

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

**Sull' unirazionalità della varietà intersezione  
completa di più forme**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 18 (1949), p. 163-176

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1949\\_\\_18\\_\\_163\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__163_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SULL' UNIRAZIONALITÀ DELLA VARIETÀ INTERSEZIONE COMPLETA DI PIÙ FORME <sup>(1)</sup>

*Nota (\*) di ARNO PREDONZAN (a Trieste).*

È noto che la forma generale di qualunque ordine  $n$  dello spazio lineare  $S_r$  è unirazionale per  $r$  opportunamente grande <sup>(2)</sup>.

Nel presente lavoro giungo ad analoga conclusione nel caso più generale della varietà intersezione completa di più forme.

1. - Nello spazio lineare  $S_r(x_0, x_1, \dots, x_r)$  si consideri la varietà  $V_s^*(s = r - m \geq 0, n = \prod_{i=1}^m n_i)$  intersezione completa di  $m$  forme generiche

$$(1) \quad f_i^{*n_i}(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

dove

$$(2) \quad n_1, n_2, \dots, n_m$$

sono gli ordini rispettivi delle forme (1) e senza restrizione può suppersi

$$1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m .$$

(\*) Pervenuta in Redazione il 18 Novembre 1948.

(1) Lavoro comunicato al III Congresso dell' Unione Matematica Italiana (Pisa 23-27 Settembre 1948).

(2) U. MORIN, *Sull' unirazionalità dell' ipersuperficie algebrica di qualunque ordine e dimensione sufficientemente alta* (Atti del II Congresso dell' Unione Matematica Italiana - Bologna 1940).

Sia  $\nu$  il massimo degli interi (2) e fra questi siano in numero di  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  quelli che uguagliano, rispettivamente,  $1, 2, \dots, \nu$ ; cioè si abbia

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = n_2 = \dots = n_{a_1} = 1 \\ n_{a_1+1} = n_{a_1+2} = \dots = n_{a_1+a_2} = 2 \\ \dots \\ n_{a_1+a_2+\dots+a_{\nu-1}+1} = \dots = n_{a_1+a_2+\dots+a_\nu} = \nu \end{array} \right.$$

con

$$a_1 + a_2 + \dots + a_\nu = m ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a_t \leq m - 1 \quad (t = 1, 2, \dots, \nu - 1) , \\ 1 \leq a_\nu \leq m . \end{array} \right.$$

Mi propongo di dimostrare che:

La  $V_r^n$  è unirazionale per  $n_1, n_2, \dots, n_m$  qualunque e per ogni  $r$  che soddisfi alla limitazione

$$(3) \quad r \geq r_\nu ,$$

dove  $r_\nu$  è definito dalle relazioni

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_\nu = \sum_{i=1}^m \binom{n_i + r_{\nu-1}}{r_{\nu-1}} - a_1 r_{\nu-1} \\ r_{\nu-1} = \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i - 1 + r_{\nu-2}}{r_{\nu-2}} - a_2 r_{\nu-2} \\ \dots \\ r_1 = \sum_{t=a_1+a_2+\dots+a_{\nu-1}+1}^m \binom{n_t - \nu + 1 + r_0}{r_0} - a_\nu r_0 \\ r_0 = 0 ; \end{array} \right.$$

il che equivale a dire che, ove sia verificata la (3), le coordinate  $x_0, x_1, \dots, x_r$  del punto generico della  $V_r^n$  possono esprimersi come funzioni razionali

$$(5) \quad \rho x_j = F_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s) \quad (j = 0, 1, \dots, r)$$

di  $s$  parametri non omogenei  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ ; e detto punto generico deve ottenersi, mediante le (5), un numero finito di volte.

2. - È noto che sulla  $V_r^n$  giacciono degli spazi lineari  $S_{r_{v-1}}$  se risulta (\*)

$$(6) \quad D = (r - r_{v-1})(r_{v-1} + 1) - \sum_{i=1}^m \binom{n_i + r_{v-1}}{r_{v-1}} \geq 0 \quad (4),$$

dove  $D$  eguaglia la dimensione del loro insieme.

