RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

Una condizione di allineamento per gli insiemi finiti di punti del piano euclideo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 258-261

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__258_0>

UNA CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO PER GLI INSIEMI FINITI DI PUNTI DEL PIANO EUCLIDEO

Nota (*) *di* GIORGIO TREVISAN (*a Padova*).

In questa Nota si indaga se sul piano euclideo reale esistano configurazioni di punti analoghe a quella classica realizzata sul piano euclideo complesso dai nove punti di flesso di una cubica.

La risposta è negativa e più precisamente si ha il

TEOREMA: *Se I è un insieme di un numero finito di punti del piano euclideo reale S, tale che ogni retta congiungente due punti di I ne contenga un terzo, allora I giace su di una retta.*

Per comodità si premette una definizione.

Detti x, y, z i lati ed X, Y, Z i vertici ordinatamente opposti a tali lati, di un triangolo T di S, una retta di S si dirà una trasversale di T relativa al lato z se non contiene punti interni a z, non contiene nè x nè y e se non è vuota la sua intersezione con l'insieme $T - z$.

Ed ora ecco la linea direttiva della dimostrazione.

Ragionando per assurdo, si supponga che l'insieme I verifichi le ipotesi del teorema e che non sia situato su di una retta; allora nel n. 1 si vedrà, che esiste un triangolo T di S per cui sono valide le condizioni:

a) i vertici X, Y, Z di T appartengono ad I,

b) $T - z$ contiene almeno un altro punto di I diverso da Z,

c) ogni trasversale di T relativa al lato z non contiene punti di I esterni a T;

(*) Pervenuta in Redazione il 30 Aprile 1949.

nel n. 2 si dimostrerà che ogni triangolo T di S verificante le $a)$, $b)$, $c)$ contiene un altro triangolo, distinto da T, che verifica ancora le $a)$, $b)$, $c)$; dopo di che l'assurdo sarà evidente, perchè I per ipotesi contiene un numero finito di punti.

1. - Poichè I non giace tutto su di una retta, il minimo poligono convesso π che contiene I non è degenere.

I vertici di π sono punti di I.

Si considerino tre vertici X, Y, Z di π consecutivi in un certo senso sul contorno di π.

Sia T il triangolo dei vertici X, Y, Z e siano x, y, z i lati rispettivamente opposti a tali vertici.

È agevole vedere che T verifica le $a)$, $b)$, $c)$.

Per la $b)$ si osservi che essa è verificata in quanto π è il minimo poligono convesso contenente I e la congiungente due punti di I ne contiene un terzo, da cui segue che ad esempio il lato x contiene un punto di I interno.

2. - Sia dunque T un triangolo di S verificante le $a)$, $b)$ $c)$.

Si distinguono 3 casi:

1) i lati x ed y contengono ambedue punti di I diversi dai loro estremi;

2) il lato x contiene punti di I diversi dai suoi estremi mentre $y \cdot I = X + Z$;

3) $x \cdot I = Y + Z$, $y \cdot I = X + Z$.

Detti x_1 e z_1 rispettivamente i segmenti di estremi A_x e Z, X e A_x, il triangolo T_1 di vertici X, Z, A_x verifica le $a)$, $b)$, $c)$ purchè in esse si ponga $Y = A_x$, $x = x_1$, $z = z_1$, $T = T_1$.

La condizione $a)$ è ovvia; la $b)$ consegue dal fatto che per la 1) y contiene punti di I diversi dagli estremi; la $c)$ è vera in quanto ogni trasversale di T_1 relativa al lato z, è una trasversale di T relativa al lato z.

Nel caso 2), mantenute le notazioni precedenti, si osservi che il triangolo T_1 verifica ancora le $a)$ e $c)$.

Se T_1 verifica anche la $b)$ l'assunto è dimostrato, altrimenti detto x_2 il lato di estremi Y ed A_x, il triangolo T_2 di vertici

X, A_x, Y verifica le $a)$, $b)$, $c)$ quando in esse si ponga $Z = A_x$, $x = x_2$, $y = z_1$, $T = T_2$.

