RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE POMPILJ

Sulle medie combinatorie potenziate dei campioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 181-196

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__181_0>

SULLE MEDIE COMBINATORIE POTENZIATE DEI CAMPIONI [1]

Nota [*] *di* GIUSEPPE POMPILJ (*a Roma*)

Recentemente C. GINI [2] si è occupato delle medie combinatorie potenziate dei campioni, determinandone varie proprietà nell'ipotesi, praticamente non restrittiva, di un campione ottenuto con un'estrazione in blocco (o senza ripetizione).

Tra i vari risultati raggiunti nel sopra ricordato lavoro dall'eminente statistico, occorre qui riportarne uno, per la cui enunciazione però bisogna prima richiamare tre definizioni che permetteranno una maggiore concisione di linguaggio. E precisamente, due medie combinatorie potenziate si diranno *omograde* se è eguale il prodotto dei loro indici, si diranno invece *omogenee* se hanno addirittura gli stessi indici, si dirà infine che una media gode della proprietà *transitiva* se la media omogenea delle medie dei campioni coincide con la media (omogenea) della massa.

Ciò posto si può enunciare il teorema di C. GINI cui sopra si è alluso:

La media potenziata omograda delle medie combinatorie potenziate dei campioni è uguale alla media combinatoria omogenea della massa.

(*) Pervenuta in Redazione il 21 Ottobre 1948.

(1) Comunicazione svolta il 24 Settembre 1948 al III Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

(2) Ved. C. GINI: « *The means of samples* ». - Atti della XXV sessione dell'Istituto Internazionale di Statistica, 1947.

Da questo teorema segue poi, come immediato corollario, che *le medie potenziate godono della proprietà transitiva.*

In questa Nota ritrovo il precedente teorema di C. Gini, impiegando sistematicamente il concetto di variabile causale, e in particolare lo estendo al caso che il campione sia stato ottenuto bernoullianamente (cioè con ripetizione) dimostrando (n. 3), come del resto era da prevedersi, che il detto teorema vale anche in questo caso purchè alla massa si sostituisca la variabile causale ad essa associata o, in altre parole, si consideri virtualmente la massa come formata da infiniti elementi, in modo però che non si alterino i mutui rapporti tra i numeri dei componenti le classi di elementi cui è associata la stessa intensità del carattere in esame.

Per ottenere questa generalizzazione debbo calcolare preventivamente (n. 1) i momenti fattoriali delle variabili causali delle prove ripetute, sia secondo lo schema di Bernoulli che quello dell' estrazione in blocco, nel caso di più alternative.

Chiudo questa introduzione precisando alcune convenzioni di scrittura che userò nel testo della Nota:

- con il simbolo $\binom{r}{r_1 \ldots\ldots r_k}$, dove le r_i sono interi non negativi e $r = \sum_1^k {}_i\, r_i$, indicherò la quantità: $\dfrac{r!}{r_1! \ldots r_k!}$;
- siglerò con «v. c.» le parole: «variabile casuale»;
- indicherò le v. c. con uno speciale carattere corsivo maiuscolo.

1. – I momenti fattoriali delle v. c. delle prove ripetute. Sia U un' urna che contiene H palle di cui h_1 sono contrassegnate con il numero x_1, h_2 con $x_2, \ldots, h_k$ con x_k $\left(\sum_1^k {}_i\, h_i = H\right)$, di modo che la probabilità di estrarre dall' urna U una palla contrassegnata con il numero x_i è data da

$$p_i = \frac{h_i}{H} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Si possono evidentemente escogitare i più disparati schemi secondo cui estrarre un certo numero N di palle dall' urna, ma in questa sede ne studieremo due soli che poi sono, senza dubbio, i più importanti; alludo allo *schema di Bernoulli* (o con ripetizione) consistente nell' estrarre le palle una alla volta rimettendole dopo ogni estrazione nell' urna, e allo *schema dell' estrazione in blocco* (o senza ripetizione) consistente nell' estrarre dall' urna un blocco di N palle oppure, il che manifestamente è la stessa cosa, nell' estrarre le palle una alla volta senza però rimetter le palle estratte nell' urna.