Dalla (6), tenuto conto delle (3), (4), si deduce

$$\begin{aligned} D &\geq (r_v - r_{v-1})(r_{v-1} + 1) - (r_v + a_1 r_{v-1}) = \\ &= r_{v-1}(r_v - r_{v-1} - a_1 - 1) = \\ &= r_{v-1} \left[ \sum_{i=1}^m \binom{n_i + r_{v-1}}{r_{v-1}} - a_1(1 + r_{v-1}) - (1 + r_{v-1}) \right] = \\ &= r_{v-1} \left[ \sum_{i=1}^{a_1} \binom{n_i + r_{v-1}}{r_{v-1}} + \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i + r_{v-1}}{r_{v-1}} - \right. \\ &\quad \left. - a_1(1 + r_{v-1}) - (1 + r_{v-1}) \right] = \\ &= r_{v-1} \left[ \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i + r_{v-1}}{r_{v-1}} - (1 + r_{v-1}) \right] \geq 0. \end{aligned}$$

(3) A. PREDONZAN, *Intorno agli  $S_k$  giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme* (Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei - 1948).

(4) Il caso  $n_1 = n_2 = \dots = n_{m-1} = 1, n_m = 2, r_{v-1} \geq 2$  in cui cade in difetto la sufficienza della (6) non può verificarsi perchè per  $n_1 = n_2 = \dots = n_{m-1} = 1, n_m = 2$  risulta, in virtù delle (4),  $r_{v-1} = r_1 = 1$ .

Si può quindi concludere che per  $r \geq r_v$  sulla generica  $V_r^*$  dell'  $S_r$  giacciono degli spazi lineari  $S_{r_v-1}$ .

**3.** - Siano  $W^v, W^{v-1}, \dots, W^1$ ,  $v$  sistemi algebrici irriducibili definiti, in modo ricorrente, come segue :

$W^v$ , sistema costituito dalla totalità delle varietà  $V_r^*$   
 $\left( s = r - m \geq 0, n = \prod_{i=1}^m n_i \right)$  intersezione completa di  $m$  forme generiche, degli ordini  $n_1, n_2, \dots, n_m$ , di uno spazio lineare  $S_r$  ;

$W^{v-1}$ , sistema costituito dalla totalità delle varietà  $V_{\bar{r}}^{\bar{n}}$   
 $\left[ \bar{s} = \bar{r} - (m - a_1) \geq 0, \bar{n} = \prod_{i=a_1+1}^m (n_i - 1) \right]$   
 intersezione completa di  $m - a_1$  forme generiche, degli ordini  $n_{a_1+1} - 1, n_{a_1+2} - 1, \dots, n_m - 1$ , di uno spazio lineare  $S_{\bar{r}}$ .

.....

$W^1$ , sistema costituito dalla totalità delle varietà  $V_{r^*}^*$   
 $\left[ s^* = r^* - (m - a_1 - \dots - a_{v-1}) \geq 0, n^* = \right.$   
 $\left. = \prod_{i=a_1+\dots+a_{v-1}+1}^m (n_i - v + 1) \right]$  intersezione completa di  $m - a_1 - \dots - a_{v-1}$  forme generiche, degli ordini  $n_{a_1+\dots+a_{v-1}+1} - v + 1, \dots, n_m - v + 1$ , di uno spazio lineare  $S_{r^*}$ .

Per quanto si è detto nel n. 2 sulla generica  $V_r^*$  di  $W^v$  giacciono, ove sia  $r \geq r_v$ , degli spazi lineari  $S_{r_v-1}$ ; eppertanto, per  $\bar{r} \geq r_{v-1}$ , vi sono degli  $S_{r_{v-2}}$  situati sulla generica  $V_{\bar{r}}^{\bar{n}}$  del sistema  $W^{v-1}$ .

Si supponga ora che la generica  $V_{\frac{n}{r}}$  di  $W^{v-1}$  sia unirazionale per  $\bar{r} \geq r_{v-1}$  e che i coefficienti delle sue equazioni parametriche si possano far razionalmente dipendere dai coefficienti delle forme di cui la  $V_{\frac{n}{r}}$  è intersezione completa e dai parametri che individuano un  $S_{r_{v-2}}$  ad essa appartenente. Di conseguenza dimostreremo che pure la generica  $V_r^*$  del sistema  $W^v$  è unirazionale per  $r \geq r_v$  e che i coefficienti delle sue equazioni parametriche si possono far razionalmente dipendere dai coefficienti delle forme che la determinano e dai parametri che individuano un  $S_{r_{v-1}}$  situato sulla  $V_r^*$  stessa. E poichè è evidente che analoga proprietà vale per la generica  $V_r^*$  del sistema  $W^1$  (5), resterà così provata, con procedimento ricorrente, l'unirazionalità della  $V_r^*$  di equazioni (1) qualunque siano i valori che abbiano gli interi (2) purchè risulti soddisfatta la limitazione (3) (6).

