RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA FIORE

A proposito di alcune disequazioni lineari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__1_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

A PROPOSITO DI ALCUNE DISEQUAZIONI LINEARI

Nota (*) *di* MARIA FIORE (*a Rovigo*).

In questa Nota (1) mi propongo di indicare un criterio sufficiente perchè le soluzioni non positive (2) del sistema

$$
(1) \qquad \begin{array}{l} a_{1,1}\, x_1 + \ldots + a_{1,n}\, x_n + a_1 \geq 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ a_{n,1}\, x_1 + \ldots + a_{n,n}\, x_n + a_n \geq 0 \end{array}
$$

siano limitate inferiormente (3).

Nei riguardi del sistema (1) si sa che:

Il sistema (1), *nelle variabili reali* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *ammette soltanto soluzioni non negative, se i numeri* $a_{r,s}$ *ed* a_r *sono reali e se*

$$
(2) \qquad a_r \leq 0 \qquad (r = 1, \ldots, n)\,,
$$

se

$$
(3) \qquad a_{r,s} \leq 0 \qquad (r, s = 1, \ldots, n\,;\ r \neq s)\,,
$$

(*) Pervenuta in Redazione il 23 luglio 1947.

(1) Nella quale espongo alcuni risultati della mia Tesi per la Laurea in Matematica, discussa a Padova nel luglio 1947.

(2) Una soluzione $\xi_1, \ldots, \xi_n$ del sistema (1) è non positiva, se è $\xi_1 \leq 0, \ldots, \xi_n \leq 0$.

(3) Le soluzioni non positive del sistema (1) sono inferiormente limitate, se esiste una $n-pla$ di numeri (reali) $K_1, \ldots, K_n$ tali che, essendo $\xi_1, \ldots, \xi_n$ una soluzione non positiva, risulti: $\xi_1 \geq K_1, \ldots, \xi_n \geq K_n$.

e se

$$(4) \qquad D_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

e il risultato è dovuto a ZWIRNER [4]; inoltre, a norma di un teorema di CINQUINI [5] e di una osservazione di ZWIRNER [6], si può dire che:

Se i numeri a_r e $a_{r,s}$ sono reali e soddisfanno alle (3) *e alle* (4), *le eventuali soluzioni (reali e) non positive del sistema* (1) *sono inferiormente limitate.*

La natura delle condizioni (4) suggerisce spontaneamente di porre il sistema (1) in relazione con la forma quadratica

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r,s}^{1 \dots n} a_{r,s} x_r x_s$$

(4) G. ZWIRNER, *Criteri d'unicità per un problema di valori al contorno per equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie d'ordine qualunque* [« Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova », vol. XIII (1942), pp. 18-20], n. 4.

Veramente ZWIRNER suppone $a_r = 0$; ma è chiaro che una soluzione delle (1) con $a_r \leq 0$ è anche soluzione per le disuguaglianze che si ottengono dalle (1) ponendo *zero* in luogo di a_r. Inoltre ZWIRNER fa anche un' ipotesi superflua sulle $a_{r,r}$. Egli infatti scrive le (1) sotto la forma

$$(c) \qquad \begin{aligned} &(1 - c_{1,1}) x_1 + \dots + c_{1,n} x_n \geq 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &c_{n,1} x_1 + \dots + (1 - c_{n,n}) x_n \geq 0 \end{aligned}$$

e suppone $c_{r,s} \geq 0$ per $r, s, = 1, \dots, n$ (si tenga presente che ZWIRNER ricerca criteri sufficienti perchè le (*c*) ammettano soltanto soluzioni non positive).

(5) S. CINQUINI, *Sopra il problema di Nicoletti per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie* [« Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. X (1941), pp. 127-138], pp. 129-131. Anche CINQUINI fa un' ipotesi superflua analoga a quella dello ZWIRNER.