* * *

Eseguiamo un gruppo di N prove secondo lo schema di Bernoulli, ottenendo così N numeri di cui a_1 coincideranno con x_1, a_2 con $x_2, \ldots, a_k$ con x_k $\left(\sum_1^k{}_i\, a_i = N\right)$. Al variare del gruppo delle N prove la k-pla ordinata $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ descrive una v. c. $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k)$ che deve essere considerata come $(k-1)$-pla perchè le $\mathcal{A}_i$ soddifano alla identità:

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_k = N.$$

È appena necessario ricordare che la nostra v. c. assume la determinazione $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ con probabilità:

$$\binom{N}{a_1 \ldots a_k} p_1^{a_1}\, p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}.$$

* * *

Estraiamo invece dall' urna U un blocco di N $(\leq H)$ palle, ottenendo così N valori di cui o_1 coincidono con x_1, o_2 con $x_2, \ldots, o_k$ con x_k $\left(\sum_1^k{}_i\, o_i = N\right)$. Al variare del blocco estratto la k-pla ordinata $(o_1, o_2, \ldots, o_k)$ descrive la v. c. $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_k)$ che al solito deve essere considerata come $(k-1)$-pla perchè le $\mathcal{O}_i$ soddisfano all' identità:

$$\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 + \ldots + \mathcal{O}_k = N .$$

È noto ([3]) che la v. c. $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_k)$ assume la determinazione $(o_1, o_2, \ldots, o_k)$ con probabilità:

$$\frac{\binom{N}{o_1 \ldots o_k}\binom{H-N}{h_1 - o_1 \ldots h_k - o_k}}{\binom{H}{h_1 \ldots h_k}} = \frac{\binom{h_1}{o_1}\cdots\binom{h_k}{o_k}}{\binom{H}{N}} .$$

* * *

Le due v. c. $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k)$ e $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_k)$ sopra definite sono le v. c. delle prove ripetute relative ai due schemi d' estrazione dall' urna considerati e le chiamerò rispettivamente «v. c. di Bernoulli» e «v. c. dell' estrazione in blocco».

Per i successivi sviluppi interessa calcolare i momenti fattoriali di queste due v. c..

Cominciamo con quella di Bernoulli.

Ricordo che il momento fattoriale $m_{(r_1 \ldots r_k)}$ di una v. c. e in particolare della $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k)$ è definito da:

([3]) Ved. per es. G. Pompilj: «*Il problema inverso della ricerca statica*» – Metron, 1948.

$$m_{(r_1 \ldots r_k)} = M[\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_1 - 1)\ldots(\mathcal{A}_1 - r_1 + 1)\ldots\mathcal{A}_k(\mathcal{A}_k - 1)\ldots$$
$$\ldots(\mathcal{A}_k - r_k + 1)]$$

e ricordo pure che la funzione generatrice dei momenti fattoriali $N(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ è definita da (4):

$$N(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) = M[(1+\beta_1)^{\mathcal{A}_1}(1+\beta_2)^{\mathcal{A}_2}\ldots(1+\beta_k)^{\mathcal{A}_k}]$$

e che, sviluppata secondo le successive potenze della β_i, dà:

$$(1) \qquad N(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) = \sum \frac{\beta_1^{r_1}\beta_2^{r_2}\ldots\beta_k^{r_k}}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!} m_{(r_1 \ldots r_k)} \,.$$

Nel caso in esame si ha:

$$M[(1+\beta_1)^{\mathcal{A}_1}\ldots(1+\beta_k)^{\mathcal{A}_k}] = \sum\nolimits_{a_1 \ldots a_k} \binom{N}{a_1 \ldots a_k} (1+\beta_1)^{a_1}\ldots$$
$$\ldots(1+\beta_k)^{a_k} p_1^{a_1}\ldots p_k^{a_k} = (1 + \beta_1 p_1 + \ldots + \beta_k p_k)^N =$$
$$= \sum\nolimits_{r_1 \ldots r_k} \frac{\beta_1^{r_1}\ldots\beta_k^{r_k}}{r_1!\ldots r_k!} N(N-1)\ldots(N - r_1 - r_2 - \ldots - r_k +$$
$$+ 1)\, p_1^{r_1}\ldots p_1^{r_k}$$

dove l' ultimo sommatorio va esteso a tutte le $\binom{N+k}{N}$ k-ple di interi non negativi $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tali che la loro somma non superi N.