4. - Nel caso  $n_1 = n_2 = \dots = n_{m-1} = 1$ ,  $n_m \geq 2$ , cioè  $a_1 = m - 1$ , la  $V_r^*$  riducesi ad una forma di ordine  $n = n_m = v$  di un  $S_{r_{v-1}}$ , per cui ad essa può applicarsi il risultato del lavoro citato in (2). Supporremo perciò

$$2 \leq n_{m-1} \leq n_m, \quad \text{cioè } 0 \leq a_1 \leq m - 2,$$

dal che segue  $r_{v-1} \geq 2$ . Avuto riguardo alle (3), (4), si ha quindi

$$\begin{aligned} r \geq r_v &= \sum_{i=1}^m \binom{n_i + r_{v-1}}{r_{v-1}} - a_1 r_{v-1} = \sum_{i=1}^{a_1} \binom{n_i + r_{v-1}}{r_{v-1}} + \\ &+ \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i + r_{v-1}}{r_{v-1}} - a_1 r_{v-1} = a_1 + \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i + r_{v-1}}{r_{v-1}} = \end{aligned}$$

(5) Basta notare che la  $V_r^*$  riducesi ad uno spazio lineare  $S_{r^* - a_v}$  intersezione di  $a_v$  iperpiani generici dell'  $S_{r^*}$ .

(6) Il procedimento ricorrente è poi condotto in guisa che la scelta di un  $S_{r_{v-2}}$  sulla  $V_{\frac{n}{r}}$  viene eseguito in modo da non introdurre alcuna nuova irrazionalità (mentre invece irrazionalità - aritmetiche, ma non algebriche - si introducono scegliendo  $S_{r_{v-1}}$  sulla  $V_r^*$ ).

$$\begin{aligned}
&= a_1 + \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i + r_{v-1} - 1}{r_{v-1}} + \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i + r_{v-1} - 1}{r_{v-1} - 1} \geq \\
&\geq a_1 + \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i + r_{v-1} - 1}{r_{v-1}} + \sum_{i=a_1+1}^m (n_i + r_{v-1} - 1) > \\
&> a_1 + \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i + r_{v-1} - 1}{r_{v-1}} + 2r_{v-1} + 1 \geq a_1 + \\
&+ \sum_{i=a_1+1}^{a_1+a_2} \binom{n_i + r_{v-1} - 1}{r_{v-1}} + 2r_{v-1} + 1 \geq a_1 + a_2(1 + r_{v-1}) + \\
&\quad + 2r_{v-1} + 1 \geq a_1 + a_2 r_{v-2} + 2r_{v-1} + 1,
\end{aligned}$$

da cui

$$(7) \quad r - a_1 - r_{v-1} > \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i + r_{v-1} - 1}{r_{v-1}},$$

$$(8) \quad r - a_1 - 2r_{v-1} - a_2 r_{v-2} - 1 > 0.$$

Sempre in virtù delle (4) si ha poi

$$\begin{aligned}
r_{v-1} - m + a_1 &= \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i - 1 + r_{v-2}}{r_{v-2}} - a_2 r_{v-2} - m + \\
&+ a_1 \geq (m - a_1)(1 + r_{v-2}) - a_2 r_{v-2} - m + a_1 = \\
&= r_{v-2}(m - a_1 - a_2) \geq 0,
\end{aligned}$$

cioè

$$(9) \quad r_{v-1} - m + a_1 \geq 0.$$

Posto, per semplificare,

$$\begin{aligned} r_{v-1} &= k, & r_{v-2} &= h, \\ r - a_1 &= R, & m - a_1 &= \overline{m}, \end{aligned}$$

le (7), (8), (9), rispettivamente, divengono

$$(7') \quad R - k > \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i + k - 1}{k},$$

$$(8') \quad R - 2k - a_2 h - 1 > 0,$$

$$(9') \quad k - \overline{m} \geq 0.$$

5. - Supposto  $a_1 > 0$ , le prime  $a_1$  equazioni del sistema (1) rappresentano  $a_1$  iperpiani che con la loro intersezione determinano un  $S_R$  (subordinato all'  $S_r$ ) al quale appartiene la  $V_r^*$ .

