν fattoriali di Σ se ne possono scegliere ν^*, i quali siano, a meno dell'ordine, isomorfi ai fattoriali di Σ^*.

c) Esiste un numero ρ tale che i primi $\nu^* - \rho$ fattoriali di Σ^* siano d'ordine infinito o d'ordine 2, e gli ultimi ρ d'ordine primo dispari.

Sia

$$G = N_0,\ N_1, \ldots,\ N_\nu = 1$$

la catena principale Σ. Se in Σ nessun fattoriale d'ordine primo dispari è seguito da fattoriali d'ordine infinito o d'ordine 2, già Σ soddisfa alle condizioni che si desiderano per Σ^*. In caso contrario, sia N_{i-1} / N_i l'ultimo fattoriale di Σ d'ordine primo dispari che sia seguito da fattoriali d'ordine infinito o d'ordine 2. Allora sono da distinguersi tre casi:

I) N_i / N_{i+1} ha ordine 2. Per la D) del numero precedente, N_{i-1} / N_{i+1} è allora abeliano, e, detto p l'ordine di N_{i-1} / N_i, si ha che gli elementi di N_{i-1} / N_{i+1} d'ordine p formano un sottogruppo caratteristico L_i / N_{i+1}. La catena

$$G = N_0,\ N_1, \ldots,\ N_{i-1},\ L_i,\ N_{i+1}, \ldots,\ N_\nu = 1$$

è una nuova catena principale, Σ', i cui fattoriali sono isomorfi a quelli di Σ, e che differisce da Σ pel fatto che, o è diminuito di uno il numero dei fattoriali d'ordine dispari che precedano fattoriali d'altro tipo, oppure l'ultimo di tali fattoriali, anzichè essere al posto i-esimo, è al posto $(i+1)$-esimo.

II) N_i / N_{i+1} ha ordine infinito, e N_{i-1} / N_{i+1} ha elementi d'ordine primo dispari p. Allora N_{i-1} / N_{i+1} è abeliano, per la C) del numero precedente, e i suoi elementi d'ordine p formano un sottogruppo caratteristico L_i / N_{i+1}. La catena

$$G = N_0,\ N_1,\ \ldots,\ N_{i-1},\ L_i,\ N_{i+1}, \ldots\ldots,\ N_\nu = 1$$

è una nuova catena principale, Σ', i cui fattoriali sono isomorfi a quelli di Σ, e che differisce da Σ pel fatto che, o è diminuito il numero dei fattoriali d'ordine dispari che precedono fattoriali d'altro tipo, oppure l'ultimo di tali fattoriali, anzichè essere al posto i-esimo, è al posto $(i+1)$-esimo.

III) N_i / N_{i+1} ha ordine infinito, ma N_{i-1} / N_{i+1} non ha elementi d'ordine primo dispari p. Allora, per la B) del numero precedente, N_{i-1} / N_{i+1} è ciclico infinito. La catena

$$G = N_0,\ N_1, \ldots,\ N_{i-1},\ N_{i+1}, \ldots,\ N_\nu = 1$$

è una nuova catena principale Σ', che differisce da Σ pel fatto che non ha più il fattoriale d'ordine p, N_{i-1} / N_i.

In definitiva, siamo passati in ogni caso dalla catena Σ alla catena Σ', la quale differisce da essa o per avere un fattoriale d'ordine dispari in meno, o perchè è diminuito di uno il numero dei fattoriali d'ordine dispari che precedono fattoriali d'altro tipo, o perchè l'ultimo di tali fattoriali ha fatto un passo in avanti.

Ripetendo il procedimento più volte, si arriverà ad na catena Σ'', in cui i fattoriali d'ordine dispari che precedono fattoriali d'altro tipo sono uno di meno che in Σ. I fattoriali di Σ'' sono isomorfi, a meno dell'ordine, ai fattoriali di Σ, oppure ai fattoriali di Σ ad esclusione di uno di questi.

Ripetendo ancora il procedimento, si arriverà ad una catena Σ^*, in cui non vi sono più fattoriali d'ordine dispari che precedono fattoriali d'altro tipo, e i cui fattoriali sono isomorfi, a meno dell'ordine, a tutti o ad una parte dei fattoriali di Σ. Detta catena soddisfa alle condizioni *a*), *b*), *c*).

6. Sia ora

$$G = M_0,\ M_1, \ldots,\ M_h = 1$$

la catena Σ^*, e sia M_i / M_{i+1} il primo fattoriale d'ordine dispari. Allora M_i, avendo una serie principale M_i, $M_{i+1}, \ldots, M_h = 1$ con fattoriali tutti d'ordine dispari, ha ordine dispari. G / M_i ha una catena principale, G / M_i, $M_1 / M_i, \ldots, M_i / M_i = 1$, senza fattoriali d'ordine dispari; onde, pel lemma *A*) del n. 4, non ha elementi d'ordine dispari, oltre l'identità. E poichè, nell'isomorfismo meriedrico tra G e G / M_i, ad elementi d'ordine dispari corrispondono elementi d'ordine dispari, gli elementi d'ordine dispari di G dovranno avere per omologo in G / M_i l'identità, e pertanto sono in M_i. In conclusione:

Gli elementi d'ordine dispari di un gruppo di Hirsch *supersolubile formano un sottogruppo caratteristico.*

7. Sia G un gruppo di Hirsch supersolubile, e sia D il sottogruppo dei suoi elementi d'ordine dispari. Dal ragionamento dei numeri precedenti segue che, data una catena principale di G, se ne può trovare un'altra, di lunghezza eguale o minore, i cui fattoriali d'ordine dispari siano, a meno dell'ordine, isomorfi ai fattoriali di D; e in conseguenza:

I fattoriali d'ordine primo dispari di una catena principale di lunghezza minima sono, a meno dell'ordine, isomorfi ai fattoriali di D.

Siano ora date due catene principali di lunghezza minima di G. I loro fattoriali d'ordine primo dispari sono, a meno dell'ordine, isomorfi ai fattoriali di D, e quindi isomorfi tra loro. I fattoriali d'ordine infinito delle due catene sono, a meno dell'ordine, isomorfi tra loro, secondo il teorema IV) di Hirsch da noi riportato in principio. Restano i fattoriali d'ordine 2 i quali, essendo le due serie di lunghezza minima, e quindi di egual numero di termini, dovranno essere anch'essi nello stesso numero, epperò a due a due isomorfi, a meno dell'ordine.

In conclusione

Se G è un gruppo di Hirsch *supersolubile, i fattoriali di due catene principali di lunghezza minima sono, a meno dell'ordine, isomorfi.*

Verrà esaminato, in una nota ulteriore sull'argomento, il comportamento dei sottogruppi di G il cui ordine è una potenza di 2.

Parimenti verranno ivi studiate le catene di composizione di lunghezza minima.

(Pervenuto in Redazione il 6 gennaio 1941-XIX)