Rendiconti *del* Seminario Matematico *della* Università di Padova

S. Ghezzo

Intorno ad un teorema sulle quasi-traiettorie di una traslazione piana generalizzata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 177-180

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__177_0>

INTORNO AD UN TEOREMA SULLE QUASI-TRAIETTORIE DI UNA TRASLAZIONE PIANA GENERALIZZATA

Nota (*) *di* S. Ghezzo (*a Venezia*)

Il teorema fondamentale di Brouwer sulle traiettorie di una traslazione piana generalizzata t, afferma che:

Una curva β del piano taglia la propria immagine nella t, quando gli estremi di β staccano su una traiettoria $\sigma(\lambda)$ di t un arco α, che contenga nel proprio interno un arco di traslazione λ e che formi con β una curva semplice e chiusa (1).

Questo teorema è stato esteso alle *quasi-traiettorie* da G. Scorza Dragoni (2).

In questa Nota mi propongo di far vedere che la dimostrazione dello Scorza Dragoni si può adattare in maniera pressochè immediata a casi ancora più ampi, suggeritimi del caso a cui accenna lo Scorza Dragoni in una sua Nota in corso di stampa (3).

1. - Sia t una traslazione generalizzata del piano π. E sia I un insieme chiuso (e limitato) tale che, per ogni numero positivo δ, esista un arco di traslazione λ di t il quale contenga I

(*) Pervenuta in Redazione il 30 luglio 1948.

(1) L. E. J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes* [«Mathematische Annalen» vol. 72 (1912), pp. 37–54] p. 44, teor. 6.

(2) G. Scorza Dragoni, *Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un automeomorfismo del piano* [«Rendicondi dell' Accademia Nazionale dei Lincei» Classe di Scienze fis., mat. e nat., serie VIII, vol. 1, fasc. 2, pp. 156-161.

(3) G. Scorza Dragoni, *Alcuni teoremi sulle traslazioni piane generalizzate*, in corso di stampa sugli «Annali Triestini» n. 8.

nel proprio δ — intorno ([4]) e sia contenuto nel δ — intorno di I. Un tale arco λ sarà detto una δ — *approssimazione di I.*

È evidente che prefissati un qualunque numero $\sigma > 0$ ed un n intero, per δ sufficientemente piccolo, l'arco $t^n(\lambda)$ risulta una σ — approssimazione di $t^n(I)$, se λ è una δ — approssimazione di I.

2. - Osserviamo inoltre che:

Un punto L di $t^{-1}(I) \dotplus t^{-2}(I) \dotplus \ldots$ *che non appartenga ad I, non appartiene nemmeno a* $t(I) \dotplus t^2(I) \dotplus \ldots$, *e viceversa* ([5]).

Infatti se ciò non fosse esisterebbe un intero negativo $-r$ tale da aversi $t^{-r}(I) \cdot L = L$ e $t^{-r+h}(I) \cdot L = 0$ per ogni $0 < h \leq r$, ed un intero positivo s tale che $t^s(I) \cdot L = L$ e $t^{s-k}(I) \cdot L = 0$ per ogni $0 < k < s$.

Quindi L non appartiene all'insieme $\tau = t^{-r+1}(I) \dotplus \ldots \dotplus I \dotplus \ldots \dotplus t^{s-1}(I)$, e poichè τ è chiuso (al pari di I) esiste un cerchio Γ di centro L e raggio ρ così piccolo che $\Gamma \cdot t(\Gamma) = 0$ e che la distanza di Γ da τ risulti positiva (il che è possibile perchè essendo τ chiuso ed $L \cdot \tau = 0$, L non può esser d'accumulazione per τ).

Sia λ una δ — approssimazione di I. Allora, se δ è abbastanza piccolo $t^{-r}(\lambda)$ e $t^s(\lambda)$ hanno entrambi punti interni a Γ, mentre $t^{-r+1}(\lambda) \dotplus \ldots \dotplus t^{s-1}(\lambda)$ risulta esterna a Γ. Ma ciò è notoriamente assurdo ([6]); donde la conclusione.