Eseguendo un cambiamento di coordinate

$$(10) \quad y = S(x)$$

per il quale l'  $S_R$  divenga lo spazio della piramide fondamentale delle coordinate di equazioni

$$(11) \quad \rho y_j = 0 \quad (j = R + 1, \dots, r),$$

le (1) si trasformano in equazioni del tipo

$$\begin{cases} g_i^1(y_{R+1}, y_{R+2}, \dots, y_r) = 0 & (i = 1, 2, \dots, a_1) \\ g_i^{n_i}(y_0, y_1, \dots, y_r) = 0 & (i = a_1 + 1, \dots, m), \end{cases}$$

dove le prime  $a_1$  forme sono  $a_1$  iperpiani dell'  $S_r$  la cui intersezione è l'  $S_R$  (11), mentre le  $g_{a_1+1}^{n_{a_1+1}}, \dots, g_m^{n_m}$  rappresentano  $\overline{m}$  forme degli ordini rispettivi  $n_{a_1+1}, \dots, n_m$  per cui risulta

$$2 \leq n_{a_1+1} \leq \dots \leq n_m.$$

Le equazioni della  $V_i^n$  nell'  $S_R$  divengono allora

$$(12) \quad h_i^{n_i} (y_0, y_1, \dots, y_R) = 0 \quad (i = \alpha_1 + 1, \dots, m),$$

essendo  $h_{\alpha_1+1}^{n_{\alpha_1+1}}, \dots, h_m^{n_m}$  le  $\overline{m}$  forme degli ordini rispettivi  $n_{\alpha_1+1}, \dots, n_m$ , che si ottengono uguagliando a zero nelle  $g_{\alpha_1+1}^{n_{\alpha_1+1}}, \dots, g_m^{n_m}$  i coefficienti dei termini contenenti le variabili  $y_{R+1}, \dots, y_r$  (?). I coefficienti delle (12) risultano manifestamente funzioni razionali dei coefficienti delle (1).

6. Nel sistema  $\infty^D$  degli  $S_k$  giacenti sulla  $V_i^n$  (n. 2) di equazioni (12) se ne sceglie una qualunque e con un cambiamento di coordinate

$$(13) \quad x = T(y)$$

lo si trasforma nello spazio della piramide fondamentale delle coordinate di equazioni

$$(14) \quad x_j = 0 \quad (j = k + 1, \dots, R).$$

Le (12), in virtù della (13), divengono del tipo

$$(15) \quad \sum_{j=k+1}^R x_j f_{\psi}^{n_i-1} (x_0, x_1, \dots, x_k) + H_i^{n_i} (x_0, x_1, \dots, x_R) = 0$$

dove le  $f_{\psi}^{n_i-1}$  sono forme degli ordini  $n_i - 1$  nelle variabili  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , mentre le  $H_i^{n_i}$  sono forme degli ordini  $n_i$  nelle variabili  $x_0, x_1, \dots, x_R$  ciascun termine delle quali è almeno di secondo grado nel complesso delle variabili  $x_{k+1}, \dots, x_R$ . I coefficienti della (13) dipendono razionalmente dai parametri che individuano l'  $S_k$  di equazioni (14), quindi i coefficienti delle (15) sono funzioni razionali di detti parametri e dei coefficienti delle (12).

(?) Si noti che la condizione (3) non viene a modificarsi passando dalle (1) alle (12). Detto  $R_v$  il valore di  $r_v$  corrispondente alle forme (12) si ha infatti dalle (4)  $r_v - \alpha_1 = R_v$ , quindi dalla  $r \geq r_v$  segue la  $R \geq R_v$  e viceversa.