(6) G. ZWIRNER, *Problemi di valori al contorno per sistemi di equazioni differenziali ordinarie* [« Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti » Tomo CI, Parte II (1941-42), pp. 405-418], pp. 415-416

(i cui coefficienti non soddisfacciano necessariamente alla condizione di simmetria $a_{r,s} = a_{s,r}$). In questo indirizzo si trova per es. che:

Se i numeri a_r e $a_{r,s}$ sono reali, con $a_r \geq 0$ $(r = 1, \ldots, n)$, e se la forma $f(x_1, \ldots, x_n)$ è definita positiva, le eventuali soluzioni non positive del sistema (1) *sono inferiormente limitate;*

il quale teorema (di cui darò in seguito due dimostrazioni) coincide soltanto parzialmente con quello di CINQUINI (7): invero, io non ho bisogno di fare ipotesi sui segni delle $a_{r,s}$ per $r \neq s$; mentre le condizioni di CINQUINI possono essere soddisfatte senza che lo siano le mie (naturalmente purchè la matrice $\|a_{r,s}\|$ non sia simmetrica). Dopo di ciò farò vedere come il teorema di CINQUINI si possa, volendo, dedurre da quello di ZWIRNER e ampliare lievemente nella sua portata.

1. – Dimostriamo dunque che:

Se $f = \sum_{r,s}^{1 \ldots n} a_{r,s}\, x_r\, x_s$ è una forma quadratica (a coefficienti reali, nelle variabili reali $x_1, \ldots, x_n$) definita positiva, se le a_i $(i = 1, \ldots, n)$ sono numeri reali e non negativi, le eventuali soluzioni non positive del sistema (1) *sono inferiormente limitate.*

Prima dimostrazione:

Supposto infatti che $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sia una n—*pla* di numeri non positivi soddisfacenti alle

(7) È qui evidente che se f è definita positiva, il sistema

$$\begin{array}{l} a_{1,1}\, x_1 + \ldots + a_{1,n}\, x_n \geq 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}\, x_1 + \ldots + a_{n,n}\, x_n \geq 0 \end{array}$$

non ammette soluzioni non positive diverse dalla $x_1 = \ldots = x_n = 0$; ma è chiaro che questa proposizione non ha per il teorema di ZWIRNER un ufficio analogo a quello che la proposizione del testo ha nei riguardi di quello di CINQUINI.

$$
(5) \qquad \begin{array}{l} a_{1,1}\,\xi_1 + \ldots + a_{1,n}\,\xi_n + a_1 \geq 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ a_{n,1}\,\xi_1 + \ldots + a_{n,n}\,\xi_n + a_n \geq 0\,, \end{array}
$$

moltiplicando la prima delle (5) per ξ_1, la seconda per $\xi_2, \ldots,$ l'n — *esima* per ξ_n e sommando si ottiene

$$
(6) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{r,s}\,\xi_r\,\xi_s + (a_1\,\xi_1 + \ldots + a_n\,\xi_n) \leq 0\,.
$$

Nell'ipotesi che $\xi_1, \ldots, \xi_n$ non siano tutti nulli, posto

$$
(7) \qquad \rho = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}
$$

(dove la determinazione del radicale è quella positiva), dalla (6) segue

$$
(8) \qquad \rho^2 \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{r,s} \frac{\xi_r}{\rho}\frac{\xi_s}{\rho} + \rho\left(a_1 \frac{\xi_1}{\rho} + \ldots + a_n \frac{\xi_n}{\rho}\right) \leq 0\,.
$$

I rapporti $\frac{\xi_r}{\rho}$ $(r = 1, \ldots, n)$ si possono interpretare come coordinate di un punto variabile sull'ipersuperficie sferica dello $S_n \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ avente come raggio l'unità e come centro l'origine delle coordinate. Ma la f è una funzione continua e positiva nei punti di questa ipersuperficie; perciò la f ammette ivi un minimo positivo m.

