RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

**Su una questione di topologia**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 18 (1949), p. 231-233

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__231_0>

# SU UNA QUESTIONE DI TOPOLOGIA

*Nota* (*) *di* GIORGIO TREVISAN (*a Padova*).

In questa Nota è esposta una dimostrazione semplice di un teorema che è stato recentemente dato da SCORZA DRAGONI (1).

Nel seguito si indicherà con $J_n$ $(n \geq 2)$ l'insieme:

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

con $J_{n-1}$ l'insieme:

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad x_n = 0 \quad (i = 1, 2, .., n-1);$$

con $r_{i,P}$ la parallela all'asse $x_i$ $(i \neq n)$, passante per il punto $P$, con $n_P$ la normale condotta da $P$ $(P \subset J_n)$ a $J_{n-1}$.

Un insieme $I$ di punti di $J_n$, chiuso, si dirà che verifica la proprietà $\alpha$) se:

1) detto $Q$ un punto generico di $J_{n-1}$, $n_Q$ contiene almeno un punto di $I$;

2) scelto $\varepsilon > 0$ e scelta una porzione $I'$ di $n_Q \cdot I$, chiusa e non vuota e tale che sia chiuso l'insieme $n_Q \cdot I - I'$, esistono da una parte e dall'altra di $Q$ sulla $r_{i,Q}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ punti $P_i$, le cui rispettive $n_{P_i}$ contengono punti di $I$ distanti da $I'$ meno di $\varepsilon$.

Vale allora il

(*) Pervenuta in Redazione il 21 Marzo 1949.

(1) GIUSEPPE SCORZA DRAGONI: *Su una questione di topologia.* [In corso di stampa nel «Giornale di Matematiche di Battaglini», n. 3]. Anche l'altro teorema dato nel n. 4 di questo lavoro si può probabilmente dimostrare con considerazioni analoghe a quelle di cui qui si fa uso, ma non se ne vedono vantaggi di semplicità.

Teorema: *Se un insieme $I$ verifica la proprietà $\alpha$), ogni curva continua*

$$x_i = x_i(t) \quad , \quad t_0 \leq t \leq t_1 \qquad (i = 1\,,\,2\,,\ldots,\,n)$$

*per la quale si abbia*

$$x_n(t_0) = 0 \quad , \quad x_n(t_1) = 1$$

*ha almeno un punto comune con $I$* (2).

Una curva del tipo definito nel teorema si dirà una curva $\gamma$.

Ora poichè $I$ è chiuso, si potrà senza ledere la generalità supporre $\gamma$ una spezzata formata con un numero finito di lati paralleli agli assi coordinati.

Si potrà ancora supporre che $\gamma$ sia non intrecciata ed avente un solo punto $P_0$ per cui $x_n = 0$ ed un solo punto $P_m$ per cui $x_n = 1$.

Se $\gamma$ è formato di un unico lato il teorema è vero per la 1); si supponga il teorema vero per ogni spezzata $\gamma$, con un numero di lati minore od uguale ad $m - 1$, basterà far vedere che allora il teorema è vero anche se $\gamma$ ha $m$ lati.

Ragionando ora per assurdo si supponga che la $\gamma$ sia una spezzata di $m$ lati che non incontri $I$.

Il lato $l_1$ di $\gamma$ che contiene $P_0$ apparterrà alla $n_{P_0}$, sia $P_1$ l'altro estremo di $l_1$ e sia $l_2$ il lato di $\gamma$ di estremi $P_1$ e $P_2$; $l_2$ risulterà parallelo ad un asse $x_i$ e sarà $i \neq n$.

Si indichi con $P'_2$ il punto comune alle rette $n_{P_2}$ e $r_{i,P_0}$.

Il segmento $\sigma$ di estremi $P_2$ e $P'_2$ non contiene punti di $I$.

Infatti se ciò non fosse, dato che $l_1$ non contiene punti di $I$, esisterebbe un punto $\overline{P_0}$ (coincidente eventualmente con $P'_2$, ma diverso sempre da $P_0$) del segmento di estremi $P_0$ e $P'_2$, tale da essere il primo punto, nel verso da $P_0$ a $P'_2$, per cui

(2) Le ipotesi di continuità imposte sono più ampie di quelle richieste nel lavoro citato in (1).

il segmento $\tau$ di estremi $\overline{P_0}$ e $\overline{P}$, con $\overline{P} = n_{\overline{P}_0} \cdot r_{i,P_1}$, contiene punti di $I$.

Ma poichè $\overline{P}$ non appartiene ad $I$ in quanto punto di $\gamma$, l'insieme non vuoto $\tau \cdot I$ sarebbe del tipo $I'$ di cui si parla in 2) e non risulterebbe verificata la proprietà di continuità ammessa invece per ipotesi.

Si percorra $\sigma$ da $P_2'$ a $P_2$ fino ad incontrare il primo punto $P_2''$ di $\gamma$.

$P_2''$ divide $\gamma$ in due parti, una $\gamma_1$ di estremi $P_0$ e $P_2''$ che contiene al completo $l_1$ ed $l_2$ e l'altra $\gamma_2$ di estremi $P_2''$ e $P_m$ che contiene al più $m - 2$ lati.

La curva $\gamma_2 \dot{+} \sigma$ è dunque una spezzata del tipo di $\gamma$, ma con al più $m - 1$ lati; inoltre $\gamma_2 \dot{+} \sigma$ non incontra $I$; e ciò è assurdo, per l'ipotesi alla base del procedimento di induzione.