Per la $b)$ basta tener presente che per l'ipotesi fatta su I la retta r congiungente X ed A_x deve contenere almeno un terzo punto di I e che essendo la r una trasversale di T relativa al lato z, tale punto deve appartenere a T_1 quindi a z_1.

La $c)$ è poi verificata perchè una trasversale di T_2 relativa al lato z è una trasversale di T relativa al lato z che non contiene Z e perchè $T_1 - z_1 - Z$ non contiene punti di I.

Si esamina ora il caso 3).

Sia A_x quel punto interno ad x tale che il triangolo di vertici X, Z, A_x privato del punto Z e del segmento s di estremi X ed A_x non contenga punti di I, mentre s ne contiene almeno due.

In modo analogo si determini il punto A_y interno ad y.

Allora il triangolo Y, A_y, Z non conterrà punti di I se privato di z e del segmento r di estremi Y ed A_y mentre r conterrà almeno due punti di I. Si ponga $Z_1 = r \cdot s$.

Si devono ora considerare due sottocasi:

3') Z_1 appartiene ad I;

3'') Z_1 non appartiene ad I.

Se è vera la 3'), indicati con y_1 ed x_1 rispettivamente i segmenti di estremi X e Z_1, Y e Z_1, il triangolo T_1 di vertici X, Z_1, Y verifica le $a)$, $b)$, $c)$ quando in esse si ponga $Z = Z_1$, $x = x_1$, $y = y_1$, $T = T_1$.

La $b)$ è verificata perchè cade certamente qualche punto di I internamente ad x_1 (ed a y_1) per l'ipotesi che la congiungente due punti di I ne contiene un terzo e per costruzione.

La $c)$ è verificata perchè ogni trasversale di T_1 relativa al lato z è una trasversale di T relativa al lato z tale che la sua intersezione con l'insieme $T - T_1$ non contiene punti di I.

Se è vera la 3''), sia Z_2 il punto di I più prossimo a Z_1 e giacente su s; Z_2 risulta distinto da X e compreso tra X e Z_1 ed inoltre tra X e Z_2 cadrà almeno un punto di I.

Si consideri la retta passante per Z_2 che incontra r in D per modo che il triangolo di vertici Z_2, Z_1, D non contenga punti di I esterni al lato di estremi Z_2 e D, mentre tale lato contiene punti di I oltre Z_2.

Ciò è possibile perchè almeno un punto di I è interno a x_1.

Sia Y_2 il punto di I più prossimo a Z_2 ed interno al segmento di estremi Z_2 e D; questo punto esiste sempre per il fatto che la congiungente due punti di I ne contiene un terzo e per costruzione.

Se si indicano con x_2, y_2, z_2, rispettivamente i segmenti di estremi Y_2 e Z_2, X e Z_2, X e Y_2 il triangolo T_2 di vertici X, Z_2, Y_2 soddisfa le a), b), c) quando in esse si ponga, $Y = Y_2$, $Z = Z_2$, $x = x_2$, $y = y_2$, $z = z_2$, $T = T_2$.

La b) è vera perchè cade qualche punto di I tra X e Z_2, cioè interno a y_2.

La c) è vera perchè ogni trasversale di T_2 relativa al lato z_2 è una trasversale di T relativa al lato z che incontra $T - T_2$ in regioni dove si è escluso che cadano punti di I.

Così anche il caso 3) è esaurito e l'assunto è dimostrato.

3. - È immediato corollario del teorema dimostrato il seguente:

Se I è un insieme di un numero finito di punti dell' S_n euclideo, tale che la congiungente due punti di I ne contiene un terzo, allora I è situato su di una retta.

Si ragioni per assurdo. Se i punti di I non sono situati su di una retta ciò significa che esiste un piano α contenente almeno tre punti di I non allineati tra loro; ma l'insieme dei punti di I che giacciono su α verifica le ipotesi del teorema già dimostrato.