7. - Siano, nell'  $S_R$ ,  $A_0(1, 0, \dots, 0)$ ,  $A_1(0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $A_R(0, 0, \dots, 1)$  i vertici della piramide fondamentale delle coordinate e si indichi con  $Z(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_R)$  un punto generico della  $V_i^n$ . L'insieme dei punti  $P(x_0, x_1, \dots, x_R)$  per cui si abbia

$$(16) \quad P \equiv \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \dots + \mu_k A_k + \mu Z,$$

dove  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k, \mu$  sono  $k+2$  parametri arbitrari non tutti nulli, viene a costituire l'  $S_{k+1}$  congiungente  $Z$  e l'  $S_k$  (14). Dalle (16) segue che le coordinate  $x_0, x_1, \dots, x_R$  del punto generico del considerato  $S_{k+1}$  devono soddisfare alle condizioni

$$(17) \quad \mu x_j = \bar{x}_j \quad (j = k+1, \dots, R),$$

per cui le equazioni dell'  $S_{k+1}$  possono porsi nella forma

$$(18) \quad \bar{x}_{k+1} x_j - \bar{x}_j x_{k+1} = 0 \quad (j = k+2, \dots, R).$$

Intersecando la  $V_i^n$  con l'  $S_{k+1}$  si ottiene una varietà, rappresentata dal sistema delle equazioni (15), (18), che si spezza nell'  $S_k$  di equazioni (14) e in una varietà  $V_{k+1-\bar{m}}^n [k+1-\bar{m} > 0$  per la (9')] intersezione completa di  $\bar{m}$  forme dell'  $S_{k+1}$  degli ordini  $n_{a_1+1}-1, \dots, n_m-1$ .

Eliminando tra le (15), (18) le variabili  $x_{k+2}, \dots, x_R$ , si ottiene un sistema di equazioni del tipo

$$(19) \quad \bar{x}_{k+1}^{n_i-1} \sum_{j=k+1}^R \bar{x}_j f_{ij}^{n_i-1}(x_0, x_1, \dots, x_k) + \\ + x_{k+1} K_i^{n_i-2}(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}; \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_R) = 0 \\ (i = a_1 + 1, \dots, m),$$

dove le  $K_i^{n_i-2}$  sono forme degli ordini  $n_i-2$  nelle variabili  $x_0, x_1, \dots, x_{k+1}$ . Le (19) rappresentano la proiezione della  $V_{k+1-\bar{m}}^n$  dall'  $S_{R-k-2}(A_{k+2}, \dots, A_R)$  sull'  $S_{k+1}(A_0, A_1, \dots, A_{k+1})$ .

L'  $S_k$  di equazioni (14) taglia la  $V_{k+1-\overline{m}}^{\overline{n}}$  in una varietà  $V_{k-\overline{m}}^{\overline{n}}$  [ $k - \overline{m} \geq 0$  per la (9')] intersezione completa delle  $\overline{m}$  forme dell'  $S_k$  stesso

$$(20) \quad \sum_{j=k+1}^R \overline{x}_j f_{\overline{U}}^{n_i-1}(x_0, x_1, \dots, x_k) = 0 \quad (i = a_1 + 1, \dots, m),$$

degli ordini  $n_{a_1+1} - 1, \dots, n_m - 1$ , rispettivamente.

Dalla (9') segue che i parametri  $\overline{x}_{k+1}, \dots, \overline{x}_R$  che compaiono nelle (20) vengono ad assumere, al variare di  $Z$  sulla  $V_{k-\overline{m}}^{\overline{n}}$ , tutti i valori possibili.

**8.** - Vogliamo provare che il sistema delle  $V_{k-\overline{m}}^{\overline{n}}$  generato dalle (20) al variare di  $Z$  sulla  $V_{k-\overline{m}}^{\overline{n}}$ , cioè dei parametri  $\overline{x}_{k+1}, \dots, \overline{x}_R$ , viene a coincidere con quello di tutte le  $V_{k-\overline{m}}^{\overline{n}}$  dell'  $S_k$ . Basterà far vedere che si possono determinare le  $\overline{x}_{k+1}, \dots, \overline{x}_R$  in modo che risulti

$$(21) \quad \sum_{j=k+1}^R \overline{x}_j f_{\overline{U}}^{n_i-1}(x_0, x_1, \dots, x_k) \equiv \varphi_i^{n_i-1}(x_0, x_1, \dots, x_k) \quad (i = a_1 + 1, \dots, m),$$

dove  $\varphi_{a_1+1}^{n_{a_1+1}-1}, \dots, \varphi_m^{n_m-1}$  sono  $\overline{m}$  forme generiche dell'  $S_k$  degli ordini rispettivi  $n_{a_1+1} - 1, \dots, n_m - 1$ .