Attese le $a_1 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0$, $\xi_1 \leq 0, \ldots, \xi_n \leq 0$, la somma

$$
a_1 \frac{\xi_1}{\rho} + \ldots + a_n \frac{\xi_n}{\rho}
$$

non scende al di sotto di un conveniente numero non positivo $-n$. Ma allora è

$$
(9) \qquad \rho^2 \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{r,s} \frac{\xi_r}{\rho}\frac{\xi_s}{\rho} + \rho\left(a_1 \frac{\xi_1}{\rho} + \ldots + a_n \frac{\xi_n}{\rho}\right) \geq \rho^2\, m - \rho\, n\,.
$$

Dalle (8), (9) segue:

$$\rho\,(\rho\, m - n) \leq 0\ ;$$

e quindi, essendo $\rho > 0$, $m > 0$:

$$\rho \leq \frac{n}{m}\ .$$

Di qui e dalla (7), ricordando che $\xi_1 \leq 0, \ldots, \xi_n \leq 0$, si traggono le

$$\xi_1 \geq -\frac{n}{m},\ \xi_2 \geq -\frac{n}{m}, \ldots,\ \xi_n \geq -\frac{n}{m};$$

donde il teorema.

Seconda dimostrazione:

Supposto che $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sia una $n-pla$ di numeri non positivi soddisfacenti alle

$$(10)\qquad \begin{array}{l} a_{1,1}\,\xi_1 + \ldots + a_{1,n}\,\xi_n + a_1 \geq 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}\,\xi_1 + \ldots + a_{n,n}\,\xi_n + a_n \geq 0\,, \end{array}$$

moltiplicando la prima delle (10) per $\xi_1, \ldots,$ l'$n-$sima per ξ_n e sommando si ottiene

$$(11)\qquad \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{r,s}\,\xi_r\,\xi_s + (a_1\,\xi_1 + \ldots + a_n\,\xi_n) \leq 0\,.$$

Sia ora

$$(12)\qquad x_i = \sum_{r}^{1,\ldots n} c_{i,r}\,y_r \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

una sostituzione lineare, omogenea, ortogonale, atta a trasformare la f in forma canonica

$$(13)\qquad F = \lambda_1\,y_1^2 + \ldots + \lambda_n\,y_n^2,$$

dove le λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ sono numeri positivi. Operando la (12) sulla forma lineare

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$$

si ottiene

$$\sum_i^{1\ldots n} a_i x_i = \sum_i^{1\ldots n} a_i \sum_r^{1\ldots n} c_{i,r} y_r = \sum_{i,r}^{1\ldots n} a_i c_{i,r} y_r . \tag{14}$$

Sia ora $y_i = \eta_i$, per $x_i = \xi_i$; dalle (13), (14), per la (11), si ha:

$$\sum_r^{1\ldots n} \lambda_r \eta_r^2 + \sum_{i,r}^{1\ldots n} a_i c_{i,r} \eta_r = \sum_r^{1\ldots n} \left(\lambda_r \eta_r^2 + \sum_i^{1\ldots n} a_i c_{i,r} \eta_r \right) \leq 0 .$$

Posto

$$\frac{\sum_i^{1\ldots n} a_i c_{i,r}}{2\sqrt{\lambda_r}} = b_r ,$$

(dove b_r sono numeri reali, perchè conto che $\lambda_r > 0$), si ha subito

$$\sum_r^{1\ldots n} \left(\lambda_r \eta_r^2 + 2\sqrt{\lambda_r} b_r \eta_r + b_r^2 \right) - \sum_r^{1\ldots n} b_r^2 = \sum_r^{1\ldots n} \left(\sqrt{\lambda_r} \eta_r + b_r \right)^2 -$$
$$- \sum_r^{1\ldots n} b_r^2 \leq 0 .$$

Dall' ultima relazione si deduce

$$(\sqrt{\lambda_r} \eta_r + b_r)^2 \leq \sum_r^{1\ldots n} b_r^2 ,$$

da cui evidentemente

$$\frac{-\sqrt{\sum_r^{1\ldots n} b_r^2} - b_r}{\sqrt{\lambda_r}} \leq \eta_r \leq \frac{\sqrt{\sum_r^{1\ldots n} b_r^2} - b_r}{\sqrt{\lambda_r}} . \tag{15}$$

Ora, risultando limitate le η, segue che devono essere necessariamente limitate anche le ξ.