Tenuto conto della (1) si può infine concludere che i momenti fattoriali della v. c. di Bernoulli sono dati da:

(4) Ved. per es. A. C. Aitken: « *Statistical Mathematics* » – Oliver-Boyd, Londra, 1942.

$$(2)\qquad m_{r_1 \ldots r_k)} = N(N-1)\ldots(N-r+1)\,p_1^{r_1}\,p_2^{r_2}\ldots p_k^{r_k}$$

dove si è posto $r = \sum_1^k{}_i\, r_i$.

* * *

Nel caso della v. c. dell' estrazione in blocco si ha:

$$M[(1+\beta_1)^{o_1}(1+\beta_2)^{o_2}\ldots(1+\beta_k)^{o_k}] = \sum\nolimits_{o_1,\ldots,o_k} \frac{\binom{h_1}{o_1}\cdots\binom{h_k}{o_k}}{\binom{H}{N}}(1+$$

$$+\beta_1)^{o_1}\ldots(1+\beta_k)^{o_k} =$$

$$= \sum\nolimits_{o_1,\ldots,o_k} \sum\nolimits_{r_1\ldots r_k} \frac{\binom{h_1}{o_1}\binom{h_2}{o_2}\cdots\binom{h_k}{o_k}\binom{o_1}{r_1}\binom{o_2}{r_2}\cdots\binom{o_k}{r_k}}{\binom{H}{N}}\,\beta_1^{r_1}\beta_2^{r_2}\ldots\beta_k^{r_k}$$

ma, come immediatamente si controlla, sussiste l' identità:

$$\binom{h_i}{o_i}\binom{o_i}{r_i} = \binom{h_i}{r_i}\binom{h_i-r_i}{h_i-o_i}$$

e quindi si può anche scrivere:

$$N(\beta_1,\ldots,\beta_k) =$$

$$= \frac{\sum_{r_1\ldots r_k}\binom{h_1}{r_1}\cdots\binom{h_k}{r_k}\beta_1^{r_1}\ldots\beta_k^{r_k}\sum_{o_1\ldots o_k}\binom{h_1-r_1}{h_1-o_1}\cdots\binom{h_k-r_k}{h_k-o_k}}{\binom{H}{N}}$$

dove è inutile porre la limitazione $o_i \geq r_i$ perchè per $o_i < r_i$ è sempre $\binom{h_i-r_i}{h_i-o_i} = 0$; ma ([5]):

([5]) Ved.: G. Pompilj loc. cit. ([3]).

$$\sum_{o_1 \ldots o_k} \binom{h_1 - r_1}{h_1 - o_1} \cdots \binom{h_k - r_k}{h_k - o_k} = \binom{H - r}{H - N}$$

dove al solito si è posto: $r = \sum_1^k{}_i \, r_i$, e quindi:

$$N(\beta_1, \ldots, \beta_k) = \sum_{r_1 \ldots r_k} \frac{\binom{h_1}{r_1} \cdots \binom{h_k}{r_k} \binom{H - r}{H - N}}{\binom{H}{N}} \beta_1^{r_1} \ldots \beta_k^{r_k} \; ;$$

d' altra parte sussiste l' identità:

$$\frac{\binom{H - r}{H - N}}{\binom{H}{N}} = \frac{\binom{N}{r}}{\binom{H}{r}}$$

in base alla quale si può finalmente scrivere:

$$N(\beta_1, \ldots, \beta_k) = \sum_{r_1 \ldots r_k} \frac{\beta_1^{r_1} \ldots \beta_k^{r_k}}{r_1! \ldots r_k!} \frac{\binom{N}{r}}{\binom{H}{r}} h_1 (h_1 - 1) \ldots (h_1 + $$
$$- r_1 + 1) \ldots h_k (h_k - 1) \ldots (h_k - r_k + 1) \, .$$

Tenuto infine conto della (1) si può concludere che i momenti fattoriali della v. c. dell' estrazione in blocco sono dati da:

$$(3) \qquad m_{(r_1 \ldots r_k)} = \frac{\binom{N}{r}}{\binom{H}{r}} h_1 (h_1 - 1) \ldots (h_1 - r_1 + 1) \ldots h_k (h_k + $$
$$- 1) \ldots (h_k - r_k + 1)$$

dove, forse è inutile ripeterlo, si è posto $r = \sum_1^k{}_i \, r_i$.