Poniamo

$$f_{\overline{U}}^{n_i-1}(x_0, x_1, \dots, x_k) \equiv \sum \alpha_{q_1 q_2 \dots q_{n_i-1}}^i x_{q_1} x_{q_2} \dots x_{q_{n_i-1}},$$

$$\varphi_i^{n_i-1}(x_0, x_1, \dots, x_k) \equiv \sum \alpha_{q_1 q_2 \dots q_{n_i-1}}^i x_{q_1} x_{q_2} \dots x_{q_{n_i-1}},$$

le due sommatorie essendo estese a tutte le  $\binom{n_i + k - 1}{k}$  combinazioni con ripetizione  $(q_1, q_2, \dots, q_{n_i-1})$  degli indici  $0, 1, \dots, k$ . Segue che, affinchè siano verificate le (21), deve essere risolubile

il sistema di  $\sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i+k-1}{k}$  equazioni lineari nelle  $R-k$  incognite  $\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_R$

$$(22) \quad \sum_{j=k+1}^R \bar{x}_j a_{q_1 q_2 \dots q_{n_i-1}}^{ij} = \alpha_{q_1 q_2 \dots q_{n_i-1}}^i \quad (i = a_1 + 1, \dots, m)$$

e dove gli indici  $q_1 q_2 \dots q_{n_i-1}$  variano attraverso tutte le combinazioni con ripetizione precedentemente considerate).

In virtù della (7') e tenuto conto che dalla genericità delle forme (1) discende quella delle (12), quindi delle  $f_i^{n_i-1}$ , si conclude che il sistema (22) ammette soluzioni nelle  $\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_R$ .

**9.** - Per quanto si è detto nel n. 2 risulta che sulla generica  $V_{k-m}^n$  dell'  $S_k$  sono situati degli spazi lineari  $S_h$  e che la dimensione del loro insieme è

$$(23) \quad D_1 = (k-h)(h+1) - \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i-1+h}{h}.$$

Sia  $\Omega$  un sistema razionale di dimensione  $k + a_2 h$  scelto nel sistema razionale degli  $S_h$  dell'  $S_k$ . Dalla (23) e tenuto conto che, in virtù delle (4), si ha

$$k + a_2 h = \sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i-1+h}{h},$$

segue che sono in numero finito gli  $S_h$  di  $\Omega$  situati sulla generica  $V_{k-m}^n$  dell'  $S_k$ .

Un  $S_h$  generico di  $\Omega$  viene a dipendere razionalmente da  $k + a_2 h$  parametri non omogenei  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+a_2 h}$ ; per cui le coordinate  $x_0, x_1, \dots, x_k$  del suo punto generico possono esprimersi con

$$\circ x_j = \psi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+a_2 h}; t_0, t_1, \dots, t_h)$$

dove le  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k$  sono funzioni lineari nei parametri omogenei  $t_0, t_1, \dots, t_k$  i cui coefficienti dipendono razionalmente dagli  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+a_2h}$ .

Le condizioni affinché ad una  $V_{k-m}^n$  di equazioni (20) appartenga il considerato  $S_k$  risultano espresse dalle identità rispetto ai parametri  $t_0, t_1, \dots, t_k$

$$(24) \quad \sum_{j=k+1}^R \bar{x}_j f_{ij}^{n_i-1} [\phi_0(\xi_1, \dots, \xi_{k+a_2h}; t_0, \dots, t_k), \dots, \phi_k(\xi_1, \dots, \xi_{k+a_2h}; t_0, \dots, t_k)] \equiv 0$$

$$(i = a_1 + 1, \dots, m),$$

essendo le (24)  $\bar{m}$  forme nelle variabili  $t_0, t_1, \dots, t_k$  degli ordini rispettivi  $n_{a_1+1} - 1, \dots, n_m - 1$ . Il coefficiente del termine generico della forma  $i$ -esima può porsi nella forma

$$\sum_{j=k+1}^R \bar{x}_j b_{q_i}^{ij}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+a_2h}),$$

dove le  $b_{q_i}^{ij}$  dipendono razionalmente dai parametri  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+a_2h}$ . Segue che, affinché risultino verificate le (24), deve essere

$$(25) \quad \sum_{j=k+1}^R \bar{x}_j b_{q_i}^{ij}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+a_2h}) = 0$$

$$\left[ q_i = 1, 2, \dots, \binom{n_i - 1 + h}{h}; i = a_1 + 1, \dots, m \right].$$