3. - Consideriamo ora una curva β semplice e aperta, priva

([4]) Per δ — intorno di un insieme γ di π s'intende l'insieme di tutti i punti di π che hanno da γ una distanza minore o uguale di δ.

([5]) Il ragionamento svolto in questo n. 2 è quello con cui G. Scorza Dragoni dimostra il teorema analogo relativo ai quasi-segmenti di traslazione, v. G. Scorza Dragoni, *Sugli archi di traslazione di un automeomorfismo piano e sulle loro curve di accumulazione* [Memorie della R. Accademia d'Italia», Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IX (1937), n. 11, pag. 15].

([6]) G. Scorza Dragoni, loc. cit. ([5]), p. 10, n. 5.

di punti comuni con I, e con l' estremo A nell' insieme $t^{-1}(I) \dot{+} t^{-2}(I) \dot{+} \ldots$, e l' altro B nell' insieme $t(I) \dot{+} t^2(I) \dot{+} \ldots$

Sia p il più grande intero negativo tale che $t^p(I)$ contenga A, e q il più piccolo intero positivo tale che $t^q(I)$ contenga B.

I punti A e B, in base all' osservazione del n. 2, risultano distinti, non potendo A appartenere a $t^q(I)$ nè B a $t^p(I)$.

Quindi β non è degenere, e si può anzi supporre che β non abbia punti comuni con l' insieme $t^{p+1}(I) \dot{+} \ldots \dot{+} t^{q-1}(I)$ (basta eventualmente sostituire a β un suo sottoarco non degenere).

Ora poichè gli insiemi

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \, t^n(A) \qquad \text{e} \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \, t^n(B)$$

non hanno punti di accumulazione al finito [7], si verifica una delle seguenti alternative:

a) o esiste un intero relativo m tale che $B = t^m(A)$ (e quindi $A = t^{-m}(B)$);

b) o le distanze di A dall' insieme $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \, t^n(B)$, e di B dall' insieme $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \, t^n(A)$ sono positive.

In ogni caso I, essendo limitato, contiene un numero finito di punti del tipo $t^r(A)$ e $t^s(B)$.

Ne segue che esistono sempre due interi relativi $h \leq p$ e $k \geq q$ tali che

$$A \cdot t^h(I) = A \qquad \text{e} \qquad A \cdot t^\nu(I) = 0 \qquad \text{se } \nu < h$$

$$B \cdot t^k(I) = B \qquad \text{e} \qquad B \cdot t^\nu(I) = 0 \qquad \text{se } \nu > k.$$

Osserviamo qui che nel caso a) risulta $m \geq q - h$ [8].

(7) Brouwer, loc. cit. (1), p. 45, teor. 8.

(8) Cfr. G. Scorza Dragoni, loc. cit. (2), pag. 158, n. 5.

4. – Introduciamo ora un numero 2η positivo e minore delle distanze:

I°) di β da I,

II°) di A da $\sum_{p+1}^{q+1}{}_n t^n(I)$,

III°) di A da $t^{h-1}(I)$,

IV°) di B da $\sum_{p-1}^{q-1}{}_n t^n(I)$,

V°) di B da $t^{k+1}(I)$.

Si consideri una ε — approssimazione λ di I, scegliendo il numero ε minore di η e tale che, posto

$$\varphi = \sum_{p-1}^{q-1}{}_n t^n(\lambda) \qquad \text{e} \qquad \psi = \sum_{p+1}^{q+1}{}_n t^n(\lambda),$$

le distanze di A da ψ e da $t^{h-1}(\lambda)$ e di B da φ e da $t^{k+1}(\lambda)$ superino η;

Dopo di che basta seguire i ragionamenti svolti nei n[i] 6-10 della Nota citata in ([2]) dallo SCORZA DRAGONI per concludere che:

Se t è una traslazione piana generalizzata ed I un insieme chiuso del piano soddisfacente alle condizioni del n. 1. Una curva semplice e aperta β di estremi A e B taglia la propria immagine $t(\beta)$, se A appartiene a $t^{-1}(I) \dot{+} t^{-2}(I) \dot{+} \ldots$, B appartiene a $t(I) \dot{+} t^2(I) \dot{+} \ldots$, e $\beta \cdot I = 0$.