2. - Le medie combinatorie potenziate. Dato un insieme di H numeri $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, H)$ si definisce come media combinatoria potenziata degli H numeri la quantità:

$$(4) \qquad {}^r m^{(s)} = \left\{ \frac{1}{\binom{H}{r}} \sum P^r x_i^s \right\}^{\frac{1}{rs}}$$

dove P^r indica il prodotto di r numeri x_i^s con indice in basso diverso e il sommatorio è esteso a tutti i possibili $\binom{H}{r}$ prodotti di questo tipo.

In particolare per $r = 1$ abbiamo le medie potenziate che indicheremo più semplicemente con $m^{(s)}$ mentre per $r = H$ ed s qualunque abbiamo la media geometrica.

Ma se gli H numeri sono quelli con cui sono state contrassegnate le palle dell' urna U di cui si è parlato nel numero precedente, non avremo un insieme di numeri tutti diversi tra di loro ma bensì k gruppi di $h_1, h_2, \ldots h_k$ numeri ordinatamente coincidenti con $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Vogliamo dimostrare che in questo caso la stessa media di prima è anche data dalla formula:

$$(5) \qquad {}^r m^{(s)} = \left\{ \frac{\sum \binom{h_1}{r_1} \cdots \binom{h_k}{r_k} x_1^{sr_1} \cdots x_k^{sr_k}}{\binom{H}{r}} \right\}^{\frac{1}{rs}}$$

dove il sommatorio va esteso a tutte le $\binom{k + r - 1}{r}$ k-ple di interi non negativi $r_1, r_2, \ldots, r_k$ la cui somma vale r (6).

A tale scopo si ricordi anzitutto che se $r_i > h_i$ è $\binom{h_i}{r_i} = 0$

(6) Vedi in proposito anche: G. Zappa, *Osservazioni sulle medie combinatorie*. Atti della prima Riunione scientifica della Soc. Italiana di Statistica 1939.

di modo che nel sommatorio a numeratore della (5) portano contributo effettivo solo quei termini per cui è $0 \leq r_i \leq h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$; in secondo luogo si osservi che in questi termini non nulli il prodotto $\binom{h_1}{r_1} \ldots \binom{h_k}{r_k}$ fornisce proprio il numero delle maniere distinte con cui si possono scegliere r_1 delle h_1 palle con il numero x_1, r_2 delle h_2 palle con il numero x_2 $\ldots$, r_k delle h_k palle con il numero x_k, di modo che il sommatorio a numeratore ci fornisce proprio la somma dei prodotti ad r ad r degli H numeri associati alle palle dell' urna. E questo basta per provare l' identità delle due formule (4) e (5).

Per completare la conoscenza della struttura della (5) conviene ancora osservare che sussiste l' identità (7):

$$\binom{H}{r} = \sum \binom{h_1}{r_1} \ldots \binom{h_k}{r_k}.$$

Ma all' urna U si può associare una v. c. $\mathcal{X}$ che assume i valori x_i con probabilità $p_i \left(= \frac{h_i}{H}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ e quindi sorge spontaneo il problema di definire la media combinatoria potenziata anche per questa v. c. $\mathcal{X}$.

È chiaro che come media combinatoria potenziata della v. c. $\mathcal{X}$ non si può prendere la (5), perchè tale formula dipende dal numero complessivo H delle palle dell' urna U, mentre la v. c. dipende solo dai rapporti p_i, non variando comunque si cambi il numero H purchè detti rapporti non mutino.

Invece come media combinatoria potenziata della v. c. $\mathcal{X}$ conviene prendere il limite di quella dell' insieme di numeri associati alle palle dell' urna U, quando il numero complessivo H delle palle diverge, in modo però che i k rapporti p_i rimangano costanti.