Dalla genericità delle  $f_{ij}^{n_i-1}$  e dei parametri  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+a_2h}$  discende che le  $\sum_{i=a_1+1}^m \binom{n_i - 1 + h}{h} = k + a_2 h$  condizioni lineari (25) imposte alle  $\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_R$  sono linearmente indipendenti: epperò gli  $R - k$  parametri  $\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_R$  di una  $V_{k-m}^n$  del sistema (20) su cui giaccia un generico  $S_k$  di  $\Omega$  possono esprimersi come funzioni lineari di  $(R - k) - (k + a_2 h) - 1 = R - 2k - a_2 h - 1$  [ $> 0$  per la (8')] parametri non omogenei

$\xi_{k+a_2h+1}, \dots, \xi_{R-k-1}$ ; ed i coefficienti di dette funzioni sono funzioni razionali dei parametri  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+a_2h}$  che individuano l' $S_h$  di  $\Omega$ . Si ha complessivamente

$$(26) \quad \bar{x}_j = \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{R-k-1}) \quad (j = k+1, \dots, R),$$

dove le  $\Phi_{k+1}, \dots, \Phi_R$  sono funzioni razionali dei parametri  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{R-k-1}$ .

Fissati arbitrariamente i valori delle  $\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_R$  si possono in corrispondenza determinare le  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{R-k-1}$  in modo che le (26) risultino soddisfatte. Segue che, al variare in quest'ultime delle  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{R-k-1}$ , si ottengono tutti i valori delle  $\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_R$ , quindi tutte (ed ognuna un numero finito di volte) le varietà  $V_{k+1-\bar{m}}^{\bar{x}}$  del sistema delle (19); e su ciascuna di queste i parametri  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+a_2h}$  individuano razionalmente un  $S_h$  del sistema  $\Omega$  su essa varietà giacente.

**10.** - Per quanto si è supposto nel n. 3 la  $V_{k+1-\bar{m}}^{\bar{x}}$  (19), poichè appartenente al sistema  $W^{v-1}$ , è unirazionale ed i coefficienti delle relative equazioni parametriche, in  $k+1-\bar{m}$  parametri non omogenei  $\xi_{R-k}, \dots, \xi_s$ , si possono far razionalmente dipendere dai coefficienti delle (19) e dai parametri  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+a_2h}$  che determinano l' $S_h$  di  $\Omega$  appartenente ad essa. Si ha cioè, avuto riguardo alle (26), che le coordinate  $x_0, x_1, \dots, x_{k+1}$  del punto generico della  $V_{k+1-\bar{m}}^{\bar{x}}$  possono esprimersi come funzioni razionali

$$(27) \quad \lambda x_j = \Psi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s) \quad (j = 0, 1, \dots, k+1).$$

Dalle (17), in virtù delle (26), discende

$$(28) \quad \mu x_j = \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{R-k-1}) \quad (j = k+1, \dots, R)$$

e dalle (27), (28), infine si ottiene

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} \rho x_j = \Phi_{k+1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{R-k-1}) \Psi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s) \\ \qquad \qquad \qquad (j = 0, 1, \dots, k+1) \\ \rho x_j = \Psi_{k+1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s) \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{R-k-1}) \\ \qquad \qquad \qquad (j = k+2, \dots, R). \end{array} \right.$$

Trasformando le (29) con la sostituzione lineare (13), quindi associando alle equazioni così ottenute le (11) e operando successivamente con le (10) si ottengono le (5); ed i coefficienti di queste vengono a dipendere razionalmente dai coefficienti delle (15), quindi delle (12), infine delle (1) e dai parametri che individuano l' $S_k$  (14) contenuto nella  $V_s^n$ . Per il procedimento che ci fa pervenire alle (29) viene ad essere soddisfatta la condizione che il punto generico della  $V_s^n$  si ottiene dalle (5) un numero finito di volte al variare dei parametri non omogenei  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ .

Rimane così stabilita la proprietà enunciata nel n. 1.