Osservazioni. – Naturalmente, perchè la forma quadratica $f = \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{r,s}\, x_r\, x_s$, considerata nel teorema precedente, sia definita positiva, è necessario e sufficiente che siano verificate le seguenti relazioni:

$$(16) \qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \frac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} & \cdots & \frac{a_{1,k}+a_{k,1}}{2} \\ \frac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} & a_{2,2} & \cdots & \frac{a_{2,k}+a_{k,2}}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_{1,k}+a_{k,1}}{2} & \frac{a_{2,k}+a_{k,2}}{2} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix} > 0,$$

per $k = 1, \ldots, n$.

Le eventuali soluzioni non positive del sistema di disequazioni lineari

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{6}x_3 + 1 \geq 0, \\ -\frac{3}{4}x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2} \geq 0, \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{3} \geq 0 \end{cases}$$

sono inferiormente limitate. I coefficienti del precedente sistema soddisfanno infatti alle (3), (4). Non sono invece soddisfatte le relazioni analoghe alle (16).

2. – Deduciamo ora il teorema di Cinquini da quello di Zwirner:

Le eventuali soluzioni non positive del sistema di disequazioni

$$(17) \qquad a_{i,1}\, x_1 + \ldots + a_{i,n}\, x_n + a_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dove $a_{r,s}$ $(r, s, = 1, \ldots, n\,;\ r \neq s)$ *sono numeri* ≤ 0 *per i quali valgono le relazioni*

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,k} \end{vmatrix} > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sono limitate inferiormente.

Il sistema (17) può infatti scriversi nel seguente modo:

$$(18)\qquad \begin{aligned} &a_{1,1}(x_1 - K_1) + a_{1,2}(x_2 - K_2) + \ldots + a_{1,n}(x_n - K_n) \geq 0\,, \\ &a_{2,1}(x_1 - K_1) + a_{2,2}(x_2 - K_2) + \ldots + a_{2,n}(x_n - K_n) \geq 0\,, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\,, \\ &a_{n,1}(x_1 - K_1) + a_{n,2}(x_2 - K_2) + \ldots + a_{n,n}(x_n - K_n) \geq 0\,, \end{aligned}$$

essendo $K_1, K_2, \ldots, K_n$ gli n numeri soddisfacenti alle

$$\begin{aligned} &a_{1,1} K_1 + a_{1,2} K_2 + \ldots + a_{1,n} K_n = -a_1\,, \\ &a_{2,1} K_1 + a_{2,2} K_2 + \ldots + a_{2,n} K_n = -a_2\,, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\,, \\ &a_{n,1} K_1 + a_{n,2} K_2 + \ldots + a_{n,n} K_n = -a_n\,; \end{aligned}$$

(si rammenti che è $D_n \neq 0$). Ora, il sistema di disequazioni (18), dove si considerino come variabili le differenze $x_i - K_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, è soddisfatto soltanto da valori non negativi delle variabili, come risulta del teorema di Zwirner; quindi è

$$x_1 - K_1 \geq 0\,,\ x_2 - K_2 \geq 0\,, \ldots,\ x_n - K_n \geq 0\,,$$

cioè

$$x_1 \geq K_1\,,\ x_2 \geq K_2\,, \ldots,\ x_n \geq K_n\,.$$

Osservazione. – Il ragionamento prova che il teorema precedente vale per tutte le soluzioni del sistema (17).