Si dimostra subito che questo limite coincide con la media potenziata d' indice s della v. c. di modo che potremo concludere che per una v. c. i due concetti di media combinatoria po-

(7) Vedi: G. Pompilj loc. cit. (3).

tenziata e media potenziata coincidono nel senso che le medie combinatorie potenziate non sono altro che medie potenziate.

Per dimostrare quando abbiamo enunciato basta osservare che dividendo numeratore e denominatore della frazione dentro parentesi nella (5), per H^r, la formula stessa si può scrivere:

$$ {}^r m^{(s)} = $$

$$ = \left\{ \frac{\sum \binom{r}{r_1 \ldots r_k} \frac{h_1}{H}\left(\frac{h_1}{H} - \frac{1}{H}\right) \ldots \left(\frac{h_1}{H} - \frac{r_1 - 1}{H}\right) \ldots \frac{h_k}{H}\left(\frac{h_k}{H} - \frac{1}{H}\right) \ldots \left(\frac{h_k}{H} - \frac{r_k - 1}{H}\right) x_1^{sr_1} \ldots x_k^{sr_k}}{1\left(1 - \frac{1}{H}\right) \ldots \left(1 - \frac{r-1}{H}\right)} \right\}^{\frac{1}{rs}} $$

dopo di che passando al limite per H tendente a infinito e sostituendo p_i ad $\frac{h_i}{H}$ si ha:

$$ \lim_{H \to \infty} {}^r m^{(s)} = \left\{ \sum \binom{r}{r_1 \ldots r_k} p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k} x_1^{sr_1} \ldots x_k^{sr_k} \right\}^{\frac{1}{rs}} $$

ma, come è noto, sussiste l'identità:

$$ \sum \binom{r}{r_1 \ldots r_k} p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k} x_1^{sr_1} \ldots x_k^{sr_k} = \left(\sum_{1}^{k}{}_i \, p_i x_i^s \right)^r $$

e quindi il limite cercato è dato da:

$$ \lim_{H \to \infty} {}^r m^{(s)} = \left\{ \left(\sum_{1}^{k}{}_i \, p_i x_i^s \right)^r \right\}^{\frac{1}{rs}} = \left\{ \sum_{1}^{k}{}_i \, p_i x_i^s \right\}^{\frac{1}{s}} \qquad \text{c. v. d.} $$

Concludendo se indichiamo con ${}^r M^{(s)}$ l'operatore che fornisce la media combinatoria potenziata ${}^r m^{(s)}$ della v. c. $\mathcal{X}$ e in particolare con $M^{(s)}$ quello che fornisce la media potenziata $m^{(s)}$ (di modo che $M^{(1)} = M$ fornisce proprio il valor medio della v. c.) possiamo scrivere l'identità:

$$ {}^r m^{(s)} = {}^r M^{(s)}(\mathcal{X}) = M^{(s)}(\mathcal{X}) = \left\{ M(\mathcal{X}^s) \right\}^{\frac{1}{s}} = m^{(s)} $$

3. - Le medie combinatorie potenziate dei campioni ottenuti bernoullianamente. Un campione ottenuto con N prove fatte secondo lo schema di BERNOULLI presenterà, come già si è detto, a_1 valori coincidenti con x_1, a_2 valori coincidenti con $x_2, \ldots, a_k$ valori coincidenti con x_k.

Per questo campione, considerato come massa o universo, o, come si dice più brevemente, per questo campione-universo ([8]) si definisce in modo del tutto analogo alla (5) la media combinatoria potenziata

$$\left\{ \frac{\sum \binom{a_1}{r_1} \cdots \binom{a_k}{r_k} x_1^{sr_1} \cdots x_k^{sr_k}}{\binom{N}{r}} \right\}^{\frac{1}{rs}}$$

e converremo di prendere questa come media combinatoria potenziata ${}_c^r m^{(s)}$ del campione, di modo che porremo senz'altro:

$$(6) \qquad {}_c^r m^{(s)} = \left\{ \frac{\sum \binom{a_1}{r_1} \cdots \binom{a_k}{r_k} x_1^{sr_1} \cdots x_k^{sr_k}}{\binom{N}{r}} \right\}^{\frac{1}{rs}}.$$

Al variare del gruppo delle N prove la media del campione varia e descrive la v. c. ${}^r\mathcal{M}^{(s)}$ definita da:

$$(7) \qquad {}^r\mathcal{M}^{(s)} = \left\{ \frac{\sum \binom{\mathcal{A}_1}{r_1} \cdots \binom{\mathcal{A}_k}{r_k} x_1^{sr_1} \cdots x_k^{sr_k}}{\binom{N}{r}} \right\}^{\frac{1}{rs}}.$$

([8]) Vedi: G. POMPILJ, *Sulla media geometrica e sopra un indice di mutabilità calcolati mediante un campione.* Atti della Soc. It. delle Scienze detta dei XL, 1947.

* * *

L'analogo del treorema di C. GINI, ricordato nell'introduzione ([9]), si enuncia affermando che *la media potenziata omograda (cioè di grande rs) della v. c.* ${}^r\mathcal{M}^{(s)}$, *descritta dalla media combinatoria potenziata* ${}^r_o m^{(s)}$ *del campione, è eguale alla media potenziata di grado s, della v. c.*, la quale coincide, come si è già visto, con l'analoga media combinatoria potenziata ${}^r m^{(s)}$; in simboli:

$$M^{(rs)}\left({}^r\mathcal{M}^{(s)}\right) = m^{(s)}\,. \tag{8}$$

Si ha infatti:

$$M^{(rs)}\left({}^r\mathcal{M}^{(s)}\right) = \left\{ M\left[\frac{\sum \binom{\mathcal{A}_1}{r_1}\cdots\binom{\mathcal{A}_k}{r_k} x_1^{sr_1}\ldots x_k^{sr_k}}{\binom{N}{r}}\right]\right\}^{\frac{1}{rs}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\binom{N}{r}}\sum\frac{M[\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_1-1)\ldots(\mathcal{A}_1-r_1+1)\ldots\mathcal{A}_k(\mathcal{A}_k-1)\ldots(\mathcal{A}_h-r_1+1)]\, x_1^{sr_1}\ldots x_k^{sr_k}}{r_1!\ldots r_k!}\right\}^{\frac{1}{rs}}$$

ma per la (2):

$$M\left[\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_1-1)\ldots(\mathcal{A}_1-r_1+1)\ldots\mathcal{A}_k(\mathcal{A}_k-1)\ldots(\mathcal{A}_k-r_k+1)\right] =$$
$$= N(N-1)\ldots(N-r+1)\, p_1^{r_1} p_2^{r_2}\ldots p_k^{r_k}$$

e quindi:

$$M^{(r)}\left({}^r\mathcal{M}^{(s)}\right) = \left\{\sum\binom{r}{r_1\ldots r_k} p_1^{r_1}\ldots p_k^{r_k}\, x_1^{sr_1}\ldots x_k^{sr_k}\right\}^{\frac{1}{rs}} =$$

$$= \left(\sum_1^k {}_i\, p_i\, x_i^s\right)^{\frac{1}{s}} = m^{(s)}$$

c. v. d.

([9]) Ved. C. GINI loc. cit. (5).

4. – Le medie combinatorie potenziate dei campioni ottenuti con un'estrazione in blocco. Supponiamo ora invece che il campione sia stato ottenuto estraendo dall'urna U un blocco di N palle. Riprendendo i simboli del numero 1 possiamo definire subito la media combinatoria potenziata ${}^r_c m^{(s)}$ del campione mediante la formula:

$$
(9) \qquad {}^r_c m^{(s)} = \left\{ \frac{\sum \binom{o_1}{r_1} \cdots \binom{o_k}{r_k} x_1^{sr_1} \ldots x_k^{sr_k}}{\binom{N}{r}} \right\}^{\frac{1}{rs}} .
$$

Al variare del blocco estratto la media ${}^r_c m^{(s)}$ varia e descrive la v. c.

$$
(10) \qquad {}^r\mathcal{M}^{(s)} = \left\{ \frac{\sum \binom{O_1}{r_1} \cdots \binom{O_k}{r_k} x_1^{sr_1} \ldots x_k^{sr_k}}{\binom{N}{r}} \right\}^{\frac{1}{rs}} .
$$

Possiamo ora dimostrare il teorema di C. Gini [10] che, con i nostri simboli, si riduce alla formula seguente:

$$
(11) \qquad M^{(rs)} \left({}^r\mathcal{M}^{(s)}\right) = {}^r m^{(s)} .
$$

Si ha infatti:

$$
M^{(rs)} \left({}^r\mathcal{M}^{(s)}\right) =
$$

$$
= \left\{ \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum \frac{M\left[O_1 (O_1-1)\ldots(O_1-r_1+1)\ldots O_k (O_k-1)\ldots(O_k-r_k+1)\right]}{r_1 ! \ldots r_k !} x_1^{sr_1} \ldots x_k^{sr_k} \right\}^{\frac{1}{rs}}
$$

ma per la (3):

$$
M\left[O_1 (O_1-1)\ldots(O_1-r_1+1)\ldots O_k (O_k-1)\ldots(O_k-r_k+1)\right] =
$$

(10) Vedi C. Gini loc. cit. (2).

$$= \frac{\binom{N}{r}}{\binom{H}{r}} h_1 (h_1 - 1) \ldots (h_1 - r_1 + 1) \ldots h_k (h_k - 1) \ldots (h_k - r_k + 1)$$

e quindi:

$$M^{(rs)}({}^r\mathfrak{M}^{(s)}) = \left\{ \frac{1}{\binom{H}{r}} \sum \binom{h_1}{r_1} \ldots \binom{h_k}{r_k} x_1^{sr_1} \ldots x_k^{sr_k} \right\}^{\frac{1}{rs}} = {}^r m^{(s)}$$

c. v. d.

5. - La media geometrica dei campioni. Dal teorema sopra ricordato di C. Gini segue che la media omogenea delle medie potenziate dei campioni ottenuti sia bernoullianamente sia con un' estrazione in blocco, coincide con la media della massa, cioè che le medie potenziate dei campioni godono della proprietà *transitiva*. In particolare, ricordando che la media geometrica, che indicheremo con m_g, si può anche definire con un passaggio al limite mediante la formula:

$$m_g = \lim_{s \to 0} m^{(s)},$$

il Gini stesso ne ha dedotto che la media geometrica gode anch'essa della proprietà transitiva, cioè che la media geometrica delle medie geometriche dei campioni coincide con quella dell'universo.

In quest'ultimo numero mi propongo di fornire una dimostrazione diretta di tale proprietà che non faccia ricorso a considerazioni di limite.

Prima però di entrare in argomento conviene premettere che nel seguito i numeri x_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ saranno supposti tutti positivi.

Cominciamo con il caso dei campioni ottenuti bernoullianamente.

Indichiamo con M_g l'operatore che fornisce la media geometrica della v. c. $\mathfrak{X}$, di modo che si avrà:

$$M_g(\mathfrak{X}) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_k^{p_k} = m_g .$$

Ciò posto per il campione possiamo senz'altro scrivere:

$$ {}_c m_g = \left\{ x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots\ldots x_k^{a_k} \right\}^{\frac{1}{N}} $$

$$ \mathcal{M}_g = \left\{ x_1^{\mathcal{A}_1} x_2^{\mathcal{A}_2} \ldots x_k^{\mathcal{A}_k} \right\}^{\frac{1}{N}} $$

dove con $\mathcal{M}_g$ si è indicata la v. c. descritta dalla media geometrica ${}_c m_g$ del campione al variare del gruppo delle N prove.

Vogliamo dimostrare che sussiste la relazione:

$$ M_g(\mathcal{M}_g) = m_g . $$

Si ha infatti:

$$ M_g(\mathcal{M}_g) = \prod_{a_1 \ldots a_k} \left\{ x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k} \right\}^{\frac{1}{N}\binom{N}{a_1 \ldots a_k} p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}} = $$

$$ = x_1^{\frac{1}{N}\Sigma a_1 \binom{N}{a_1 \ldots a_k} p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}} \; x_2^{\frac{1}{N}\Sigma a_2 \binom{N}{a_1 \ldots a_k} p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}} \ldots $$

$$ \ldots x_k^{\frac{1}{N}\Sigma a_k \binom{N}{a_1 \ldots a_k} p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}} $$

ma, fermando la nostra attenzione, tanto per fissar le idee, sull'esponente di x_1, si vede subito che al sommatorio portano contributo solo quei termini per cui a_1 è maggior di zero, di modo che si può scrivere:

$$ \frac{1}{N} \Sigma a_1 \binom{N}{a_1 \ldots a_k} p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_1} = p_1 \Sigma' \binom{N-1}{a_1 - 1 \, a_2 \ldots a_k} p_1^{a_1 - 1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k} = p_1 $$

dove con Σ' si è indicata la somma estesa a tutte k-ple $a_1, \ldots, a_k$ la cui somma è N e per cui $a_1 > 0$; è chiaro che analogo risultato si ottiene anche per gli esponenti delle altre x_i di modo che si ha infine:

$$ M_g(\mathcal{M}_g) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_k^{p_2} = m_g $$

c. v. d.

* * *

Passiamo adesso al caso dei campioni ottenuti con un'estrazione in blocco.

In tal caso si ha:

$$m_g = \left\{ x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_k^{h_k} \right\}^{\frac{1}{H}}$$

$$_c m_g = \left\{ x_1^{o_1} x_2^{o_2} \dots x_k^{o_k} \right\}^{\frac{1}{N}}$$

$$M_g = \left\{ x_1^{\Theta_1} x_2^{\Theta_2} \dots x_k^{\Theta_k} \right\}^{\frac{1}{N}}$$

Vogliamo dimostrare che anche in questo caso sussiste la formula:

$$M_g(\mathfrak{M}_g) = m_g$$

Si ha infatti:

$$M(\mathfrak{M}_g) = \prod_{o_1 \dots o_k} \left\{ x_1^{o_1} x_2^{o_2} \dots x_k^{o_k} \right\}^{\frac{1}{N} \frac{\binom{h_1}{o_1} \dots \binom{h_k}{o_k}}{\binom{H}{N}}} =$$

$$= x_1^{\frac{1}{N} \Sigma o_1 \frac{\binom{h_1}{o_1} \dots \binom{h_k}{o_k}}{\binom{H}{N}}} x_2^{\frac{1}{N} \Sigma o_2 \frac{\binom{h_2}{o_2} \dots \binom{h_k}{o_k}}{\binom{H}{N}}} \dots x_k^{\frac{1}{N} \Sigma o_k \frac{\binom{h_1}{o_1} \dots \binom{h_k}{o_k}}{\binom{H}{N}}}$$

ma, ragionando anche questa volta sull' esponente di x_1, si ha:

$$\frac{1}{N} \sum o_1 \frac{\binom{h_1}{o_1} \dots \binom{h_k}{o_k}}{\binom{H}{N}} = \frac{h_1}{H} \sum' \frac{\binom{h_1 - 1}{o_1 - 1} \binom{h_2}{o_2} \dots \binom{h_k}{o_k}}{\binom{H-1}{N-1}}$$

dove con Σ' si intende la somma estesa a tutte le k-ple di interi non negativi $o_1, o_2, \dots, o_k$ tali che la loro somma sia N e che o_1 non diventi mai nullo; d' altra parte, in base ad una formula più volte ricordata, si ha:

$$\sum' \binom{h_1 - 1}{o_1 - 1} \binom{h_2}{o_2} \dots \binom{h_k}{o_k} = \binom{H-1}{N-1}$$

e quindi l' esponente di x_1 non è altro che $\frac{h_1}{H}$, analogamente l' esponente di $x_2, \dots, x_k$ si riduce a $\frac{h_2}{H}, \dots, \frac{h_k}{H}$ e quindi si ha:

$$M_g(\mathfrak{M}_g) = \left\{ x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_k^{h_k} \right\}^{\frac{1}{H}} = m_g \qquad \text{c. v. d.}$$